BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kumas, Kōnstantinos M., 1777-1836

Seiras stoicheioōdus tōn mathēmatikōn kai physikōn pragmateiōn

Bd.: T. 2

en Bienn ē tēs Austrias (1807)

Math.u. 91 m-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594035-8

Math. U. 91m

R

112

ΣΕΙΡΑΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ

ΕΚ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ ΣΥΛΛΕΧΘΕΙΣΩΝ

ΥΠΟ Κ. Μ. ΚΟΥΜΑ

ΛΑΡΙΣΣΑΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

Περιέχων τοῦ Συμβολικοῦ Λογισμοῦ τὰ περὶ Λογαρίθμων, τὰ περὶ Ἐξισώσεων, τὰ περὶ Σειρῶν, καὶ τὰ Στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας.

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗι ΤΗΣ ΑΥΣΤΡΙΑΣ

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΕΝΔΩΤΟΥ.

ΑΩΖ.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ ΤΩΝ ΗΜΑΡΤΗΜΕΝΩΝ.

Σελίδι 11, σίχῳ 17, *Μετιένων*, Γράφε, *Μετιέναι*. — Σελ. 14. σίχ. 18. *Τὸ*, Γρ. *Τόν*. — Σελ. 24. σίχ. 30. *Ἐςὶν ἡ*, Γρ. *Ἐςὶν· ἡ*. — Σελ. 25. σίχ. 14, $45\frac{51}{100}$. Γρ. $54\frac{51}{100}$ — Σελ. 34. σίχ. 16, *Τάξις*, Γράφ. *Σύνταξις*. — Σελ. 35, σίχ., 9, *Εἰλήφθων*, Γρ. *Εἰλήφθω*. Σελ. 39, σίχ. 23. ἐξάλειψον τὸ μέν. Σελ. 44. σίχ. 9. *Τῷδε*, Γρ. *Τῶτε*. — Σελ. 48. σίχ. 21, *Ἐφαίνῃ*, Γρ. *Ἐμφαίνῃ*. — Σελ. 58. σίχ. 15, $\frac{x}{10}$, Γρ. $\frac{\times}{20}$. Σελ. 63, σίχ. 12, *Τρισὶ*, Γρ. *Δυσί*. — Σελ. 68, σίχ. 24, (441), Γρ. (440). — Σελ. 70, σίχ. 23, (488), Γρ. (388). Σελ. 74, σίχ. 22, $85 =$, Γρ. $85 = \beta$. — Σελ. 75, σίχ. 11, $2\beta\ 3\gamma$: —, Γρ. $2\beta - 3\gamma$. — Σελ. 78, σίχ. 9, $\frac{\upsilon}{9} + \frac{\omega}{5}$, Γρ $\frac{\upsilon}{9} = \frac{\omega}{5}$. — Σελ. 80, σίχ. 5, $\psi \frac{\alpha}{2}$, Γρ. $\psi = \frac{\alpha}{2}$. — Σελ. 87, σίχ. 17, (134), Γρ. (459). — Σελ. 94, σίχ. 27. *Ἀνυπαρκτέσης*, Γρ. *Ἐνυπαρχέσης*. — Σελ. 95, σίχ. 19, *Τριτοβαθμίε*, Γρ. *Τεταρτοβαθμίε*. σίχ. 21, *Σὺν δύω*, Γρ. *Σύντρεις*. — Σελ. 103, σίχ. 14. $\upsilon \times \chi$, Γρ. $\upsilon = \chi$. — Σελ. 111, σίχ. 11. $\frac{\beta}{2} +$, Γρ. $\frac{\beta}{2} -$. σίχ. 19. $\frac{\beta}{2} +$, Γρ. $\frac{\beta}{2} -$. — Σελ. 119, σίχ. 2, $\sqrt{x}$, Γρ. $\sqrt{2}$. — σίχ. 21, $\pi\kappa\rho + \eta$, Γρ. $\pi\kappa\rho = \eta$. — Σελ. 121, σίχ. 27, $\dot{x}y = 4$, Γρ. $\dot{x}y\ x = 4$. — Σελ. 123, σίχ. 9, $\mu = \nu$, Γρ. $\mu + \nu$. — Σελ. 126, σίχ. 20, *Τῶν ἀρτίε*, Γρ. *Τε ἀρτίε*. — Σελ. 138, σίχ. 20, (125), Γρ. (430). — Σελ. 148, σίχ. 16, 549, Γρ. 543. — Σελ. 149, σίχ. 11· $= \upsilon^8$, Γρ. $+ \upsilon^8$. — Σελ. 152 σίχ. 4, $\frac{\upsilon^4}{4\alpha^2} =$, Γρ. $\frac{\upsilon^4}{4\alpha^2} +$. — Σελ. 153, σίχ. 10, (128), Γρ. (126). Σελ. 156, σίχ.

18. $\frac{3}{3}$ Γρ. $\frac{1}{3}$. Σελ. 189. ςίχ. 27 · ΟΓκ, Γρ. ΟΚκ. — Σελ. 194, ςίχ. 1, Γ, Γρ. Κ — ςίχ. 25. Γ. Γρ. Κ. — Σελ. 195, ςίχ. 3, Γ, Γρ. Κ. — Σελ. 199, ςίχ. 16 ΑΓ, Γρ. ΑΚ, ς. 17, ΓΗ Γρ. ΚΗ. — Σελ. 203, ςίχ. 15, Υ῞περθεν, Γρ. Ε῞νερθεν. — Σελ. 209, ςίχ. 9. Γο. Γρ. Κο. — Σελ. 212. ςίχ. 22. (84). Γρ. (102). — Σελ. 224. ςίχ. 12, Ε῞ςι $> 90°$, τέτων δὲ < 90. Γρ. Ε᾿ςι τῶν μὲν ἀμβλειῶν μέτρον $> 90°$, τῶν δὲ ὀξειῶν $< 90°$. — Σελ. 233. ςίχ. 17. (220). Γρ. (209). Σελ. 240. ςίχ. 28. (225) γρ. (228). — Σελ. 242. ςίχ, 8. Ι῎σαι, Γρ. Ι῎σα. — Σελ. 251. ςίχ. 8 Δυατὸν, Γρ. Δυνατόν. — Σελ. 269. ςίχ. 24. (51). Γρ. (5). — Σελ. 284. ςίχ. 25. Ο῾ κύκλος, Γρ. Κύκλος. — Σελ. 287. ςίχ. 11, 365, Γρ. 366. — Σελ. 288. ςίχ. 22, KK^2, Γρ. $ΛK^2$, — ςίχ. 26. $ΛA^2$, Γρ. KA^2. — Σελ. 292, ςίχ. 13, (31) Γρ. (34). — Σελ. 297, ςίχ. 22. (236) Γρ. (240). — Σελ. 307, ςίχ. 16. (339) Γρ. (338). — Σελ. 308, ςίχ. 23, 292, Γρ. 392. — Σελ. 309, ςίχ. 20, (398) Γρ. (397). Σελ. 317. ςίχ. 28, Ε᾿πακήκεσα, Γρ. Ε᾿πανήκεσσα. — Σελ. 323. ςίχ. 16. (249) Γρ. (449). — ςίχ. 25. (268). Γρ. (298). — Σελ. 324. ςίχ. 10 (405) Γρ. (396). — Σελ. 328. ςίχ. 1, (237), Γρ. (239). Τὰ ἐν σελίδι 318, § 437 μετιὼν, ὅρα τὸ 99 χῆμα.



Σ Ε Ι Ρ Α
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ.

Τμήματος δευτέρου τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ λογαρίθμων.

313. Λογάριθμοι καλοῦνται ποσότητες ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ χωροῦσαι ἀντιστοίχως ἑτέραις, συνιστώσαις γεωμετρικὴν πρόοδον.

Ἐὰν τὸ α, πᾶσαν πρὸς τὸ δοκοῦν ἐξεικονίζον ποσότητα, ἀρθῇ ἐφεξῆς ἐπὶ βαθμοὺς, ὧν τοῦ μὲν πρώτου δείκτης εἴη 0, τοῦ δὲ δευτέρου 1, καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως, συσταθήσεται ἥδε ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος $\div\!\!\div\ \alpha^0 : \alpha^1 : \alpha^2 : \alpha^3 : \alpha^4 : \alpha^5 : \alpha^6$ (276), ἧς οἱ δεῖκται συνιστῶσι τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον $\div$ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 κτ· ὅθεν ἀποτελοῦνται αἱ ἐφεξῆς δύω πρόοδοι Β καὶ Δ

$$\div\!\!\div\ \alpha^0 : \alpha^1 : \alpha^2 : \alpha^3 : \alpha^4 : \alpha^5 : \alpha^6 : \alpha^7 : \mathrm{B}$$

$$\div\ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . \Delta$$

ἕκαςος ἓν ὅρος τῶν ἐν τῇ ἀριθμητικῇ προόδῳ Δ καλεῖται λογάριθμος τȣ͂ αὐτῷ συςοιχȣ͂ντος ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς προόδȣ Β· 2 φέρ᾽ εἰπεῖν ὁ ἐν τῇ Β ἔςι λογάριθμος τȣ͂ ἐν τῇ Δ $α^2$· 3 δὲ ἐςι λογάριθμος τȣ͂ $α^3$ κτ.

314. Νῦν ȣ͂ν ἐὰν ἐπὶ τῆς Β προόδȣ ὑποτεθῇ $α=10$, ἡ πρόοδος γενήσεται $\div\!\div$ $10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 20^5 : 10^6$: κτ. ἐκτιμῶντες δὲ τȣ̀ς βαθμȣ̀ς, ἐπεὶ $10^0=1$ (59) ἕξομεν τὴν πρόοδον $\div\!\div$ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 κτ.

Ἐὰν ταύτῃ τῇ γεωμετρικῇ προόδῳ Β ὑποςρωθῇ ἀντίςοιχος ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος Δ, προκύψȣσιν αἱ ἑξῆς δύω πρόοδοι, ἡ μὲν γεωμετρικὴ, ἀριθμητικὴ δὲ ἡ ἑτέρα·

$\div\!\div$ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000

$\div$ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6

315. Οὐκȣ͂ν ο μὲν ἐςι λογάριθμος τῆς 1· 1 δὲ τȣ͂ 10· 2 δὲ τȣ͂ 100· 3 δὲ τȣ͂ 1000, ϗ ȣ͂τως ἑξῆς· κατὰ τὴν φύσιν ἄρα τῶνδε τῶν δύω προόδων, ὁ λογάριθμος, φέρ᾽ εἰπεῖν, 5 τȣ͂ γινομένȣ ὑπὸ τῶν δύω ποσοτήτων 100 ϗ 1000, εἴτ᾽ ȣ͂ν τȣ͂ 100000, εὑρεθήσεται συναφθέντος τȣ͂ κατὰ τὸν πολλαπλασιαςέον 100 λογαρίθμȣ 2 τῷ τȣ͂ πολλαπλασιαςȣ͂ 1000 λογαρίθμῳ 3

316. Τȣ̓ναντίον δὲ ὁ 4 λογάριθμος τȣ͂ 10000 πηλίκȣ, τȣ͂ διαιρέσει τῆς 1000000 ποσότητος διὰ τῆς 100 προκύπτοντος, εὑρεθήσεται, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ὁ 2 λογάριθμος τȣ͂ διαιρέτȣ ἀπὸ τȣ͂ κατὰ τὸν διαιρετέον 1000000 λογαρίθμȣ 6.

317. Τȣ͂ παντὸς ὅρȣ βαθμȣ͂ ὁ λογάριθμος εὑρεθήσεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ τȣ͂ ὅρȣ τȣ͂δε λογάριθμος ἐπὶ τὸν τȣ͂ βαθμȣ͂ δείκτην· ȣ͂τως εὑρεθήσεται 6 λογάριθ-

μος τȣ̃ ἀπὸ 100 κύβȣ 1000000, πολλαπλασιασθέντος τοῦ 3 κυβικȣ̃ δείκτȣ ἐπὶ τὸν τȣ̃ 100 λογάριθμον 2.

318. Τȣ̓ναντίον δὲ θηρευθήσεται ὁ πάσης ῥίζης παντὸς ὅρȣ λογάριθμος, διαιρεθέντος τȣ̃ κατὰ τὸν ὅρον λογαρίθμȣ διὰ τȣ̃ ἐπισήμȣ· ȣ̎τως εὑρεθήσεται 3 λογάριθμος τȣ̃ 1000, ὅς ἐςι ῥίζα τετραγωνικὴ τȣ̃ 1000000, διαιρεθέντος τȣ̃ κατὰ τὸν 1000000 λογαρίθμȣ 6 διὰ τȣ̃ 2 τετραγωνικȣ̃ ἐπισήμȣ. Πάντα δὲ τὰ ἤδη εἰρημένα ἐπαληθεύοντα δείκνυται γενικώτερον ἐπὶ τῶν προειλημμένων δύω προόδων Β ϗ Δ.

319. Ἡ φυσικὴ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν ÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 κτ. παρέχει τȣ̀ς λογαρίθμȣς πάντων τῶν ἀριθμῶν τῶν συμπεριειλημμένων ἐν τῇ κατὰ τὸ δεκαπλάσιον χωρέσῃ γεωμετρικῇ προόδῳ ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 κτ., ὡς ἰδεῖν ἐνταῦθα ἔνεςι

∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 : 10000000 : κτ
÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . κτ

320. Ἢ, ὅπερ ἐςὶν ἀμέλει ταὐτὸν, ἡ φυσικὴ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν 0, 1, 2, 3, 4 κτ. παρέχει τȣ̀ς λογαρίθμȣς πάντων τῶν κατὰ τὸ ἐφεξῆς βαθμῶν $10^0 . 10^1 . 10^2$ κτ, εἴτ ȣ̃ν τȣ̃ 10, ἔχοντος δείκτην ὁλοχερῆ ἀριθμόν· ἀλλὰ γὰρ τȣ̃ κατὰ 1 λογαρίθμȣ ὄντος 0, τȣ̃ δὲ κατὰ τὸν 10 ὄντος 1, οἱ λογάριθμοι τȣ̃ 2, 3, 4 κτ. ἔςγε τὸν 10, ἔσονται πάντως κλασματικοὶ ἀριθμοί· ὡσαύτως δὲ τȣ̃ μὲν κατὰ τὸν 10 λογαρίθμȣ ὄντος 1, τȣ̃ δὲ κατὰ τὸν 100 ὑπάρχοντος 2, οἱ τῶν μεταξὺ 10 ϗ 100 ἀριθμῶν λογάριθμοι ἔσονται 1 μετά τινος κλάσματος.

Ἐν γένει δὲ, ὁ ȣ̔τινοσȣ̃ν ἀριθμȣ̃, μὴ περιλαμβανομένȣ ἐν τῇ δεκαπλασίῳ προόδῳ ∺ 1 : 10 : 100 κτ, λογάριθμος ἔσεται κλασματίας.

321. Ἐντεῦθεν ἄρα ἐν παντὶ λογαρίθμῳ δύω διακρίνονται ἀριθμοὶ, ὅ,τε ὁλοσχερὴς, τ8τέςιν ὁ πρὸς ἀριςερὰν τῆς ὑποδιαςολῆς γεγραμμένος χαρακτὴρ (Ἀριθ. 224), ϗ οἱ κλασματώδεις δεκαδικοὶ χαρακτῆρες, οἱ κατὰ δεξιάν· ὁ δὲ ὁλοσχερὴς καλεῖσθαι εἴωθε τὸ χαρακτηριςικὸν τ8 λογαρίθμ8· ἔτως ἐπὶ τ8 λογαρίθμ8 1,0791812, ὅςἐςι τ8 ἀριθμ8 12, ὁ μὲν 1 ὁλοσχερὴς ἔςι τὸ χαρακτηριςικὸν, πάντες δὲ οἱ ἑπόμενοι εἰσὶ δεκαδικοί.

322. Τὸ χαρακτηριςικὸν περιέχει ἀεὶ τοσαύτας μονάδας πλὴν μιᾶς, ἐξ ὅσων χαρακτήρων σύγκειται ὁ ἀντίςοιχος αὐτῷ ἀριθμὸς, ἢ, ὃ ταὐτὸν, οἱ χαρακτῆρες τ8 ἀριθμ8 μονάδι ὑπερβάλλ8σι τὰς τ8 ἀντιςοίχ8 λογαρίθμ8 μονάδας· ϗ γὰρ, ὡς παντὶ ἔνεςιν ἰδεῖν, τὸ χαρακτηριςικὸν ἁπάντων τῶν μέχρι 10 ἀριθμῶν ἔςι 0· τὸ δὲ τῶν μεταξὺ 10 ϗ 100 περιλαμβανομένων ἐςὶ 1· 2 δὲ τὸ πάντων τῶν μεταξὺ 100 καὶ 1000, ϗ ἑξῆς ἔτω· γνωσθέντος ἄρα τ8 ἐν παντὶ λογαρίθμῳ χαρακτηριςικ8, αὐτίκα ἐξέςαι συναγαγεῖν, ἐξ ὅσων σύγκειται χαρακτήρων ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς, ᾧτινι ἀπανήκει ὁ λογάριθμος ἔτος· ἐξ ἐναντίας δὲ τ8 φυσικ8 ἀριθμ8 γνωσθέντος, γνωσθήσεται ϗ τὸ χαρακτηριςικὸν τ8 ἐν αὐτῷ λογαρίθμ8.

Ἐὰν τὸ χαρακτηριςικὸν ᾖ 3, ἐκ τ8τ8 συναχθήσεται, ὡς ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς, ᾧ ἐπανήκει ὁ λογάριθμος, ἔχει χαρακτῆρας 4· ἐὰν δ' ἀριθμός τις συγκέηται ἐκ 3 χαρακτήρων, γνωσθήσεται ἐκ τ8τ8, ὅτι ὁ τ8 κατ' αὐτὸν λογαρίθμ8 χαρακτηριςικὸς ἔςαι 2.

323. ΣΧΟΛΙΟΝ. Εὑρίσκονται ἐν ἰδίῳ τεύχει οἱ

πίνακες τῶν λογαρίθμων, ϗ τῶν ἡμιτόνων, ἅμα δὲ ϗ ἡ ἀναγκαία ἑρμηνεία τῆς αὐτῶν χρήσεως. (*)

324. Πρὸς ἀποφυγὴν τῆς τῶν κλασμάτων ἀτοπίας, δεῖν ᾠήθησαν προσεπιγράφειν κατὰ τὰ δεξιὰ τῶν ἐν τοῖς τȢ 10 βαθμοῖς δεικτῶν τȣλάχιςον 7 δεκαδικὰ (Ἀριθ. 232) ὅθεν ἀντὶ τῆς προόδȣ ÷ $10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4$: κ. τ., πρόεισιν ἡ ÷ $10^{0,0000000} : 10^{1,0000000} : 10^{2,0000000} : 10^{3,0000000}$ κτ. ἐπὶ τοίνυν τῆς καινῆς προόδȣ ÷ $10^{0,0000000} : 10^{1,0000000}$ κτ. ἀεὶ ἐπαύξοντες μονάδι τὰ ἐπὶ τȢ δείκτȣ τȢ πρώτȣ ὅρȣ δεκαδικά, ἀπ' ἀρχῆς τȢ $10^{0,0000000}$ μέχρι τέλȣς τȢ $10^{1,0000000}$ ἕξομεν πρόοδον γεωμετρικὴν συγκειμένην ἐκ δέκα μιλλιονίων ὅρων, ὧν ὁ μὲν πρῶτος ἔςαι $10^{0,0000000}$, ὁ δὲ δεύτερος $10^{0,0000001}$, ὁ δὲ τρίτος $10^{0,0000002}$... ὁ δὲ δέκατος $10^{0,0000009}$... ὁ δὲ πρὸ τȢ ἐσχάτȣ $10^{0,9999999}$.

325. Ἐν τοῖς παντοίοις τȣτοισὶν ὅροις, οἵτινες ἅπαντες βαθμοί εἰσιν ἐπιδήλως τȢ 10, εἷς τις ἰσοδυναμήσει τῷ 2, μετὰ βραχὺ δὲ ἕτερός τις ἰσοθενήσει τῷ 3, ϗ ἑξῆς ȣτως ἕως τȢ 10· ὡσαύτως ἀπ' ἀρχῆς τȢ $10^{1,0000000}$ μέχρι τέλȣς τȢ $10^{2,0000000}$, ἀποληφθήσεται πρόοδος δέκα μιλλιονίων περιέχȣσα ὅρȣς, ὧν ὁ μὲν πρῶτος ἔςαι $10^{1,0000000}$, ὁ δὲ δεύτερος $10^{1,0000001}$ κτ. ἐν αὐτοῖς δὲ τοῖς ὅροις ὁ πρῶτος μὲν ἰσοδυναμήσει τῷ 10, ἕτερος δέ τις τῷ 11, ϗ

(*) Τοιοῦτο Γεώργιος Βέγας ἐξέδοτο ἐν Λειψίᾳ τὸ δεύτερον κατὰ τὸ 1800 ἔτος, ὃ ποθ' ἡμῖν, εὐκαιρίας τυχοῦσι, μεταφρασθὲν ἐκδοθήσεται· ἔςι γὰρ ἐπιεικῶς καὶ τοὺς πίνακας, εἴτι καὶ ἄλλο πλῆρες, καὶ τὰ περὶ τῆς εὑρέσεως τῶν λογαριθμικῶν τύπων εὐμεθόδως πάνυ πραγματευόμενον, καὶ τὴν τῶν πινάκων χρῆσιν εὐκρινέςατα ἑρμηνεῦον.

ἑξῆς ὕτως ἕς γε τὸν 100. Ταὐτὸν δὲ ῥητέον περὶ πάντων τῶν ὅρων τῶν ἐν τῇ δεκαπλῇ προόδῳ ∸ $10^{0,0000000}$: $10^{1,0000000}$: $10^{2,0000000}$: $10^{3,0000000}$ κτ.

326. Α῞παντες ἄρα οἱ Φυσικοὶ ἀριθμοὶ ὕτως ἔσονται βαθμοὶ τῦ 10, οἱ δὲ τύτων δεῖκται γενήσονται ὁι αὐτοὶ λογάριθμοι τύτων τῶν ἀριθμῶν.

Α᾽λλὰ γὰρ ἵν᾽ εὑρεθῇ, ὅςτις ἐςὶν ὁ ἰδιαίτερος δείκτης τοῦ τοῦ 10 βαθμοῦ, ἰσουμένου παντὶ φυσικῷ ἀριθμῷ, εἴτ οὖν ὁ λογάριθμος παντὸς δεδομένου ἀριθμοῦ, τῦτ᾽ ἔςιν, ὅπερ ὑπὸ Νεπέρου, ἀνδρὸς εὐγενῦς, τῶν λογαρίθμων εὑρέτυ, ἀνέπτυκται, ναὶ μὴν καὶ ἄλλων, ἐπὶ ταύτης τῆς ὕλης ἐκπονησάντων· ἡμεῖς δὲ ἤδη ἰδέαν οἱόν τινα τῆς τύτων εὑρέσεως παράσχωμεν ἐπὶ τῦ κατὰ τὸν 9 ἀριθμὸν λογαρίθμυ.

327. Ι῞ν᾽ ὖν εὕρωμεν τὸν τῦ 9 λογάριθμον, ὑποσυνάπτομεν τῷ 1 ϗ 10 ἑκάτερῳ ἑπτὰ δεκαδικά· ὅθεν ὁ μὲν ἔςαι 1,0000000, ὁ δὲ 10,0000000· ζητῦμεν εἶτα μεταξὺ αὐτῶν διὰ πράξεων πολλῶν ἱκανὺς μέσυς γεωμετρικῶς ἀναλόγους μέχρι τῦ 9,0000000, ὅς ἐςὶν ἴσος τῷ 9· γράφομεν ὡσαύτως τῷ 0 λογαρίθμῳ τῆς 1, ϗ τῷ 1 λογαρίθμῳ τῦ 10 ἑκατέρῳ ἑπτὰ δεκαδικά· ὅθεν ὁ μὲν ἔςαι 0,0000000. ὁ δὲ 1,0000000· καὶ ζητῦμεν μεταξὺ τῶν δύω τύτων ἀριθμῶν τὸν μέσον ἀριθμητικῶς ἀνάλογον, τὸν δίκην λογαρίθμυ συςοιχῦντα τῷ ἄρτι εὑρημένῳ μέσῳ γεωμετρικῶς ἀναλόγῳ.

ΠΡΑΞΙΣ ΠΡΩΤΗ. Εἰς εὕρεσιν τῦ πρώτυ μέσυ γεωμετρικῶς ἀναλόγυ μεταξὺ 1,0000000, ϗ 10,0000000, γράφομεν ∸ 1,0000000 : χ : 10,0000000· ὁ ὖν μέσος ζητύμενος ἀνάλογος χ ἔςαι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῦ

ὑπὸ τῶν ἄκρων γινομένε, ἡ $\sqrt{10,00000000000000}$ = 3,1622777 πλὴν ἑνὸς μικρȣ̃ δεῖν δεκαμιλλιονισημορίȣ (254).

Ζητȣ̃μεν ἑξῆς τὸν μέσον ἀριθμητικῶς ἀνάλογον μεταξὺ τȣ̃ 0,0000000 λογαρίθμου τῆς 1, ϗ τȣ̃ 1,0000000 λογαρίθμȣ τȣ̃ 10 κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν τῶν τριῶν μέθοδον ȣ̃τω ÷ 0,0000000 · χ · 1,0000000 (108), τὸ χ ἄρα ὀφείλει ἐξισȣ̃σθαι τῷ ἡμίσει τȣ̃ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων, ϗ ἐπεὶ ὁ πρῶτος ὅρος ἐςιν ἴσος τῷ 0, ἐπομένως $\chi = \frac{1,0000000}{2}$ = 0, 5000000, ὅς ἐςιν ὁ ζητȣ́μενος μέσος ἀριθμητικῶς ἀνάλογος, ϗ δὴ ὁ λογάριθμος τȣ̃ ἄρτι εὑρημένȣ μέσȣ γεωμετρικῶς ἀναλόγȣ 3, 162 κτ.

ΠΡΑΞΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ. Ἐπεὶ ὁ εὑρεθείς μέσος γεωμετρικὸς ἀνάλογος ἐλάττων ἐςὶν ἢ 9,0000000· τȣ́τȣ δὴ χάριν ζητȣ̃μεν δεύτερον μέσον γεωμετρικῶς ἀνάλογον μεταξὺ τȣ̃ 3,1622777 ϗ 10,0000000 γράφοντες ∺ 3,1622777 : χ : 10,0000000 : ϗ πράξει ὁμοίᾳ τῇ προτέρᾳ εὑρήσομεν χ = 5,6324132 δεύτερον μέσον γεωμετρικῶς ἀνάλογον· ζητȣ̃μεν εἶτα τὸν λογάριθμον τȣ̃δε τȣ̃ μέσȣ ἀναλόγȣ, εἴτ' ȣ̃ν τὸν μέσον ἀριθμητικῶς ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύω τελευταίων λογαρίθμων τῆς πρὸ ταύτης συνεχȣ̃ς γεωμετρικῆς ἀναλογίας, ȣ̃τω ÷ 0,5000000 · χ · 1,0000000, ὃς ἐςιν ἴσος τῷ ἡμίσει τȣ̃ τῶν ἄκρων ἀθροίσματος, εἴτ' ȣ̃ν 0,7500000, λογάριθμος τȣ̃ 5,6234132.

Τῆς δὲ πράξεως ὁμοίως ἐπαναλαμβανομένης εὑρήσομεν τρίτον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύω προλαβόντων ὅρων γεωμετρικῶς μὲν τὸν 7,4989421, ἀριθμητικῶς δὲ, εἴτ' ȣ̃ν λογάριθμον τȣ̃δε τȣ̃ γεωμετρικȣ̃, τὸν 0,8750000.

Διὰ δὲ τῆς τετάρτης πράξεως τέταρτος γεωμετρικῶς μὲν μέσος ἀνάλογος εὑρεθήσεται ὁ 8,6596432, ἀριθμητικῶς δὲ ὁ 0,9375000.

Ὁ δὲ γεωμετρικῶς μέσος ἀνάλογος 9,3057204, ὁ διὰ τῆς πέμπτης εὑρισκόμενος πράξεως, ἐπεὶ ὑπερέχει τȣ̃ ζητȣμένȣ 9,0000000, ζητητέον ἤδη μέσον ἀναλογον μεταξὺ τȣ́τȣτε καὶ τȣ̃ 8,65 κτ. ȣ̔́τω ∸ 8,6596432 : χ : 9,3057204· ὅθεν προκύψει κοινὸς μέσος ἀνάλογος γεωμετρικῶς 8,6768713· ὁ δὲ αὐτȣ̃ λογάριθμος, τὸ ἥμισύ ἐςι τȣ̃ ἀθροίσματος τῶν κατὰ τȣ̀ς προηγησαμένȣς ὅρȣς λογαρίθμων, εἴτ' ȣ̃ν 0,9531250.

Τȣ̃δε δὲ τȣ̃ μέσȣ γεωμετρικῶς ἀναλόγȣ 8,92 κτ. ἐλάττονος ὄντος τȣ̃ ζητȣμένȣ, εὑρίσκομεν καινὸν ἄλλον μεταξὺ τȣ́τȣτε καὶ τȣ̃ 9,3057204, καὶ ȣ̔́τως ἑξῆς μέχρις εἰκοςῆς πέμπτης πράξεως, ἐξ ἧς πρόεισιν ὁ 9,0000000, εἴτ' ȣ̃ν 9, καὶ λογάριθμος αὐτȣ̃ ὁ 0,9542425.

Ἴδȣ δὴ ὑπ' ὄψιν καὶ ὁ πίναξ τῶνδε τῶν πράξεων.

	Μέσοι γεωμετρικῶς ἀνάλογοι.	Οἱ τούτων λογάριθμοι.
α'.	1, 0000000	0, 0000000
	3, 1622777	0, 5000000
	10, 0000000	1, 0000000
β'.	10, 0000000	1, 0000000
	5, 6234132	0, 7500000
	3, 1622777	0, 5000000
γ'.	10, 0000000	1, 0000000
	7, 4989421	0, 8750000
	5, 6234132	0, 7500000
δ'.	10, 0000000	1, 0000000
	8, 6596432	0, 9375000
	7, 4989421	0, 8750000
ε'.	10, 0000000	1, 0000000
	4, 3057204	0, 9687500
	8, 6596432	0, 9375000

	Μέσοι γεωμετρικῶς ἀνάλογοι.	Οἱ τούτων λογάριθμοι.
ϛ'.	9, 3057204	0, 9687500
	8, 9768713	0, 9531250
	8, 6596432	0, 9375000
ζ'.	9, 3057204	0, 9375000
	9, 1398170	0, 9604375
	8, 9768713	0, 9531250
η'.	9, 1398170	0, 9609375
	9, 0579777	0, 9570312
	8, 9768713	0, 9531250
θ'.	9, 0579777	0, 9570312
	9, 0173333	0, 9550781
	8, 9768713	0, 9531250
ι'.	9, 0173333	0, 9550781
	8, 9970796	0, 9541015
	8, 9768713	0, 9531250
ια'.	9, 0173333	0, 9550781
	9, 0072008	0, 9545898
	8, 9978796	0, 9541015
ιβ'.	9, 0072008	0, 9545898
	9, 0021388	0, 9543457
	8, 9970796	0, 9541015
ιγ'.	9, 0021388	0, 9543457
	8, 9996088	0, 9542236
	8, 9970796	0, 9551015
ιδ'.	9, 0021388	0, 9543457
	9, 0008737	0, 9542846
	8, 9996088	0, 9542236
ιε'.	9, 0008737	0, 9542846
	9, 0002412	0, 9542541
	8, 9996088	0, 9542236
ιϛ'.	9, 0002412	0, 9542541
	8, 9999250	0, 9542388
	8, 9996088	0, 9542236
ιζ'.	9, 0002412	0, 9542541
	9, 0000831	0, 9542465
	8, 9999250	0, 9542388

	Μέσοι γεωμετρικῶς ἀνάλογοι.	Οἱ τούτων λογάριθμοι.
ιή.	9, 0000831	0, 9542465
	9, 0000041	0, 9542427
	8, 9999250	0, 9542388
ιθ΄.	9, 0000541	0, 9542271
	8, 9999650	0, 9542408
	8, 9999250	0, 9542388
κ΄.	9, 0000541	0, 9542408
	8, 9999845	0, 9542421
	8, 9999650	0, 9542408
κα΄.	9, 0000541	0, 9542278
	8, 9999943	0, 9542422
	8, 9999845	0, 9542421
κβ΄.	9, 0000541	0, 9542427
	8, 9999992	0, 9542424
	8, 9999943	0, 9542422
κγ΄.	9, 0000541	0, 9542427
	9, 0000016	0, 9542425
	8, 9999992	0, 9542424
κδ΄.	9, 0000016	0, 9542425
	9, 0000004	0, 9542424$\frac{1}{2}$.
	8, 9999992	0, 9542424
κέ.	9, 0000004	0, 9542424$\frac{1}{2}$
	8, 9999998	0, 9542424$\frac{1}{4}$
	8, 9999992	0, 9542424
κς΄.	9, 0000004	0, 9542424$\frac{1}{2}$
	9, 0000000	0, 9542424$\frac{3}{8}$
	8, 9999998	0, 9542424$\frac{1}{4}$

Προσετέθη δὲ ἐν τῇ κδ΄. πράξει καὶ ἐφεξῆς ἐπὶ τῶν λογαρίθμων τὰ κλάσματα εἰς πλείω εὐκρίνειαν· ἤρξαντο γὰρ ἐκεῖθεν ἰσάλληλοι γίνεσθαι οἱ λογάριθμοι· οὐκοῦν λογάριθμος τοῦ 9,0000000, εἴτ᾽ οὖν τὸ 9, ἐστὶν ὁ 0,9542424$\frac{3}{8}$. λαμβάνεται μέντοι ἐν τῇ χρήσει ὡς λογάριθμος τοῦ 9, εἴτε ὁ 0, 9542424, εἴτε ὁ 0, 9542425, ὅτι ἀνεπαίσθητον ὅλως τὸ διάπτωμα.

Διὰ τῆς αὐτῆς τῶν πράξεων ὁδᾶ ἴσϭιν εὑρεθήσεται ὅ,τε τᾶ 8 ϗ τᾶ 7 οἱ λογάριθμοι.

328. Εὑρόντες τέλος τὸν λογάριθμον τᾶ 9, τᾶ 8 ϗ τᾶ 7, ἀταλαιπώρως ἤδη εὑρήσομεν τὸν τᾶ 2, λαμϐάνοντες τὸ τρίτον τᾶ κατὰ τὸν 8 (318), τὸν δὲ τᾶ 4, διπλασιάζοντες τὸν τᾶ 2 (317), τὸν δὲ τᾶ 3, τὸ ἥμισυ λαμϐάνοντες τᾶ κατὰ τὸν 9 (318), τόν δὲ τᾶ 5, ἀφαιρᾶντες τᾶ κατὰ τὸν 10 ὡς διαιρετέον τὸν τᾶ 2 ὡς διαιρέτα (316)· τὸν δὲ τᾶ 6, συνάπτοντες τῷ τᾶ 2 τὸν τᾶ 3 (315.)

329. Ὡσαύτως δὲ, συνάπτοντες, ἀφαιρᾶντες, πολλαπλασιάζοντες, ῥᾷςα εὑρήσομεν τὰς τῶν ὑπὲρ τὸν 10 ἀριθμῶν λογαρίθμας ὄντων ἤτοι βαθμῶν τῶν ἐλασσόνων ἢ 11 ἀριθμῶν, ἢ γινομένων ἐν γένει ὑπὸ δύω παραγόντων, ὧν ἤδη εὕρηνται οἱ λογάριθμοι.

Ἀλλὰ γὰρ ἐπὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν 11, 13, 17, 19 κτ. ἀποτεύξεται τῶν ἐλπίδων, εἴ τις ζητήσει τὰς τάτων λογαρίθμας ὡσαύτως· μετιένων ἂν τὰς τάτων χρεὼν, καθάπερ ϗ τὸν τᾶ 9.

330. Χρῆσθαι δὲ δεῖ· ἐπὶ τῇ εὑρέσει τῶν λογαρίθμων πλείοσι δεκαδικοῖς, ἵν' ἐξῇ τὸν τῷ ἀληθεῖ μᾶλλον πελάζοντα λογάριθμον εὑρίσκειν τῶν μεταξὺ 1 ϗ 10, 10 ϗ 100 κτ. ἀριθμῶν· ἐπεὶ γὰρ συχνάκις ἀδύνατον εὑρεῖν τελείαν τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἥτις εἴη ὁ ζητάμενος μέσος ἀνάλογος, ἐπάναγκες ϗ τὸν τάτα λογάριθμον ἀτελῆ εἶναι· ἀλλὰ γὰρ διὰ τῶν δεκαδικῶν ἔγγιον γινόμεθα τῆς ἀληθᾶς ῥίζης παντὸς βαθμᾶ εἰς ἄπειρον (144)· εἰ ἂν χρησώμεθα ἑπτὰ δεκαδικοῖς, ἡ ἔλλειψις τῶν λογαρίθμων ἐςὶν ἐξ ἀνάγκης ἐλάσσων μονάδος τῆς ἐνδεξιᾷ τῶν δεκαδικῶν ἐσχάτης τάξεως, ὅ ἐςὶν ἐλάσσων ἢ $\frac{1}{10000000}$.

331. Τ8τὶ δὲ τὸ ἔλλειμμα μᾶλλον ἔτι ἀναιπαίσθητον ἔςαι, εἰ, καθάπερ ἐπὶ πολλῶν λογαριθμικῶν πινάκων, τεθῶσι 10, μᾶλλον δὲ 14 δεκαδικά.

Ἐξέςαι δὲ ȣδὲν ἧσσον εἰς κατάςρωσιν λογαριθμικȣ πίνακος, λαβεῖν ἄλλην πρόοδον, ἢ τὴν δεκαπλῆν, ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς προόδȣ $\div\!\!\div$ $\alpha^0 : \alpha^1 : \alpha^2 : \alpha^3$ κτ. ὑποτεθῇ πρὸς τὸ δοκȣ̃ν $\alpha=2$, ἡ πρόοδος $\div\!\!\div$ $\alpha^0 : \alpha^1 : \alpha^2$ κτ. γενήσεται $\div\!\!\div$ 1 : 2 : 4 : 8 κτ. αἱ δὲ δύω πρόοδοι Β, Δ (313) ἀποκατας αθήσονται $\div\!\!\div$ 1 : 2 : 4 : 8 κτ. Β,

$\div$ 0 . 1 . 2 . 3. κτ. Δ. ȣ̎τως ȣ̃ν ὁ τῆς Δ ὅρος 2 ἔςαι λογάριθμος τȣ̃ τῆς Β ὅρȣ 4· ὁ δὲ 3 ἔςαι λογάριθμος τȣ̃ 8 ϗ ἐφεξῆς ὡσαύτως· ἀλλὰ πάσης γὰρ ἄλλης ἐπίπροσθεν ἄγȣσιν οἱ Γεωμέτραι τὴν χωρȣ̃σαν κατὰ τὸ δεκαπλȣ̃ν διὰ τὴν μεγάλην εὐμάρειαν τȣ̃ τῶν δεκαδικῶν ὑπολογισμȣ̃.

Λογισμὸς τῶν ἐν ταῖς κλασματικαῖς ποσότησι λογαρίθμων.

332. Ἐὰν διαιρεθῇ α^1 διὰ α^2 πηλίκον πρόεισιν α^{-1} (55)· διδομένης ἄρα τῷ α δυνάμεως ἡστινοσȣ̃ν, μείζονος μέντοι ἢ 1, α^1 διαιρεθὲν διὰ α^2 ἀεὶ προάξει κλάσμα τῆς μονάδος ἔλαττον· ȣ̃κȣ̃ν τὸ μὲν α^{-1}, ὅ ἐςι πηλίκον τȣ̃ α^1 διαιρεθέντος διὰ α^2, ἐξεικονίζει κλάσμα τῆς μονάδος ἧττον, ὁ δὲ δείκτης $-$ 1, ὁ λογάριθμος δηλονότι τȣ́τȣ τȣ̃ πηλίκȣ, ἔςιν ἀεὶ λειπτικός.

333. Ἐν γένει δὲ τȣ̃ τῆς 1 λογαρίθμȣ ὄντος 0 (315) ὁ παντὸς κλάσματος, ἐλάττονος τῆς μονάδος, λογάριθμος ἔςαι ἐλάττων τȣ 0, τουτέςι λειπτικός· τἀνάπαλιν, δείκτης λειπτικὸς κείμενος ἐπὶ γράμματος ὑ-

ποτίθεμένε ἐμφαίνειν ἀριθμὸν, τῆς μονάδος ὑπερκείμενον, σημανεῖ πάντοτε κλάσμα τῆς μονάδος ἔλαττον (149)· ἐκεν ἐὰν ᾖ $\alpha = 10$, ἐπεὶ $\alpha^{-1} = \frac{\alpha^1}{\alpha^2} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$, $\alpha^{-2} = \frac{\alpha^1}{\alpha^3} = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$ ϗ ἑξῆς ὡσαύτως· τ' ἀνάπαλιν δὲ λογάριθμος τε μὲν $\frac{1}{10}$ ἔςαι -1, τε δὲ $\frac{1}{100}$ ἔςαι -2, κτ.

334. Παρὰ ταῦτα δὲ, ἐὰν ἐπὶ τε συνήθες τῶν λογαρίθμων συςήματος, τετέςιν, ὅ βάσις ἔςιν ἡ δεκαπλῆ πρόοδος, αὐξηθῇ ἢ ἐλαττωθῇ μιᾷ ἢ πλείοσι μονάσι τὸ χαρακτηριςικὸν τε καθ' ἕνα τινὰ ἀριθμὸν λογαρίθμε, μηδ' ὅ, τιεν τῶν δεκαδικῶν μετακινεμένων, τοσάκις διὰ 10 ὁ ἀριθμὸς πολλαπλασιαθήσεται ἢ διαιρεθήσεται, ὅσαι μονάδες ἤτοι προσεθήσονται ἢ ἀφαιρεθήσονταν *). ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, τὸ τε κατὰ τὸν 180 λογαρίθμε 2, 255273 χαρακτηριςικὸν μονάδι αὐξηθῇ, τηνικαῦτα ὁ 3, 255273 ἔςαι λογάριθμος τε 1800· τἐναντίον δὲ, ἐὰν ἀπ' αὐτε μονὰς ἀφαιρεθῇ, ὁ 1, 255273 ἔςαι λογάριθμος τοῦ 18.

335. Τέλος δὲ, δυοῖν ἀριθμῶν φυσικῶν μειζόνων τε 900, μηδενὶ ἀλλ' ἢ μονάδι, ἢ δυσὶ μονάσι διαφερόντων, κἂν αἱ διαφοραὶ αὐτῶν μὴ ὦσιν ἀνάλογοι ταῖς τῶν ἐπ' αὐτὲς λογαρίθμων, δύνανται μέντοι ἐκλαμβάνεσθαι τοιαῦται δίχα τινὸς ἀξιολόγε διαπτώματος, ὅ δὴ τοσέτῳ ἐλαττωθήσεται, ὅσῳ μείζες ἔσονται οἱ ἀριθμοί· ἐ-

*) Εἰς πλείω μέντοι κατάληψιν τῶν λεγομένων ἐπάναγκες ἔχειν ἀεὶ ὑπ' ὄψιν τὲς, περὶ ὧν εἴρηται (323) λογαριθμικὲς πίνακας.

πὶ τῶν ἀριθμῶν, φέρε, 900, 901, 902, τιθεμένων ἐξ μόνων δεκαδικῶν, ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν: ὁ 2 (διαφορὰ τȣ̃ 902 πρὸς 900) πρὸς τὴν 1 (διαφ. τȣ̃ 900 πρὸς 901) λόγον ἔχει, ὃν ὁ 964 (διαφ. τȣ̃ κατὰ τὸν 900 λογαρίθμȣ πρὸς τὸν τȣ̃ 902) πρὸς τὸν 482 (διαφ. τῶν τȣ̃ 900 ϗ 901).

Ἐκ δὲ δὴ τȣ́των ἐξαρυόμεθα τὴν τῶν ἐφεξῆς, ὧν πάνυτι χρήζομεν ἐν τῷ τῶν λογαρίθμων λογισμῷ προβλημάτων, ἐπίλυσιν.

336. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Κλάσματος Δοθέντος εὑρεῖν τὸν αὐτȣ̃ λογάριθμον.

ΛΥΣΙΣ. Ἄφελε ἀπὸ τȣ̃ κατὰ τὸν ἀριθμητὴν λογαρίθμȣ τὸν τȣ̃ παρονομαςȣ̃· ἡ ȣ̂ν διαφορὰ ἔςαι τȣ̃ κλάσματος λογάριθμος, εἴτ' ȣ̂ν τȣ̃ πηλίκȣ, ὃ παρίςησιν ἀληθῶς τὴν δύναμιν τȣ̃ κλάσματος.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶν γὰρ κλάσμα πηλίκον ἐςὶ σεσημειωμένον, πρὸς ȣ̂ τὴν τȣ̃ λογαρίθμȣ εὕρεσιν ἀφελεῖν χρὴ τὸν λογάριθμον, εἴτ' ȣ̂ν τὸ δείκτην τȣ̃ διαιρέτȣ, ἀπὸ τȣ̃ λογαρίθμȣ, εἴτ' ȣ̂ν τȣ̃ δείκτȣ τȣ̃ διαιρετέȣ (316).

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Εἰς εὕρεσιν τȣ̃ λογαρίθμȣ τȣ̃ κλάσματος $\frac{7}{9}$, ζητητέον ἐν τοῖς λογαριθμικοῖς πίναξι τὸν τȣ̃ 7 λογάριθμον, ὅς ἐςι, 0, 845098, ϗ τὸν τȣ̃ 9, ὅς ἐςι 0, 954243· ἐπεὶ δὲ ὁ τȣ̃ παρονομαςȣ̃, ὅς ἐςιν ἀφαιρετέος, μείζων ἐςὶ τȣ̃ πρώτȣ, ἀφ ȣ̂ ἔςαι ἡ ἀφαίρεσις, ἀφαιρετέον τἀνάπαλιν, εἴτ' ȣ̂ν τὸν πρῶτον ἀπὸ τȣ̃ δευτέρȣ, ϗ γραπτέον ἐν ἀποφατικῷ σημείῳ τὴν διαφοράν· ȣ̆τως ȣ̂ν λογάριθμος τȣ̃ $\frac{7}{9}$ ἐςιν ὁ — 0, 109145.

337. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν τὸν λογάριθμον ἀριθμȣ̃ ὁλοχερȣ̃ς σὺν κλασματῶδει.

ΛΥΣΙΣ. Ἀνακτέον ἐπὶ κλάσμα τὸν ὁλοχερῆ (Α'-

ριθ. 170), ᾗ ζητητέον τὸν λογάριθμον τῦ ὁλικῦ κλάσματος, ὡς ἀνωτέρῳ (336).

Ι῞ν' εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τῦ 4 + ⅔, ἀναχθέντος τοῦ 4 ἐπὶ τρίτα, ᾗ συναφθέντος τῷ ⅔, ζητητέον τὸν τῦ $\frac{14}{3}$ λογάριθμον, ἀφαιρῦντας τὸν τῦ 3 ἀπὸ τῦ κατὰ τὸν 14 λογαρίθμυ.

338. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Εὑρεῖν τὸν λογάριθμον ὁλοχερῦς ἀριθμῦ πάντων τῶν ἐν τοῖς πίναξι μείζονος.

ΛΥΣΙΣ. Ε῎ϛω ἀριθμὸς ὁ 580420. θετέον δὲ ὅτι ὁ μέγιϛος τῶν ἐν τοῖς πίναξιν ἀριθμῶν ἐϛιν ὁ 10000· ἀποκοπτέον ὖν τῦ προτεθέντος ἀριθμῦ ἐκ δεξιῶν ἱκανῦς χαρακτῆρας, ὥϛε τὸν λειπόμενον εὑρίσκεσθαι ἐν τοῖς πίναξι, δύω φέρ' εἰπεῖν χαρακτῆρας· λείπεται ὖν 5804, ὖ λογάριθμος εὑρίσκεται ἐν τοῖς πίναξι, ὁ 3, 763727· αὐξητέον δὲ τὸ χαρακτηριϛικὸν τῦδε τῦ λογαρίθμυ τοσαῖς δε μονάσιν, ὅσοι χαρακτῆρες ἀφήρηνται ἀπὸ τῦ δοθέντος ἀριθμῦ, δύω δηλονότι ἐπὶ τῦ παρόντος ὑποδείγματος· πρόεισιν ὖν 5, 763727 λογάριθμος τῦ 5804 × 100 = 580400 (334).

Ι῞να δ' ἐκ τύτυ εὑρεθῇ ὁ ἀληθὴς λογάριθμος τῦ μὲν 580400 ὐχὶ, τῦ δὲ 580420, ζητητέον ἐν τοῖς πίναξι, πόσῳ ὁ λογάριθμος τῦ 5805 ὑπέρκειται τῦ κατὰ τὸν 5804. ἅυτη ὖν ἡ ὑπεροχὴ, ἢ ἡ διαφορὰ εὑρεθήσεται σεσημειωμένη κατὰ πλευρὰν τῶνλογαρίθμων· ἔϛαι δὴ διαφορὰ μεταξὺ τῦ κατὰ τὸν 5804 ᾗ 5805 λογαρίθμων ὁ 75· ἐὰν ὖν αὐξηθῇ δυσὶ μονάσι τὸ τῦ 5805 λογαρίθμυ χαρακτηριϛικὸν 3, ἀποληφθήσεται ὁ λογάριθμος τῦ 5805 × 100 = 580500· ἑξῆς δὲ φημὶ· ἐὰν ὁ 100, διαφορὰ τῦ 580500 ὑπὲρ τὸν 580400, ἔχῃ 75 διαφορὰν τῶν λογαρίθμων αὐτῶν, πόσην παρέξεται

ὁ 20; (335)· ἐντεῦθεν ἡ ἀναλογία 100 : 75 :: 20 : χ = 15 · συναπτομένȣ ἄρα τȣ 15 τῷ 5, 763727 λογαρίθμῳ τȣ̃ 580400, πορισθήσεται ὁ ζητȣ́μενος λογάριθμος τȣ̃ 580420.

339. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Εὑρεῖν ἀριθμὸν φυσικὸν, ᾧτινι ἐπανήκει λογάριθμος μὴ ἐκπίπτων τῶν ἐν τοῖς πίναξιν ὁρίων.

ΛΥΣΙΣ. α΄. Ἐὰν ȣ̔̃τος ὁ λογάριθμος κέηται ἐν τοῖς πίναξιν, ἀπόνως εὑρεθήσεται κατ' ἀριϛερὰν αὐτȣ̃ ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς ᾧτινι ἐπανήκει. β΄. Ἐὰν ὁ δεδομένος λογάριθμος ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν ἐν τοῖς πίναξι περιεχομένων, εἰ ἔϛι μείζων μὲν τȣ̃ πρώτȣ, ἐλάττων δὲ τȣ̃ δευτέρȣ, ὡς ἔϛι, φέρ' εἰπεῖν, ὁ 3, 928961 ὅϛις ἐϛὶ μείζων μὲν τȣ̃ λογαρίθμȣ τȣ̃ 8491, ἐλάττων δὲ τȣ̃ 8492, ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς, ᾧτινι ȣ̔̃τος ἐπανήκει, καὶ ὅς ἐϛιν ὁ ζητȣ́μενος, ἔϛαι 8491 σύντινι κλάσματι.

Ἵν' ἄρα τȣτὶ τὸ κλάσμα εὑρεθῇ, φημὶ : ἐὰν 51. διαφορὰ εὑρισκομένη ἐν τοῖς πίναξι μεταξὺ τȣ̃ λογαρίθμȣ τȣ̃ 8491 καὶ τȣ̃ 8492, διδῶ 1 μεταξὺ τȣ́των τῶν δύω ἀριθμῶν διαφορὰν, πόσον παρέξεται ὁ 2, διαφορὰ μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τȣ̃ 8491 καὶ τȣ̃ 8492 μετάτινος κλάσματος; ἐκ τῆς μεθόδȣ τῶν τριῶν 51 : 1 : 2 : $\chi = \frac{2}{51}$ ἔϛαι ὁ ζητȣ́μενος ἀριθμὸς $8491 + \frac{2}{51}$.

340. Ἀλλ' ἐὰν ἀριθμὸς, ὡς ἐνταῦθα, ὁ μεταξὺ δύω προσεχῶν ἀριθμῶν κειμένων ἐν τοῖς πίναξιν, ἥττων ᾖ τȣ̃ 900, αἱ διαφοραὶ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ȣ̓κ' ἂν τȣ̃ λοιπȣ̃ ἐκληφθείησαν ὡς ἀνάλογοι ταῖς διαφοραῖς τῶν ἐν αὐτοῖς λογαρίθμων, τοσȣ́τῳ δὲ ἧττον, ὅσῳ ὁ φυσικὸς ἀριθμός ἔσεται ἐλάσσων· ὅπερ εὐχερῶς φανήσεται, εἰ ληφθῶσιν ἐπὶ τῶν πινάκων δύω φυσικοὶ ἀριθμοὶ, καὶ αἱ δια-

φοραὶ τῶν ἐν αὐτοῖς λογαρίθμων, ἐν τέτῳ ἓν ἵν' εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς, ᾧτινι ἐπανήκει ὁ δεδομένος λογάριθμος, τοῖς ἑξῆς χρηςέον.

Ἔςω γὰρ δοθεὶς λογάριθμος ὁ 1,099680, ὃς ἀπαντᾷ μεταξὺ τε κατὰ τὸν 12 ϗ τε κατὰ 13· ἐκεῖν ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς, ᾧτινι ὅτος ἐπανήκει, ἔςαι 12 σύντινι κλάσματι· ἵν' ἓν εὑρεθῇ τετὶ τὸ κλάσμα, αὔξομεν (334) τὸ χαρακτηρισικὸν τε προτεθέντος λογαρίθμε τοσαῖς δὲ μονάσιν, ὥςε μὴ ὑπερέχειν τῶν περιλαμβανομένων ἐν τοῖς ἀνὰ χεῖρας πίναξι, δύω, φέρ' εἰπεῖν, μονάσιν· ὅθεν ἔςαι 3,099680, λογάριθμος ὡς ἔγγιςα ἐπανήκων τῷ 1258· ἀποκόπτομεν δὲ εἶτα ἐκ δεξιῶν τετεὶ τε ἀριθμε δύω χαρακτῆρας ὡς δεκαδικὲς, ἐπεὶ (334) τὸ χαρακτηρισικὸν δυσὶ μονάσιν ηὐξήσαμεν· ἔςαι ἓν 12,58 ὁ ζητέμενος ἀριθμὸς πλὴν σχεδὸν $\frac{1}{100}$ (Ἀριθ. 225).

341. Ἐὰν δ' ἐπὶ τῆς τελευταίας περιπτώσεως ἡ τε λογισμε ἀκρίβεια ἀπαιτῇ ἐπὶ τῶν λογαρίθμων πλείω ἢ ἓξ δεκαδικὰ, ἐφαρμοςέον τοῖς ἐλάττοσιν ἢ 2000 τὰ ἤδη εἰρημένα ἐπὶ τῶν ὑπὲρ 900 ἀριθμῶν· δυοῖν γὰρ ἀριθμῶν οἱ λογάριθμοι, ὅσῳ πλείω περιέχεσι δεκαδικὰ, τοσέτῳ πλείω περιέξεσι ϗ αἱ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν διαφοραὶ, ϗ δὴ ἀνεπαισθητότερον αἱ τῶν λογαρίθμων ϗ τῶν ἀριθμῶν διαφοραὶ τῆς ἀναλογίας ἐκπεσενται.

342. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'. Εὑρεῖν ἀριθμὸν φυσικὸν, ᾧτινι ἐπανήκει λογάριθμος δοθεὶς, ὑπερκείμενος τῶν ἐν τοῖς πίναξι περιεχομένων.

ΛΥΣΙΣ. Δεδόσθω ὁ λογάριθμος 9,797299· ἀφαιρετέον ἓν τε κατ' αὐτὸν χαρακτηρισικε τοσαύτας μονάδας, ὥςε μὴ ὑπερέχειν τὸν λειπόμενον τῶν ἐν τοῖς ἀνὰ χεῖρας πίναξι περιεχομένων· 6 φέρ' εἰπεῖν μονάδας· γενήσεται ἓν ὁ

δοθεὶς 3, 797299, ὅς ἐστι μεταξὺ τοῦ κατὰ τὸν 6271 καὶ τοῦ κατὰ τὸν 6270· ὁ τούτου ἄρα ἀριθμὸς ἐστιν 6270 μετά τινος κλάσματος, οὗτινος εὑρεθέντος κατὰ τὸν ἄρτι δεδειγμένον τρόπον (341) ἐκπορίζεται ὁ ἀριθμὸς $6270 + \frac{21}{89}$· ἀλλὰ γὰρ διὰ τὰ ἀπὸ τοῦ ἐν ἀρχῇ δεδομένου λογαρίθμου ἀφαιρεθέντα ἓξ δεκαδικὰ, πολλαπλασιαστέον τὸν $6270 + \frac{31}{89}$ ἐπὶ 1000000 (Ἀριθ. 200)· ἔστιν ἄρα ὁ τοῦ ἐν ἀρχῇ δοθέντος λογαρίθμου ἀριθμὸς $6270000000 + \frac{31000000}{69}$, εἴτ' οὖν ἀναγωγῇ τοῦ κλάσματος ἐφ' ὁλοχερῆ $6270449275 + \frac{25}{89}$.

343. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛʹ. Λειπτικοῦ λογαρίθμου δοθέντος, εὑρεῖν τὸν οἰκεῖον αὐτοῦ ἀριθμόν.

ΛΥΣΙΣ. Ἀνάγκη πᾶσα κλάσμα εἶναι τὸν ἀριθμὸν τόνδε, τῆς μονάδος ἔλαττον (333)· ἔστω τοίνυν δοθεὶς λογάριθμος ὁ — 3, 029789· συναπτέον οὖν τῷ τούτου χαρακτηριστικῷ — 3, μονάδας τινὰς ὑπαρκτικὰς, φέρ' εἰπεῖν, 5· ἢ ὅπερ ταὐτὸ, ἀφαιρετέον τὸν 3, 029789 ἀπὸ τοῦ 5, 000000· οὐκοῦν καταλειφθήσεται 1, 970211 λογάριθμος ἀριθμοῦ, κειμένου ἐν τοῖς πίναξι μεταξὺ 93 καὶ 94. Θῶμεν οὖν ὡς ἐστιν ὁ ζητούμενος· ἐπεὶ δὲ 5 συνήψαμεν τῷ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου χαρακτηριστικῷ, ἐκ τούτου χρὴ τὸν 93 διὰ 100000 διελεῖν (334)· τὸ ἄρα κλάσμα $\frac{93}{100000}$ ἐστιν ἀριθμὸς, ὃς ἐζητεῖτο πλὴν $\frac{1}{100000}$ περίπου.

Χρῆσις τῶν Λογαρίθμων.

344. Αʹ. Δυνάμεθα δι' αὐτῶν τούστε βαθμοὺς σχηματίζειν, καὶ τὰς αὐτῶν ῥίζας ἐξάγειν.

345. Ἵν' εὕρωμεν, φέρε, τὸν ἀπὸ ἀριθμοῦ τινος τετράγωνον, διπλασιάζομεν τὸν αὐτοῦ λογάριθμον· ὁ δὲ ἀριθμὸς τοῦ διπλοῦ τούτου λογαρίθμου ἔσται ὁ ζητούμενος τε-

τράγωνος· ὕτως ἵν' εὕρωμεν τὸν ἀπὸ 139 τετράγωνον, διπλασιάζομεν τὸν αὐτῦ λογαριθμον, ὃν εὑρίσκομεν ἐν τοῖς πίναξιν ὄντα 2, 1430148· ὁ δὲ τύτυ διπλῦς 4, 2860296, ἔςαι λογάριθμος ἐν τοῖς πίναξι τῦ 19321, ὅς ἐςιν ὁ ἀπὸ 139 τετράγωνος (317).

346. Ἵν' εὕρωμεν τὸν ἀριθμῦ τινος κύϐον, τριπλασιάζομεν τὸν αὐτῦ λογάριθμον· ϗ ἐν γένει, ἵνα πάντα ἀριθμῦ παντὸς βαθμὸν θηρευσώμεθα, πολλαπλασιάζομεν τὸν τῦ ἀριθμῦ λογάριθμον ἐπὶ τὸν δείκτην (317).

Ἵνα, φέρε, τὸν τέταρτον τῦ 11 εὕρωμεν βαθμὸν, ζητῦμεν ἐν τοῖς πίναξι τὸν τῦ 11 λογάριθμον, ὅς ἐςιν 1, 0413927· τῦτον τετραπλασιάζοντες (317), εὑρίσκομεν ἐν τοῖς πίναξι τὸν 4, 1655708, λογάριθμον ὄντα ὡς ἔγγιςα τῦ 14641, ἥτις ἐςὶν ἡ τετάρτη ζητυμένη τῦ 11 δύναμις.

347. Β'. Τὐναντιον δὲ, πρὸς ῥίζης ἁπάσης ἀπὸ παντὸς ἀριθμῦ ἐξαγωγὴν, διαιρῦμεν διὰ τῦ ἐπισήμυ τὸν λογάριθμὸν τῦ προτιθεμένυ ἀριθμῦ (318), ὅ ἐςι λαμϐάνομεν τὸ ἥμισυ τῦδε τῦ λογαρίθμυ πρὸς ἐξαγωγὴν τετραγωνικῆς ῥίζης, τὸ τρίτον πρὸς ἐξαγωγὴν κυϐικῆς, ϗ ἑξῆς ὕτως.

Ἵνα φέρ' εἰπεῖν εὕρωμεν τὴν κυϐικὴν ῥίζαν τῦ 13824 λαμϐάνομεν τὸ τρίτον τῦ κατὰ τὸν δε τὸν ἀριθμὸν ἐν τοῖς κανονίοις κειμένυ λόγαρίθμυ 4, 1406336, εἶτ' ὖν τὸν 1, 3802112, ὃς εὑρίσκεται ἐν τοῖς κανονίοις λογάριθμος τῦ 24, ἥτις ἐςὶν ἡ ζητυμένη κυϐικὴ ῥίζα (118).

348. Γ'. Διὰ τῶν λογαρίθμων, τὸν μὲν πολλαπλασμὸν εἰς πρόσθεσιν, τὴν δὲ διαίρεσιν εἰς ἀφαίρεσιν τρέψαι δυνάμεθα κατὰ τάδε.

Κείσθω γὰρ πολλαπλασιάσαι τὸν 320 ἐπὶ 27.

λαμβάνοντες ȣ̃ν ἐκ τῶν κανονίων τȣ̀ς τῶν δύω ἀριθμῶν λογαρίθμȣς, εἴτ᾽ ȣ̃ν τὸν 2,5051499 ϗ 1,4313638, ϗ συνάπτοντες αὐτȣ̀ς, εὑρίσκομεν ἐν τοῖς κανονίοις τὸ τȣ́των ἄθροισμα 3,9365137 λογάριθμον ὄντα τȣ̃ 8640, ὃς ἐςὶ τὸ γινόμενον, ὃ ἐζητεῖτο (315).

349. Ἵνα δὲ διέλωμεν 4500 διὰ 18, ἀφαιρȣ̃μεν τὸν τȣ̃ διαιρέτȣ 18 λογάριθμον ἀπὸ τȣ̃ κατὰ τὸν 4500 διαιρετέον· ἡ ȣ̃ν διαφορὰ 2,3979400 εὑρίσκεται ἐν τοῖς πίναξι λογάριθμος τȣ̃ 250, ὅς ἐςι τὸ ζητȣ́μενον πηλίκον.

350. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἰςέον μέντοι ὡς αἱ διὰ τῶν λογαρίθμων ἄυται ἀποτελȣ́μεναι πράξεις ȣ̓κ εἰσὶν ἀεὶ ἀκριβῶς ἀσφαλεῖς, διὰ τὰ ὁποιαȣ̃ν περεμπίπτοντα τοῖς λογαρίθμοις ἄφευκτα διαπτώματα (330).

351. Δ΄. Ἐντεῦθεν ἄρα δυνάμεθα διὰ τῶν λογαρίθμων μετατρέψαι ἅπασαν γεωμετρικὴν τῶν τριῶν μέθοδον, εἰς ἀριθμητικὴν, ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν εἰσάγοντες τȣ̀ς αὐτῶν λογαρίθμȣς· ϗ συνάψει μὲν ἀντὶ πολλαπλασιασμȣ̃, ἀφαιρέσει δέ ἀντὶ διαιρέσεως χρώμενοι (207).

Δἰ ἑνὸς ὑποδείγματος τὸ πᾶν διαλευκανθήσεται· κείσθω γὰρ ἐκτελέσαι τὴν γεωμετρικὴν τῶν τριῶν μέθοδον 250 : 1000 :: 19 : χ· ἀντὶ ȣ̃ν τῶν 250, ϗ 1000 ϗ 19 ἀντικαταςαθήτωσαν οἱ κατ᾽ αὐτȣ̀ς λογάριθμοι, ϗ ȣ̃τω γενέσθω ἡ ἀριθμητικὴ τῶν τριῶν μέθοδος 2,3979400· 3,0000000· 1,2787536· χ (207)· συνάψει τοίνυν τῶν μέσων, γινεται 4,2787536, ȣ̃ ἀφαιρέσει τοῦ γνωςȣ̃ ἄκρȣ εὑρίσκεται διαφορὰ 1,8808136 λογάριθμος, ȣ̃ ἀριθμὸς εὑρίσκεται ἐπὶ τῶν κανονίων ὁ 76, ἄκρος ὃς ἐζητεῖτο ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς ἀναλογίας 250 : 1000 :: 19 : χ = 76 (240).

352. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Φανήσεται ἐν τῇ Τριγωνο-

μετρίᾳ, ὡς αὕτη ἡ τῆς γεωμετρικῆς ἐπὶ τὴν ἀριθμητικὴν μέθοδον τῶν τριῶν μεταβολὴ ὐκ ὀλίγον ἐπιτέμνει τὰς πράξεις.

353. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ὅταν μὴ μεγάλης ἀκριβείας δεώμεθα, τῶν ἐν 8 δεκαδικοῖς λογαρίθμων παραλιμπάνειν δυνάμεθα τὰ δύω ἐν δεξιοῖς ἔσχατα· μελήσει δὲ μόνον, ἐὰν οἱ δύω ἔσχατοι ὅροι ὑπερέχωσι τῦ 50, αὔξειν μονάδι τὸ ἐν δεξιοῖς πρῶτον τῶν περιλειπομένων δεκαδικῶν.

Ὡς δ᾽ αὔτως ἐν γένει, ὅταν ἡ τῦ ἐσχάτυ δεκαδικῦ διαίρεσις καταλοίπυ ἄτερ μὴ ἐκτελῆται, τὸ δὲ κατάλοιπον μεῖζον ᾖ τῦ ἡμίσεως διαιρέτυ, αὐξητέον τὸ πηλίκον μονάδι.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐπὶ τῦ λογαρίθμυ 2,70251380, ἐὰν ἀποβαλεῖν βυλώμεθα τὰ δύω ἔσχατα δεκαδικὰ 80, γράφειν εἰκὸς 4 ἀντὶ τῦ 3 ἐσχάτυ ὅρυ· ὅθεν ἔςαι 2,702514· ὁ γὰρ 80 πρὸς τὸν 3 ἀναφερόμενος ἰσοδυναμεῖ τῷ $\frac{80}{100}$ (Ἀριθ. 231) ὐκῦν ἐὰν μὲν τεθῇ 4 ἀντὶ 3, ὁ ἀριθμὸς 4 ἔςαι μείζων τῦ ζητυμένυ τῷ $\frac{20}{100}$· ἐὰν δὲ μείνῃ ὁ 3, ἔςαι ἐλάττων τῦ δικαίυ τῷ $\frac{80}{100}$· ἐλάσσων ἄρα ἔςαι ἡ ἀπάτη ἐὰν γράψωμεν 4 ἀντὶ 3, ἀποῤῥίψαντες τὸν 80· ἀλλ᾽ ἐὰν γὰρ τὰ δύω ἔσχατα δεκαδικὰ ὦσι 50, ὡς ἐπὶ τῦ 2,70251350, ἀδιάφορον ἔςαι ἀποῤῥίψαντας τὸ 50 εἴτε ἐάσαι 3, ὃς ἔςαι ἐλάσσων τῦ δικαίυ τῷ $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, ἢ θεῖναι 4, ὃς ἔςαι μείζων τῷ αὐτῷ $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Ἵνα δὲ λάβωμεν τὸ πέμπτον τῦ 4,02315709, γράφομεν 0,80463142· ἐὰν μὲν γὰρ ληφθῇ 2 ὡς πέμπτον τῦ 9, ὁ 2 ἔςαι μείζων τῷ $\frac{1}{5}$· ἐὰν δὲ ληφθῇ 1, ἔςαι ἔλαττον τῦ δικαίυ τῷ $\frac{4}{5}$.

354. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ΄. Ἐν τῷ ἐφεξῆς Κεφαλαίῳ

φανήσεται πλείων τις ἡ χρῆσις, ϗ περιςατικωτέρα δὲ, ἡ τῶν λογαρίθμων.

Μέθοδος γενικὴ τȣ̃ ἐξάγειν ὡντινωνδήποτε ποσοτήτων ῥίζας ὑπερτέρας τȣ̃ τρίτȣ βαθμȣ̃.

355. Ἅπας βαθμὸς, ȣ̃ ἂν ὁ δείκτης τȣ̃ 2 πολλαπλάσιος εἴη, θεωρεῖσθαι ἔχει ὡς τετράγωνον· ȣ̃τως α^4 θεωρηθείη ἂν ὡς τετράγωνον ἀπὸ ῥίζης α^2. εἴγε $\alpha^2 \times \alpha^2 = \alpha^4$· ὡσαύτως δὲ α^6 θεωρηθείη ἂν ὡς τὸ ἀπὸ α^3 τετράγωνον, ϗ α^8 ὡς τὸ ἀπὸ α^4 κτ. ȣ̓κ ἄλλως δὲ ἐκλαβεῖν ὡς κύβον δυνάμεθα πᾶντα βαθμὸν, ȣ̃ ἂν ὁ δείκτης εἴη τȣ̃ 3 πολλαπλοῦς· α^3 γὰρ ἔςιν ὁ τοῦ α κύβος, α^6 δὲ ὁ τȣ̃ α^2, α^9 ὁ τȣ̃ α^3 κτ. ἐξέςαι ἄρα διὰ τῆς ἐν ἔθει θεωρίας τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ἢ κυβικῆς ῥίζης, ά. εὑρεῖν ἀπόνως τὴν παντὸς βαθμȣ̃ ῥίζαν, διαιρȣ̃ντας ἅπαξ ἢ πλεονάκις τὸν δείκτην διὰ 2, ἢ διὰ 3, ἕς τ' ἂν γένηται = 1· β'. ἀναγαγεῖν εἰς κατωτέρας δυνάμεις τὰς, ὧν ὁ δείκτης διαιρέσιμος ᾖ διὰ 2, ἢ 3, κἂν μὴ διὰ τῆς διαιρέσεως ταύτης γένηται = 1.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἔςω ἐξαγαγεῖν τὴν τετάρτην ῥίζαν τȣ̃ 390625· ἐξάγομεν ȣ̃ν τȣ́τȣ πρῶτον τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν = 625, εἶτα τάυτης τῆς καινῆς ῥίζης τὴν ῥίζαν αὖθις τὴν τετραγώνειον = 15· ὡσάυτως ἐπὶ $\sqrt[12]{244140625}$, ἐξάγομεν πρῶτον τὴν κυβικὴν ῥίζαν 625· β'. $\sqrt[2]{625}=25$. γ'. $\sqrt[2]{25}=5$, ἡ δωδεκάτη ζητȣμένη ῥίζα· ἐπὶ δὲ $\sqrt[14]{100000000000000}$, λαμβάνομεν $\sqrt[2]{100000000000000} = 10000000$ ἑβδόμην ῥίζαν τȣ̃ προτεθέντος ἀριθμȣ̃.

356. Ἀλλὰ γὰρ ἡ μέθοδος αὕτη, ὥσπερ ῥάςη τὴν πρᾶξιν, ἔνθ' ἂν ἐξῇ χώραν ἔχειν, ὅτω καὶ θαυμάσιος· ἀχρηςεῖ μέντοι ά. ἐπὶ τῶν βαθμῶν, ὧν ὁ δείκτης μήτε τοῦ 2, μήτε τοῦ 3 πολλαπλάσιος εἴη, οἷοί εἰσιν οἱ πέμπτοι, ἕβδομοι κτ. βαθμοὶ· β'. καὶ ἐφ' ὧν ὁ δείκτης τῇ διὰ 2 ἢ 3 διαιρέσει ὁ γίνεται = 1, ὡς ἐπὶ τῆς ιδ'. δυνάμεως.

357. Ἡ μὲν οὖν ἐξαγωγὴ τῶν ῥιζῶν παντὸς συμβολικοῦ βαθμοῦ ἀτεχνῶς εὐμαρεςάτη πέφυκεν· ὑποτυπώσαντες γὰρ πρὸ ὀφθαλμῶν τὴν σειρὰν πάντων τῶν ὅρων, ὧν ἔχειν ὀφείλει ὁ προκείμενος βαθμὸς, δυωνύμȣ (106) τριωνύμȣ κτ ῥίζης (117), ἀταλαιπώρως ἕκαςον ῥιζικὸν ὅρον εὑρήσομεν.

358. Ἐπὶ δὲ τῶν ἀριθμητικῶν ποσοτήτων τὸν αὐτὸν χεδιάσαντες συμβολικὸν τύπον, ὃς ἐμφαίνει πάντας τȣς ὅρȣς, τȣς ἐμπεριειλημμένȣς τῷ προκειμένῳ ἀπὸ δυωνύμȣ ῥίζης βαθμῷ (113) καὶ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διαςείλαντες εἰς κόμματα, ὧν ἕκαςον ἐκ δεξιῶν ἀρχῆς γινομένης, περιέχει τόσȣς χαρακτῆρας, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ ἐπίσημον τῆς ἐξαγομένης ῥίζης, ζητȣ͂μεν τὴν μεγίςην ῥίζαν τοῦ πρώτȣ ἐν ἀριςεροῖς κόμματος, καὶ τὸν αὐτῆς ἀφαιρȣ͂μεν βαθμὸν, καὶ τἄλλα πάντα διεκπεραίνομεν τοῖς ἤδη ὑποτυπωθεῖσι (133, 140) τὰς πράξεις ἀναλόγως ἐπαναλαμβάνοντες, ἢ καὶ διὰ τοῦ δυωνύμȣ τύπȣ ἐπὶ δύναμιν κλασματικὴν αἱρομένȣ (153).

359. Ἀλλὰ γὰρ ἐκ ἄντις εἴποι ὅσῳ ῥάδιον πᾶσα ῥίζα διὰ τῶν λογαρίθμων ἐξάγεται· κἂν (τῶν βαθμῶν δήπȣ ἀτελῶν ὄντων) ἀγαπήσαιμεν μόνῃ τῇ ὁλοχερεῖ ῥίζῃ· αὐτίκα γὰρ τὴν ἀτελῆ κυβικὴν ῥίζαν τȣ͂ 9285 εὑρίσκομεν, λαμβάνοντες τȣ͂ κατ' αὐτὸν λογαρίθμου τὸ τρίτον = 1, 322594, ὅς ἐςιν ὅτι ἔγγιςα λογάριθμος τοῦ 21 τῆς ζητȣμένης ἐν ὁλοχερέσιν ἀτελοῦς ῥίζης· κἂν προσεπιζητήσαιμεν καὶ δεκαδικάτινα, καὶ τηνικάδε ἡ ῥίζα ὡς ὁλοχερὴς

ἔσεται μικρός τις ἀριθμὸς· ἵνα φέρε ἐξαγάγωμεν τὴν ἑβδόμην ῥίζαν τȣ͂ 8086, τὸ ἕβδομον τȣ͂ κατ᾽ αὐτὸν λογαρίθμȣ ἐςὶν = 0,558248, ᾧτινι τιθέντες χαρακτηριςικὸν τὸν 3, ἀπολαμβάνομεν καινὸν λογάριθμον 3,558248, ἐπανήκοντα ὡς ἔγγιςα τῷ 3616, = 3,616 (334) ῥίζῃ ἐγγίςῃ τȣ͂ 8 086· ἀλλ᾽ εἴπερ βȣλομένοις ᾖ προθεῖναι τῇ ῥίζῃ δεκαδικὰ τοσάδε, ὥςτε ὑπερβαίνειν τῶν ἐν τοῖς πίναξιν ἀπαντώντων ἀριθμῶν, ἐπὶ τȣ͂το τῷ ἐφεξῆς χρησόμεθα τρόπῳ.

360. Ἔςω ἐξαγαγεῖν τὴν πέμπτην ῥίζαν τȣ͂ 9970, ȣ͂ λογάριθμος = 3,998695, ȣ͂ τὸ πέμπτον = 0,799739· τεθήτω ȣ͂ν χαρακτηριςικὸν ὁ 3· καὶ εὑρεθήσεται διὰ προσεγγίσεως 6305, ταὐτὸν εἰπεῖν 6,305 (334) ȣ͂ ὁ ἐν τοῖς κανονίοις λογάριθμος = 0,799685 ἐλάττων ἐςὶ τȣ͂ 0,799 739 λογαρίθμȣ, ἐξ ἓξ συγκειμένȣ δεκαδικῶν, καὶ δὴ ἐγγύτερος ἢ ἐκεῖνος τῆς ἀληθȣ͂ς ῥίζης τῇ διαφορᾷ 54.

Ἐπὶ τȣ́τοις τὰ 6305 καὶ 6306 ἐχόντων 69 διαφορὰν τῶν καθ᾽ ἑαυτȣ̀ς λογαρίθμων (ὡς ἰδεῖν ἔνεςιν ἐν τοῖς κανονίοις) 6,3050, καὶ 6,3060 ἕξȣσιν ὡσαύτως 69 διαφορὰν τῶν καθ᾽ ἑαυτοὺς λογαρίθμων· καὶ γὰρ ὁ μὲν τοῦ 6305 λογάριθμος ἔσεται ὁ 3,799685, ὁ δὲ τȣ͂ 63050 ἔςαι ὁ 4,799685· ἀλλὰ διὰ τὰ τρία δεκαδικὰ τὰ ἐν τῷ ἀριθμῷ 6,305, καὶ διὰ τὰ ἐν τῷ 6,3050 τέσσαρα, ἀποκοπτέον τȣ̀ς χαρακτηριςικȣ̀ς 3 καὶ 4· καὶ δὴ ἔσονται ἰσάλληλοι ȣ͂τοι οἱ λογάριθμοι· ταυτὸν δὲ κρατεῖ κἀπὶ τȣ͂ λογαρίθμȣ τȣ͂ 6,306 καὶ τȣ͂ 6,3060· ȣ̔́τως 6,3050 καὶ 6,3060 ἔχȣσι τὴν αὐτὴν τῶν λογαρίθμων διαφορὰν = 69, ἣν ἔχȣσι καὶ οἱ τῶν 63050, καὶ 63060.

Ἐκ δὲ δὴ τȣ́των βασανίζομεν τὸ πρῶτον ζητȣ́μενον δεκαδικὸν 9 διὰ τῆς ἑξῆς τῶν τριῶν μεθόδȣ: 10 : 69 : : 9 : χ, ὅπερ ἐςὶν ἡ μεταξὺ τῶν 63050, 63060 ἀριθμῶν δια-

φορὰ 10, πρὸς τὴν τῶν κατ' αὐτὰς λογαρίθμων διαφορὰν 69, ὡς τὸ βασανιζόμενον δεκαδικὸν 9, πρὸς χ, ἥτις ἐςὶν ἡ ζητȣμένη μεταξὺ τȣ̃ κατὰ τὸν 63050 λογαρίθμȣ, ϗ τȣ̃ κατὰ τὸν 63060 σὺν ζητȣμένῳ τινὶ δεκαδικῷ διαφορά· ἔ-ςιν ἄρα χ = 62 $\frac{1}{10}$.

Ἀλλὰ πᾶσα δύναμις τȣ̃ χ ὑπερέχȣσα τόν 54, ὅς ἐ-ςιν ὑπεροχὴ τȣ̃ λογαρίθμȣ τῆς ἀληθȣ̃ς ῥίζης ὑπὲρ τὸν λο-γάριθμον τȣ̃ 6,305, ἔςαι λίαν μεγάλη· ϗ γὰρ συναφθείσης τῷ τȣ̃ 6,305 λογαρίθμῳ, γενήσεται λογάριθμος ἀριθμȣ̃ τὴν ἀληθῆ ὑπερβαίνοντος ῥίζαν· ȣ̓κȣ̃ν βασανιθήτω ὁ 8· 10 : 69 :: 8 : χ = 55 $\frac{2}{10}$· βασανιθήτω εἶτα ὁ 7· 10 : 69 :: 7 : χ = 48 $\frac{3}{10}$, ἧςτινος μὴ ὑπερκειμένης τȣ̃ 54, ἔςαι ὁ 7 τὸ πρῶτον ζητȣ́μενον δεκαδικόν· ὑπὲρ δὲ τȣ̃ δευτέρȣ, βασα-νιθήτω αὖθις νέος 9 (*) 100 : 69 :: 79 : χ = 45 $\frac{51}{100}$, ἧς ὑπερεχȣ́σης τὸν 54, ἐξητάθω ὁ 8· 100 : 69 :: 78 : χ = 53 $\frac{80}{100}$· 8 ἄρα ἔςαι τὸ δέυτερον δεκαδικόν· ὑπὲρ δὲ τȣ̃ τρίτȣ γενέσθω ὡσαύτως, 1000 : 69 :: 789 : χ = 54 $\frac{441}{1000}$, βασάνων δὲ ἑξῆς γινομένων, μόνος ὁ 2 ευρίσκεται καλῶς ἔχων· ȣ̓κȣ̃ν ἡ μᾶλλον τῆς ἀληθȣ̃ς ἐγγὺς γινομένη πέμπτη ῥίζα τȣ̃ 9970, ἐκτιθεμένη διὰ χαρακτήρων ἑπτὰ, ἔςιν 6,305782· ὃ δὴ πρόδηλον· ϗ γὰρ ὁ ζητȣ́μενος λογάριθμος τȣ̃ προτεθέντος ἤδη ἀριθμȣ̃ ἔςιν = 0,799738 $\frac{958}{1000}$ (337), ἐλάσσων τȣ̃ λογαρίθμȣ 0,799739 τῆς ζητȣμένης ῥίζης·

(*) Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν, δι' ἧς βασανίζεται ἕκαςον γραφησόμενον δεκαδικὸν, ἔξει πρῶτον μὲν ὅρον τὴν 1 σὺν το-σȣ́τοις 0, ὅσα εἰσὶ τὰ προσεθειμένα τῷ δοθέντι ἀριθμῷ 6305 δεκαδικὰ σὺν τῷ βασανιζομένῳ· δεύτερον δὲ ὅρον τὴν δοθεῖσαν διαφορὰν τῶν λογαρίθμων· τρίτον δὲ τὰ προςιθέμε-να δεκαδικὰ σὺν τῷ βασανιζομένῳ.

ἐὰν δ' ἕτος αὐξηθῇ μονάδι ἐν τῇ ἐχάτῃ τάξει τῶν δεκαδικῶν = 6,305783, ὁ αὐτῦ εὑρεθεὶς (337) λογάριθμος = 0,799739 $\frac{27}{1000}$ ὑπερέξει τὸν τῆς ζητυμένης ῥίζης λογάριθμον.

Ἵν' ἄρα γνωθῇ εἰ μήτις ἀπάτη παρενέπεσε τὰ δεκαδικὰ τιθεμένοις, ἀρκεῖ σκοπεῖν, εἰ ὁ τῦ ὁλικῦ ἀριθμῦ εὑρεθεὶς λογάριθμος μὴ εἴη ἐλάσσων τῦ πεμπτημορίυ (ἐπὶ τῦ ἐν χερσὶν ἀμέλει ὑποδείγματος) τῦ λογαρίθμυ τῦ προϐληθέντος βαθμῦ, καὶ εἰ τῦ ἀριθμῦ τῦδε αὐξηθέντος μονάδι, ὁ κατ' αὐτὸν λογάριθμος μὴ εἴη μείζων τῦδε τῦ πεμπτημορίυ.

361. Βυλομένοις δὲ ἐξαγαγεῖν ῥίζαν ἀριθμῦ μείζονος τῶν ἐν τοῖς κανονίοις, τὴν κυϐικὴν, φέρ' εἰπεῖν, τῦ 89700 950, ζητητέον τὸ πρῶτον τὸν αὐτῦ λογάριθμον (338), = 7,952796 $\frac{655}{10000}$, ῦ τριτημόριον ὅτι ἔγγιςα = 2,650 932 $\frac{22}{100}$ (*)· αὐξυμένυ δὲ ἑξῆς μονάδι τῦ κατὰ τόδε τὸ τρίτον χαρακτηριςικῦ, ἔςαι 3,65 κτ. λογάριθμος χεδόντι τοῦ 4476· ἀποκοπέντος δ' ἐκ δεξιῶν τῦδε τοῦ ἀριθμοῦ ἑνὸς δεκαδικοῦ, διὰ τὴν τῷ χαρακτηριςικῷ προςεθεῖσαν μονάδα, ἀποτελεῖται 447,6· τέλος δὲ ληφθήσεται ὁ τοῦδε τοῦ καινοῦ ἀριθμοῦ λογάριθμος = 2,650890, ἐλάττων τοῦ τῆς ῥίζης ἀληθοῦς λογαρίθμου 2,650932 $\frac{22}{100}$ τῇ διαφορᾷ 42 $\frac{22}{100}$. Τῆς δὲ τῶν μεταξὺ 44760, καὶ 44770 λογαρίθμων διαφορᾶς οὔσης 97, γένοιτ' ἂν ἐνταῦθα 10 : 97 :: 9 : χ (360)· ἐπαναληφθείη δὲ τὰ τῆς πράξεως, ὥς περ ἐπὶ τοῦ πρώτου ὑποδείγματος, ὀλιγωρουμένης ἀεὶ τῆς τοῦ χ δυνάμεως τῆς ὑπερκειμένης τοῦ 42 $\frac{22}{100}$.

(*) Διαιρῶ τὸν τῦ $\frac{66}{100}$ ἀριθμητὴν, ἵνα γένηται καὶ τὸ τρίτον τῦ κλάσματος δεκαδικὸν (Ἀριθ. 222).

362. Ἐν δὲ τοῖς καθόλȢ ὑπολογισμοῖς, ὅπως ἂν εἴη χρησέον τοῖς λογαρίθμοις, ἴδωμεν διὰ βραχέων· αὐτίκα ȣ̃ν ἡ λέξις λογάριθμος τῷ λ σημαίνεται προτιθεμένῳ τῆς ποσότητος, ἧς ἔσι λογάριθμος· οἷον λα τὸν τȣ̃ α ἐμφαίνει λογάριθμον· λχ, τὸν τȣ̃ χ, κτ. ἐπεὶ δὲ οἱ λογάριθμοι δεῖκται εἰσι βαθμῶν (313), τοῖς τῶν δεικτῶν ἰδιώμασι τὸν νȣ̃ν προσέχοντες ὑποσυνάψομεν τὰ ἑφεξῆς· ἐὰν τοίνυν παραγόμενον ζητῆται ἐκ πολλῶν ποσοτήτων, ἐκδηλωθῆναι δύναται διὰ τῆς τῶν λογαρίθμων προσθέσεως· ȣ̃τως οὖν αβγ ἐκδηλωθῆναι δύναται διὰ $\lambda\alpha + \lambda\beta + \lambda\gamma$, ϗ 3γδ λογαριθμικῶς ἂν παρασαίη διὰ $\lambda 3 + \lambda\gamma + \lambda\delta$· τῆς δὲ πολυωνύμȣ ποσότητος $\nu\mu + \alpha - \chi$ δηλωθήσεται ȣ̃τω $\lambda\,(\nu\mu + \alpha - \chi)$, ἧπȣ δῆλον· ἡ δὲ διαίρεσις τῶν ποσοτήτων λογαριθμικῶς δὶ ἀφαιρέσεως παρίσαται· οἷον τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ παρασαθῆναι λογαριθμικῶς δύναται $\lambda\alpha - \lambda\beta$ (55)· ἡ δὲ ποσότης $\frac{\alpha\mu}{\varrho}$ παρασαθῆναι δύναται ȣ̃τω $\lambda\alpha + \lambda\mu - \lambda\varrho$· τὸ δὲ $\frac{\gamma\delta}{\nu\varrho}$ ȣ̃τω $(\lambda\gamma + \lambda\delta) - (\lambda\nu + \lambda\varrho)$· τȣτέσι τȣ̀ς λογαρίθμȣς τῶν ποιητῶν τȣ̃ διαιρέτȣ συνάπτοντες, ἀφαιρȣ̃μεν ἀπὸ τȣ̃ ἀθροίσματος τῶν κατὰ τȣ̀ς ποιητὰς τȣ̃ διαιρετέȣ λογαρίθμων· τὸ δὲ $\frac{\beta\zeta - \mu\varrho}{2\nu}$ ȣ̃τω $\lambda\,(\beta\zeta - \mu\varrho) - (\lambda 2 + \lambda\nu)$.

363. Ἐπειδὴ ποσότητες εἰς βαθμοὺς ἐξαίρονται, πολλαπλασιαζομένων τῶν τῶν ποσοτήτων δεικτῶν ἐπὶ τὸν τῶν βαθμῶν δείκτην (82)· ἐὰν α ὑψωτέον προκέηται ἐπὶ τὸν δεύτερον βαθμὸν λογαριθμικῶς, δηλωθήσεται διὰ τȣ̃ τύπȣ $2\lambda\alpha$· τὸν δὲ χ^3 δηλώσει ὁ τύπος $3\lambda\chi$· τὸν

δὲ χ^ν ὁ νλχ· τὸν δὲ $\alpha^{\nu-2}$ ὁ νλα — 2λα· ἔςι γὰρ $\alpha^{\nu-2}=\frac{\alpha^\nu}{\alpha^2}$ (163)· τὸ δὲ $\frac{\alpha^\nu}{\alpha^2}$ λογαριθμικῶς ἂν παραςαίη λνα — 2λα (362)· ἐκ δὲ τέτων ϗ ἕτερά τινα σχήματα κατανοῆσαι δυνάμεθα· οἷον τὴν $\alpha^{\nu-\mu}\chi\omega$ λογαριθμικῶς παρίςησιν ἡ νλα — μλα + λχ + λω· τὴν δὲ $\alpha^\nu \chi^{3-\nu}\mu$ ἡ νλα + 3λχ — νλχ + λμ· τὴν δὲ $\alpha^\nu \mu^{-3}$ ἡ νλα — 3λμ· ἔςι γὰρ $\alpha^\nu \mu^{-3}=\frac{\alpha^\nu 1}{\mu^3}=\frac{\alpha^\nu}{\mu^3}$ (149)· τὴν $\chi^{\frac{3}{4}}$ λογαριθμικῶς ἐμφαίνει ἡ $\frac{3}{4}\lambda\chi=\frac{3\lambda\chi}{4}$, ὃ ἐςι πολλαπλασιαςέον τὸν τῦ χ λογάριθμον ἐπὶ 3, τὸν δὲ παραγόμενον διαιρετέον διὰ 4, ϗ τῦ προκύπτοντος λογαρίθμυ ζητητέον τὸν ἀριθμὸν, ὁριθείσης δήπυ πρότερον τῆς δυνάμεως τῦ χ· ἔςω γὰρ χ = 36· ὁκῦν $\chi^{\frac{3}{4}}=36^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{36^3}$ (219)· ϗ λογαριθμικῶς $\frac{3\lambda.36}{4}$· ἐπεὶ δὲ ἐκ τῶν κανονίων ἔςι λ36 = 1,5563025, ὃς πολλαπλασιαθεὶς μὲν ἐπὶ 3 ποιεῖ 4,6689075, διαιρεθεὶς δὲ διὰ 4, δίδωσι πηλίκον 1,1672268, ᾧτινι ἀντιςοιχεῖ ἐν τοῖς κανονίοις ἀριθμὸς 14,7· ἄρα $36^{\frac{3}{4}}$, ἢ $\sqrt[4]{36^3}$ = 14, 7 ὡσαύτως ὁ τύπος $\frac{\chi^\nu}{\mu}$ λογαριθμικῶς ἂν ἐκτεθείη $\frac{\nu\lambda\chi}{\mu}$, ϗ $(\nu\mu+\rho\chi)^{\frac{3}{4}}$ ἐκτεθείη $\frac{3}{4}$ λ (νμ + ρχ) κτ.

364. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Γεωμετρικῆς προόδυ δοθέντος τῦ πρώτυ ὅρυ α, ϗ τῦ ἐσχάτυ ω, ϗ τῦ πηλίκυ μ, εὑρεῖν λογαριθμικῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων χ

ΛΥΣΙΣ. Ἔςιν $\omega=\alpha\mu^{\chi-1}$ (262)· ὃ λογαριθμικῶς ἂν ἐκτεθείη (362) λω = λα + χλμ — λμ

$$\frac{+\lambda\mu \qquad +\lambda\mu}{}$$

$$\lambda\omega + \lambda\mu = \lambda\alpha + \chi\lambda\mu \quad (\text{Ἀριθ. } 13)$$
$$-\lambda\alpha \qquad -\lambda\alpha$$

$$\lambda\omega + \lambda\mu - \lambda\alpha = \chi\lambda\mu \quad (\text{Ἀριθ. } 14)$$

διαιρέσει διὰ λμ

$$\frac{\lambda\omega + \lambda\mu - \lambda\alpha}{\lambda\mu} = \frac{\chi\lambda\mu}{\lambda\mu} \quad (219)$$

εἶτ᾽ ȣ̃ν $\frac{\lambda\omega + \lambda\mu - \lambda\alpha}{\lambda\mu} = \chi$

τȣ̃τ᾽ ἔςι $\frac{(\lambda\omega - \lambda\alpha)}{\lambda\mu} + \frac{\lambda\mu}{\lambda\mu} = \chi$, ταυτὸν εἰπεῖν

$\frac{(\lambda\omega - \lambda\alpha)}{\lambda\mu} + 1 = \chi$· τύπος λογαριθμικὸς τȣ̃ ζητȣμένȣ ἀριθμȣ̃ τῶν ὅρων χ. ἔςω ȣ̃ν α = 2, ϗ ω = 1458, ϗ μ = 3· ἔςαι ȣ̃ν κατὰ τὸν ἤδη ἐξενεχθέντα τύπον $\chi = \frac{(\lambda.\,1458 - \lambda 2)}{\lambda 3} + 1$· ἔςι δὲ ἐκ τῶν λογαριθμικῶν κανονιων

λ. 1458 = 3,1637575

ὁ δὲ ἀφαιρεθησόμενος λ. 2 = 0,3010300

2,8627275

ἔςι δὲ λ. 3 = 0,4771212· διῃρήσθω τοίνυν 2,8627275 δὰ 0,4771212

28627275 | 6

4771212

πηλίκον ȣ̃ν πρόεισιν 6, ἀλογομένȣ τȣ̃ λειψάνȣ 5· ȣ̓ γὰρ ἂν ἐπ ἀκριβὲς εὑρεθείη πηλίκον ἐν τοῖς λογαρίθμοις. ȣ̓κȣ̃ν 6 + 1 = χ = τῷ ζητȣμένῳ τῶν ὅρων ἀριθμῷ· ȣ̓κȣ̃ν οἱ μὲν ὅροι τῆς προόδȣ εἰσὶν 7· ἡ δὲ πρόοδος χωρήσει ȣ̈τω ∺ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458· ἐκ τȣ́τȣ δὴ

τȣ̃ προβλήματος, ᾧ ὅμοια, εἴπῃ παρείκοι, συςησειέτις, ὅσ᾽ ἂν βȣ́ληται, ἡλίκη ἡ τῶν λογαριθμικῶν τύπων χρῆσις, κατάδηλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ μεγεθῶν συμμέτρων ϗ ἀσυμμέτρων.

365. Πᾶσα μὲν ποσότης δυναμένη δι᾽ ἀριθμȣ̃ εἴτε ὁλοσχερȣ̃ς, εἴτε κλασματώδȣς παρίςασθαι, λογικὴ ποσότης καλεῖται, οἷον 4 ὀργιαὶ, $\frac{2}{3}$ ὀργιᾶς· τȣ̓ναντίον δὲ ἡ διὰ μηδενὸς ἀριθμȣ̃ ἐκτιθεμένη, ἄλογος, ἢ ἄῤῥητος ὀνομάζεται· τοιαῦται εἰσὶν, ὡς δειχθήσεται, αἱ ῥίζαι πάντων τῶν ἀριθμῶν 2, 3 κτ, οἵτινες ȣ̓κ εἰσὶ βαθμοὶ ἐντελεῖς ἀφ᾽ ὁλοσχερȣ̃ς ἀριθμȣ̃.

366. Δύω μεγέθη πρὸς ἄλληλα παραβαλλόμενα, σύμμετρα μὲν ἀλλήλοις λέγονται, ἢ ἐν λόγῳ, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, ὅταν ὁ λόγος αὐτῶν ἢ τὸ πηλίκον ἀκριβῶς ἐκτίθεσθαι ἔχῃ δι᾽ ἀριθμȣ̃ ὁλοσχερȣ̃ς, ἢ κλασματώδȣς· τȣ̓ναντίον δὲ, ἀσύμμετρα, ἢ ἐν λόγῳ ἀῤῥήτῳ, ὅταν ὁ λόγος αὐτῶν διὰ μηδενὸς ἔχῃ ἀριθμȣ̃ ἐκδηλȣ̃σθαι· τοιαύτη ἐςὶ πᾶσα ῥίζα βαθμȣ̃ ἀτελȣ̃ς, παραβαλλομένη πρὸς αὐτὸν τὸν βαθμόν· ȣ̔́τως ἐν $\sqrt[2]{2}$ ϗ 2, ἢ $\sqrt[2]{2}$ ϗ 3 εἰσὶ ποσὰ ἀλλήλοις ἀσύμμετρα, ἢ ἐν λόγῳ ἀῤῥήτῳ.

Ἀλλ᾽ εἰ ϗ βαθμοὶ δύω ἀτελεῖς ἀλλήλοις εἰσὶν ἀσύμμετροι, αἱ ἄῤῥητοι αὐτῶν ῥίζαι ȣ̓κ εἰσὶ παρὰ τȣ̃το καὶ αὐταὶ ἀσύμμετροι· ἔςωσαν γὰρ δύω βαθμοὶ ἀτελεῖς 32, 50· ἐπεὶ ȣ̃ν δυνάμεθα θεωρεῖν τὸν μὲν 32 ὡς τὸ διπλȣ̃ν

τȣ̃ ἀπὸ 4 τετραγώνȣ, εἴτ' ȣ̃ν $4^2 \times 2$, τὸν δὲ 50 ὡς τὸ διπλȣ̃ν τȣ̃ ἀπὸ 5 τετραγώνȣ, εἴτ' ȣ̃ν $= 5^2 \times 2$, ἄρα ῥίζα μὲν τȣ̃ 32 ἔςαι $4 \times \sqrt{2}$, ἡ δὲ τȣ̃ 50, $5 \times \sqrt{2}$· φημὶ ȣ̃ν ὡς αὗται αἱ δύω ἄῤῥητοι ῥίζαι $4 \times \sqrt{2}$, $5 \times \sqrt{2}$, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας σύμμετροι· εἰσὶ γὰρ δύω γινόμενα, οἷς κοινὸς ὁ $\sqrt{2}$ παράγων· ἄρα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχȣσιν, ὃν οἱ ἕτεροι παράγοντες 4, καὶ 5, εἴτ' ȣ̃ν ἐςὶ $4 \times \sqrt{2} : 5\sqrt{2} :: 4 : 5$ (306).

367. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Ἐὰν ποσὸν, τέλειος βαθμὸς ὑπάρχον, πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕτερον ποσὸν, ὑπάρχον ϗ αὐτὸ βαθμὸς τέλειος, ἔςαι ϗ τὸ γινόμενον ἐξ αὐτῶν βαθμὸς αὐτοῖς ὁμοταγής.

ΔΕΙΞΙΣ. Καὶ γὰρ $\alpha^2\beta^2$ γινόμενον ὑπὸ τῶν δύω τετραγώνων α^2, β^2, ἔςι ϗ αὐτὸ τετράγωνον τέλειον· εἴγε ἔχει ῥίζαν τετραγωνικὴν τελείαν τὴν $\alpha^{\frac{2}{2}}\beta^{\frac{2}{2}} = \alpha\beta$· ϗ αὖ $\alpha^3\beta^6$ γινόμενον ὑπὸ τῶν δύω κύβων α^3, β^6 ϗ αὐτὸ ἐςι κύβος ἐντελὴς ἔχων ἐντελῆ κυβικὴν ῥίζαν τὴν $\alpha^{\frac{3}{3}}\beta^{\frac{6}{3}} = \alpha\beta^2$· ἐν γένει δὲ, ἐὰν α^μ ϗ β^ν ὑποτεθῶσι δύω βαθμοὶ ὁμοταγεῖς π, ὥσπερ ἡ αὐτῶν ὁμοβάθμιος ἐντελὴς ῥίζα λαμβάνεται διὰ τῶν $\alpha^{\frac{\mu}{\pi}}$, ϗ $\beta^{\frac{\nu}{\pi}}$ (124) ὡσαύτως τȣ̃ ὑπ' αὐτῶν γινομένȣ $\alpha^\mu\beta^\nu$ ἔςαι ἐντελὴς ὁμοβάθμιος ῥίζα ἡ $\alpha^{\frac{\mu}{\pi}}\beta^{\frac{\nu}{\pi}}$ Ο. Ε. Δ.

368. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἐὰν βαθμὸς ἐντελὴς ἐπὶ βαθμὸν ὁμοταγῆ ἀτελῆ πολλαπλασιασθῇ, τὸ γινόμενον ȣ̓ δύναται εἶναι βαθμὸς τελειος ὁμοταγής.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςω α^μ βαθμὸς ὁστισȣ̃ν τέλειος ϗ β^ν βαθμὸς αὐτῷ ὁμοταγὴς ἀτελῶς ἔχων, ϗ π δείκτης τȣ̃ βαθμȣ̃· φημὶ δὴ, ὡς ἐνταῦθα τὸ γινόμενον $\alpha^\mu\beta^\nu$ ȣ̓κ ἂν

εἴη βαθμὸς π ἐντελής· ἔςω γάρ· οὐκοῦν ἔςαι ῥίζα τελεία ἡ $\alpha^{\frac{\mu}{\pi}}$ $\beta^{\frac{\nu}{\pi}}$· τουτὶ δὲ τοῦ γινομένου διὰ $\alpha^{\frac{\mu}{\pi}}$ διαιρεθέντος, προκύψει $\beta^{\frac{\nu}{\pi}}$ ῥίζα ἐντελὴς τοῦ β^{ν} βαθμοῦ· ὑψωθεῖσα οὖν αὕτη ἐπὶ τὸν π βαθμὸν ἔςαι $\beta^{\frac{\nu\pi}{\pi}} = \beta^{\nu}$, βαθμὸς ἐντελὴς (82) κατὰ τῆς ὑποθέσεως. Ο. Ε. Δ.

369. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τετράγωνος ἀριθμὸς οὐκ ἂν εἴη διπλοῦς, τριπλοῦς, πενταπλοῦς κτ. ἑτέρου τετραγώνου· ἢ πολλαπλασιασθέντος τοῦ ἐλάσσονος τετραγώνου ἐπὶ 2, 3, 5 κτ, ἀτελεῖς τετραγώνους, προκύψει ὁ μείζων τετράγωνος, ὡς ἐντελής, ὅπερ ἄτοπον (368)· κύβος δὲ ἀριθμὸς οὐ δύναται εἶναι διπλοῦς, τριπλοῦς, τετραπλοῦς ἑτέρου κύβου· ἄλλως γὰρ πολλαπλασιασθέντος τοῦ ἐλάσσονος ἐπὶ τοὺς ἀτελεῖς κύβους 2, 3, 4 κτ, πορισθήσεται γινόμενον κύβος τέλειος, ὅπερ ἄρτι ἀδυνάτως ἔχον ἐξήλεγκται· ἐν γένει δὲ „ἅπας βαθμὸς τέλειος οὐκ ἂν εἴη πολ„λαπλοῦς ἑτέρου ἀριθμοῦ, ὅτι μὴ βαθμοῦ τελείου ἑαυτῷ ὁ„μοταγοῦς.“

370. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ἅπας βαθμὸς ἀφ᾽ οὑτινοσοῦν ἀριθμοῦ οὐ διαιρεῖται δι᾽ ἀριθμῶν πρώτων ἄλλων, εἰμὴ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἀφ᾽ οὗ ὡς ῥίζης παρῆκται.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςω πᾶς ἀριθμὸς ἐκτεθειμένος διὰ αβ, ὃς ὑποτεθείσθω μὴ ἔχειν ἄλλους ἀριθμοὺς διαιρέτας, εἰμὴ τοὺς δύο παράγοντας α, β (ἐξαιρουμένης μέντοι ἀεὶ τῆς μονάδος)· φημὶ δὴ ὡς ὁ τοῦ αβ κύβος αααβββ, φέρ᾽ εἰπεῖν, οὐκ ἔχει ἄλλους διαιρέτας, εἰμὴ τοὺς αὐτοὺς α, β· ἐξῃρήσθω δὲ, ὅτι διὰ αα, καὶ ββ διαιρεῖται· οὗτοι γὰρ προδήλως, πολλαπλοῖ ὄντες, τοῦ πρῶτοι εἶναι ἐξίςανται. Ο. Ε. Δ.

371. ΠΟΡΙΣΜΑ. Δύω μεγέθη α ϗ β κοινȣ̃ ἀμοιρȣ̃ντα διαιρέτȣ (πλὴν τῆς μονάδος), εἰς ὃν ἂν ὑψωθῶσι βαθμὸν, κοινὸν διαιρέτην ȣ̓χ ἕξȣσιν· ἅπας γὰρ δήπȣ διαιρέτης ἐςὶν ἀριθμὸς πρῶτος, ἢ πρώτȣ πολλαπλȣ̃ς· ἀλλ᾽ εἰς ὃν ἂν ἕκαςον τȣ́των ὑψωθῇ βαθμὸν, ȣ̓χ᾽ ἕξȣσι διαιρέτην ἀριθμὸν πρῶτον, ȣ̓́τε μὴν πρώτȣ πολλαπλȣ̃ν (370). ἄρα οἱ δύω ȣ̂τοι ἀριθμοὶ κοινὸν διαιρέτην ȣ̓χ᾽ ἕξȣσι.

372. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ἅπαν κλάσμα τῆς μονάδος ἔλαττον, ἢ μεῖζον μὲν, μὴ δυνάμενον δὲ ἐπ᾽ ἀκριβὲς εἰς ὁλοσχερῆ ἀναχθῆναι, ἐφ᾽ ὃν ἂν ὑψωθῇ βαθμὸν, ὁλοσχερὲς ȣ̓ μὴ ἐξισωθήσεται.

ΔΕΙΞΙΣ. Καθ᾽ ἑαυτὸ πρόδηλον τὸ θεώρημα ἐπὶ κλασμάτων τῆς μονάδος ἐλασσόνων (87). ἀλλ᾽ ὑπὲρ τῶν μονάδος μὲν μειζόνων, ἀναχθῆναι μέντοι λειψάνȣ δίχα μὴ δυναμένων ἐφ᾽ ὁλοσχερῆ· ά. ἐξέςαι τὸ κλάσμα εἰς ἁπλȣςέρȣς ὅρȣς ἀγαγεῖν, καίτοι μὴ παρεχομένȣς δίχα τȣ̃ λειψάνȣ ὁλοσχερῆ ποσότητα· ὡς $\frac{\alpha}{\beta}$· β΄. ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐξ ὑποθέσεως δι᾽ ὁλοσχερȣ̃ς ποσȣ̃ ἐκδηλωθῆναι ȣ̓ δύναται, ἐπεὶ β τὸ α ἄνευ λειψάνȣ διελεῖν ȣ̓ δύναται, ὡς μὴ ὂν κοινὸς διαιρέτης ἑαυτȣ̃ τε ϗ τȣ̃ α· ἀλλὰ ϗ ἐφ᾽ ὁντιναȣ̃ν ὑψωθέντα βαθμὸν α ϗ β, κοινὸν διαιρέτην ȣ̓χ᾽ ἕξȣσιν (371). ἄρα ȣ̓δέποτε τὸ β, ἐφ᾽ ὃν ἂν ὑψωθῇ βαθμὸν, διαιρεῖν δυνήσεται ἄνευ λειψάνȣ τὸ α ἐπὶ τὸν αὐτὸν ὑψωθέν· ἄρα. Ο. Ε. Δ.

373. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Δι᾽ ȣ̓δενὸς ἄρα ἀριθμȣ̃ ἐκτεθῆναι δύναται ἡ ῥίζα παντὸς ὁλοσχερȣ̃ς ποσȣ̃, ὃ μὴ εἴη βαθμὸς ἐντελὴς ποσότητος ὁλοσχερȣ̃ς· ἄυτη γὰρ ἡ ῥίζα ȣ̓κ ἂν εἴη ȣ̓́τε ὁλοσχερὴς (εἰ γὰρ ἦν, πολλαπλασιασθεῖσα

ἐφ' ἑαυτὴν παρεῖχεν ἂν ἐντελῆ βαθμὸν, κατὰ τῆς ὑποθέσεως), ὔτε κλάσμα τῆς μονάδος ἔλαττον, οὔτε μεῖζον μὲν τῆς μονάδος, ὁλοχερεῖ δὲ ἐπ' ἀκριβὲς μὴ ἐξισύμενον (327).

374. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἡ ῥίζα παντὸς κλάσματος ἀναχθέντος ἐφ' ἁπλυςέραν ἔκθεσιν, ἐὰν ὅ,τε ἀριθμητὴς αὐτῦ ϗ ὁ παρονομαςὴς μὴ ὦσι βαθμοὶ ἐντελεῖς ποσῦ ὁλοχερῦς, ἔςαι ϗ αὐτὴ ἄλογος.

ΚΕΦΑΛ. ΔΕΚΑΤΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ διαφόρυ διαθέσεως καὶ συντάξεως.

375. Ἐὰν ζητηθῇ ποσαχῶς ἂν διατεθεῖεν ποσάτινα δεδομένα συνάματε λαμβανόμενα, ϗ ἅπαξ ἕκαςον ἐν ἑκάςῃ διαθέσει, τυτὶ καλέισθω μ ε τ α λ λ α γ ὴ δ ι α θ έ σ ε ω ς· ἐὰν δὲ ζητηθῇ ποσαχῶς ἂν συζευχθεῖεν ποσάτινα, ἀνὰ δύω, ἀνὰ τρία κτ., λαμβανόμενα, τυτὶ ὀνομαζέσθω τ ά ξ ι ς.

376. Διὰ μὲν τῆς πρώτης μεθόδυ, δύω μεγέθη α, β διχῶς ἂν διατεθῆναι ἔχοιεν, αβ, βα· τρία δὲ α, β, γ, ἑξαχῶς· εἴγε τιθεμένυ ἐκ διαδοχῆς ἐν ἀρχῇ ἑκάςυ τῶν τριῶν μεγεθῶν, τὰ λοιπὰ δύω ἐν ἑκάςῃ περιπτώσει δύω ἀμείψυσι διαθέσεις· οἷον· αβγ, αγβ, βαγ, βγα, γαβ, γβα· τέσσαρα δὲ, α, β, γ, δ, ἀμείψυσιν 24 διαθέσεις· ἑκάςυ γὰρ ἐν ἀρχῇ τῆς διαθέσεως κειμένυ κατὰ διαδοχὴν, ἄλλα τρία ἐν ἑκάςῃ περιπτώσει ἀμείψυσι διαθέσεις 6. ἔςι δὲ $6 \times 4 = 24$. ὡσαύτως πέντε μεγέθη τὰ α, β, γ, δ, ε, ἀμείβυσι διαθέσεις $24 \times 5 = 120$, ϗ ὕτως ἐφεξῆς· ἐντεῦθεν ἄρα ἐν γένει.

377. Α΄. „Μεγέθη ἀριθμοῦ ὑπερτέρου ἀμείβουσι τοσάσδε διαθέσεις, ὅσας δηλοῖ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν διαθέσεων, ὧν ἐπιδέχονται μεγέθη ἀριθμοῦ, ἀμέσως ἐλάσσονος, καὶ αὐτοῦ τοῦ ὑπερτέρου ἀριθμοῦ“. οὕτως ὁ ἀριθμὸς τῶν δυνατῶν διαθέσεων τριῶν μεγεθῶν ἐστι τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν δυνατῶν διαθέσεων δύω μεγεθῶν, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ 3, = 6, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

378. Β΄. Ἵν' εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν διαθέσεων, ἃς ἀμείβουσιν ὁσαδηποτοῦν μεγέθη, εἰλήφθω ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1 . 2 . 3 . 4 . κτ., καὶ γεγράφθω 1 μὲν ὑπὸ τὴν 1, ἑξῆς δὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ δευτέρου μείζονος ὅρου 2, καὶ τοῦ πρώτου ἐλάττονος ἀριθμοῦ 1, εἴτ' οὖν 2, γεγράφθω ὑπὸ τὸν 2· τὸ δὲ γινόμενον ὑπὸ τοῦ τρίτου ἀριθμοῦ 3 καὶ τοῦ δευτέρου 2, εἴτ' οὖν 6, γεγράφθω ὑπὸ τὸν 3· τὸ δὲ γινόμενον ὑπὸ τοῦ ἐφεξῆς ἀνωτέρου ἀριθμοῦ 4, καὶ τοῦ κατωτέρου 6, εἴτ' οὖν 4 × 6 = 24 γεγράφθω ὑπὸ τὸν 4, καὶ ἑξῆς ὡσαύτως· καὶ δὴ ἕκαστος ὑποκείμενος ἀριθμὸς δηλώσει τὰς δυνατὰς διαθέσεις τοῦ ὑπερκειμένου οὕτως.

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8
1 . 2 . 6 . 24 . 120 . 720 . 5040 . 40320.
9 . 10 . 11 . 12
362880 . 3628800 . 39916800 . 479001600

379. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ὀνόματος κυρίου δοθέντος, ἐκ τῶν ἐν αὐτῷ γραμμάτων εὑρεῖν ἅπαντας τοὺς δυνατοὺς ἀναγραμματισμούς.

ΛΥΣΙΣ. Ζητοῦνται ἐνταῦθα πᾶσαι αἱ λέξεις χρήσιμοί τε καὶ ἄχρηστοι, ἃς ἀποτελοίη τὰ ὀνόματός τινος γράμματα διὰ τῶν ἐν αὐτοῖς διαφόρων διαθέσεων· ἔστω οὖν τὸ ὄνομα Δῆμος, ὅπερ, ἐπεὶ περιέχει γράμματα

5, αἱ διαθέσεις ἔσονται 120· τέτων ἓν διακριτέον τὰς ἐν χρήσει τῶν ἀχρήςων λέξεων· ϗ αἱ ἐν χρήσει δηλώσεσι πάντας τὲς δυνατὲς τε ὀνόματος ἀναγραμματισμές.

380. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν ποσαχῶς ἄντις διάθειτο ἐπὶ τραπέζης δώδεκα ἑςιωμένες.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐκτεθείσης προόδε, κατίδοι τις ἄν, ὃ ἂν ἀπίθανον δόξειεν, εἰμὴ προὐδέδεικτο, ὡς ἕτοι κατακλιθῆναι δυνήσονται κατὰ 479001600 τρόπες.

381. Διὰ δὲ τῆς κληθείσης μεθόδε τῆς συντάξεως (375) 2 μεγέθη τὰ α, β, ἀνὰ δύω λαμβανόμενα, συντάξεις ἀποτελοῦσι τέσσαρας, αα, ββ, αβ, βα· τρία δὲ σὺν δύω λαμβανόμενα, ἐννέα, α, β, γ· αα, ββ, γγ, αβ, αγ, βα, βγ, γα, γβ· ἐν γένει δὲ „τῶν μεγεθῶν, ἀνὰ δύω μὲν λαμ„βανομένων, οἱ συνδυασμοὶ ἔσονται ἰσάριθμοι τῷ τετρα„γώνῳ τῷ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μεγεθῶν·" τὰ δὲ τρία α, β, γ, σύντρια λαμβανόμενα, ἀποτελεσι συντάξεις 27 τάς δε ααα, ααβ, ααγ, αββ, αβγ, αγγ, βαα, βαβ, βαγ, βββ, ββγ, βγγ· γαα, γαβ, γαγ· γββ, γβγ, γγγ· αβα, αγα, αγβ· ββα, βγα, βγβ· γγα, γβα, γγβ.

382. Ἐν γένει ἄρα „ποσῶν τινων μεγεθῶν δεδομέ„νων ϗ τε ἀριθμε τε ἐμφαίνοντος, καθ᾽ ὅσα συνταχθήσε„ται, αἱ δυναταὶ συντάξεις ἰσάριθμοι ἔσονται τῷ τῶν με„γεθῶν ἀριθμῷ, ὑψωθέντι εἰς βαθμὸν, ὃ δείκτης ἐςὶν ὁ ἀ„ριθμὸς ὁ ἐμφαίνων, καθ᾽ ὅσα συνταχθήσεται τὰ μεγέ„θη"· ὅτως ὂν 10 μεγέθη, φέρε, ἀνὰ 5 λαμβανόμενα, ἀποτελεσι συντάξεις τοσαύτας, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ 10 εἰς πέμπτον ὑψωθεὶς βαθμὸν, εἴτ ὂν 100000· 15 δὲ μεγέθη, ἀνὰ 4 λαμβανόμενα, συντάξεις ἀποτελεσι $15^4 = 50625$.

ΣΥΜΒΟΛΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΤΡΙΤΟΝ

Περὶ Ἐξισώσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Περὶ τῶν γενικῶς ἐπὶ τῶν ἐξισώσεων θεωρεμένων.

383. Ἐξίσωσίς ἐςιν ὁ λόγος τῆς ἰσότητος, ὃν πρὸς ἀλλήλας ἔχεσι ποσότητες δύω, ἐκδηλέμενος διὰ τῦ συμβόλε =· ἕτως ἡ ἔκθεσις $3+5=2+6$ ἐςὶν ἐξίσωσις, ἐφ᾽ ἧς ἀναγινώσκομεν: 3 σὺν 5 ἴσον τῷ 2 σὺν 6· πάντες μὲν οἱ πρὸς ἀριςερὰν τῦ = συμβόλε κείμενοι ὅροι, συνάμα λαμβανόμενοι, καλῦνται πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως· πάντες δὲ οἱ πρὸς δεξιὰν, μέλος δεύτερον· ἐπὶ ὖν τῆς παρέσης ἐξισώσεως πρῶτον μὲν ὑπάρχει μέλος $3+5$, δεύτερον δὲ $2+6$.

384. Ἡ τέχνη τῦ διὰ τῶν ἐξισώσεων ποικίλα προβλήματα, διὰ ποσῶν προβαλλόμενα, ἐπιλύειν καλεῖται Ἀνάλυσις, ἐπείπερ, ὡς παντὶ δῆλον ἔςαι, ἐπιλύεται τὸ πρόβλημα, ἀναλυομένης, εἴτ᾽ ὖν ἐφ᾽ ἁπλεςέραν ἔκθεσιν ἡκέσης, τῆς ζητεμένης ποσότητος.

385. Λύσις προβλήματος ἐςὶν ἡ εὕρεσις τῆς δυνάμεως ἑνὸς ἢ πλειόνων ἀγνώςων ποσῶν· ἀλλ᾽ ὐδεμία ποσότητος ἀγνώςε εὑρεθήσεται δύναμις, ἐὰν μὴ ἡ ἀγνω-

ςος αὕτη ἐπὶ θατέρȣ τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν μεταβιβασθῇ, ἐπὶ θατέρȣ μόνων τῶν γνωςῶν ποσοτήτων κειμένων· τῳόντι γὰρ αὕτη τὸ πρὶν ἀγνοȣμένη, ἐὰν ἴση εὑρεθῇ ἐγνωσμέναις ποσότησι, γνώριμος ἀποκαταςαθήσεται· ἐὰν, φέρε, ἀγάγωμεν τὴν ἐξίσωσιν εἰς τȣ̃το $\chi = 3 + 2$, ἡ δύναμις τῆς χ ἀπολύτως γνωςὴ καταςαθήσεται.

386. Δῆλον δὲ, ὡς γνῶναι τὸ ἄγνωςον ἄλλως ȣ̓ δυνησόμεθα, εἰμὴ διά τινων σχέσεων, ἃς ὑποτίθεται ἔχειν πρὸς τὰ ἐγνωσμένα· αὗται δὲ αἱ ὑποτιθέμεναι σχέσεις ὀνομάζονται θέσεις, ἢ διδόμενα τοῦ προβλήματος.

387. Εἰς παντὸς προβλήματος διὰ τῶν ἐξισώσεων ἐπίλυσιν, τριῶν τȣτωνὶ ἀναγκαίως δεήσει.

388. Α΄. Ἐξεταςέον λίαν ἐπιμελῶς τὸ ζήτημα, ἵν᾽ ἐντεῦθεν ἐκδηλῶσαι ἔχωμεν τὰς θέσεις τȣ̃ προβλήματος, εἶτ᾽ ȣ̓̃ν τὰς τῶν ἀγνώςων πρὸς τὰ ἐγνωσμένα σχέσεις· ἀλλ᾽ ἐπὶ τȣ̃το ἀμήχανον ἀποδȣ̃ναι γενικόν τινα κανόνα· ἔνθεν μέντοι τὸ εὐφυὲς ϗ ἀγχίνȣν, ἔνθεν δὲ τὸ ἐμμελὲς τῆς ἐγγυμνάσεως τȣ̃ ἐπιλύοντος, τουτὶ ἐκτελέσαι δυνήσονται.

389. Β΄. Μετὰ τȣ̃το δὲ, τὰς σχέσεις ταύτας ἐκθετέον δι᾽ ἐξισώσεως, ὅ ἐςιν, ἐκφραςέον ταύτας διὰ συμβολικῆς, ȣ̔́τως εἰπεῖν, ἑρμηνείας, παριςῶντας διὰ τῶν δεόντων ςοιχείων τάςτε ἀγνώςȣς, ϗ ἐγνωσμένας ποσότητας· διὰ δὲ πλείω σαφήνειαν τῆς ἐκθέσεως τὰς αὐτὰς ποσότητας, ἢ τὰ ὅμοια μέρη τῆς αὐτῆς ποσότητος τῷ αὐτῷ ἐκδηλωτέον γράμματι, προτιθέντας αὐτῷ, εἰ δέοι, συνεργόν τινα, ἢ παρονομαςὴν· κληθείσης, φέρε, ποσότητός τινος χ, τὸ μὲν διπλȣ̃ν αὐτῆς ἐκθετέον διὰ 2χ, τὸ δέ τοι τρίτον διὰ $\frac{\chi}{3}$ κτ.

390. Τȣ̃ προβλήματος ȣ̃τως ἐξισώσει ἐμπεριληφθέντος, λείπεται ἑξῆς παντοίως ἀποπειρᾶσθαι ταύτης τῆς ἐξισώσεως, ὅ ἐςι διαφόρȣς ἐπ' αὐτῆς ποιεῖν μεταλλαγὰς, ἀφορώσας εἰς τὸ τῶν ἄλλων ἀπαλλαγῆναι τὴν ἄγνωςον, ὅ ἐςιν, εἰς τὸ ποιῆσαι, τὴν μὲν ἄγνωςον εἶναι ἐπὶ θατέρȣ τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως, ἐπὶ θατέρȣ δὲ τὰς ἐγνωσμένας· τȣ̀ς δ' ἐπὶ τῆς τρίτης ταύτης πράξεως κανόνας ϗ δὴ ἀποδώσομεν.

391. Τὸ πρόβλημα πρωτοβάθμιον ὀνομάζεται, ὅταν ἡ ἄγνωςος χ ἐπὶ πρῶτον βαθμὸν ὑψωμένη ᾖ· δευτεροβάμιον δὲ, ὅταν ὁ μείζων βαθμὸς τῶν τῆς ἀγνώςȣ ᾖ τετράγωνος, ϗ ἑξῆς ὡσαύτως· ȣ̃τως $\alpha + \chi = \alpha\beta$ ἔςι πρόβλημα, ἡ ἐξίσωσις πρωτοβάθμιος, ἀλλὰ $\alpha + \chi^3 - \beta\chi = \gamma$ ἔςιν ἐξίσωσις τριτοβάθμιος.

392. Τὸ πρόβλημα δύναται, ἢ μίαν ἐξίσωσιν ἔχειν, ἐὰν ᾖ μία ἡ θέσις, ἢ πλείȣς, ἐὰν ὦσι πλείȣς· ἐσθ' ὅτε μέντοι δι' ἐμμελῶν ἐπιςάσεων ἐν τοῖς ἀγνώςοις τε ϗ γνωςοῖς γινομένων, ἐπιλυθῆναι δύναται διὰ μιᾶς ἐξισώσεως, ὃ ἄλλως ἐπιλύεται διὰ πλειόνων.

Πρόβλημα λύειν εὑρίσκειν ἐςὶν, ὡς ἐκ τῶν εἰρημένων συνιδεῖν παντὶ ἔξεςιν, ἐν γνωςοῖς τὴν ἀγνώςȣ ποσȣ̃ δύναμιν ἢ πασῶν τῶν ἐμπεριεχομένων ἀγνώςων· ἐξίσωσιν δ' ἐπιλύειν, τὸ ἄγνωςον ἔςι γνῶναι, ποιȣ̃ντας αὐτὸ μὲν μονάζειν ἐπὶ θατέρȣ τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν, ὡς ἰσȣ́μενον ταῖς ἐπὶ θατέρȣ ἐγνωσμέναις· λαβεῖν μέντοι τὴν ἀγνώςȣ τινὸς δύναμιν ποιεῖν ἐςιν αὐτὸ μονάζειν ἐπὶ θατέρȣ τῶν μελῶν, κἂν ἐγνωσμέναι ὦσιν αἱ ἐν θατέρῳ, κἂν ἄγνωςοι.

393. Ἀναμνηςέον μέντοι ἐνταῦθα τȣ̃ (Ἀριθ. 13, 14) ἐκτεθέντος ἀξιώματος, εἴτ' ȣ̃ν ὁ λόγος ὁ τῆς ἰσότητος ȣ̉δεμίαν ὑπομένει τροπὴν, κἂν ἑκατέρῳ μέλει προςεθῇ,

κἂν ἀφ' ἑκατέρȣ τὸ αὐτὸ ποσὸν ἀφαιρεθῇ· εἴτε ἑκάτερον ἐπὶ τὸ αὐτὸ ποσὸν πολλαπλασιασθῇ, εἴτε διὰ τȣ͂ αὐτȣ͂ διαιρεθῇ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Ἔκθεσις τῶν ἀρχοειδῶν μετασχηματισμῶν, τῶν γενέσθαι δυναμένων ἔντε ταῖς ἐξισώσεσι κἂν ταῖς ἀναλογίαις.

394. Ἡ τȣ͂ εὐκαίρως χρῆσθαι ποικίλοις μετασχηματισμοῖς κατὰ τὴν χρείαν τȣ͂ προκειμένȣ ἔντε ἐξισώσεσι, καὶ ἐν ἀναλογίαις, ναὶ μὴν καὶ τȣ͂ ἀνάγειν, ἐξισώσεις μὲν εἰς ἀναλογίας, ταύτας δ' ἀνάπαλιν ἐς ἐκείνας, τέχνη, ἅπαντα, ὡς εἰπεῖν, ῥαδιȣργεῖ, ȣ̓χ ὅπως τὰ εἰς ἐπίλυσιν τῶν δυσχερεστάτων προβλημάτων, ἀλλὰ καὶ εἰς ἁπάσας μικρȣ͂ τὰς δείξεις τῆς τε συνήθȣς καὶ δὴ καὶ τῆς ὑψηλοτέρας Γεωμετρίας.

Ἔδει ἄρα ὑποβαλεῖν ταῖς τῶν πρωτοπείρων ὄψεσιν ἰδέαν τινὰ τῶνδε τῶν μετασχηματισμῶν τῶν εἰς πλείω χρῆσιν τοῖς Μαθηματικοῖς ἡκόντων, ἵν', ὡσπερεὶ τȣ́τοις οἰκειωθέντες, ἠδύναντο εὐκαίρως χρήσασθαι αὐτοῖς ἐν ἅπαντι τῷ τῶν μαθηματικῶν σαδίῳ, τῆς αὐτῶν ἀπονάμενοι χρήσεως· παραπέμψομεν δὲ τὸν μετιόντα εἰς τȣ̀ς χώρȣς, ἔνθα προδέδεικται ἑκάστη μέθοδος· ἀλλ' ἀντὶ γὰρ γραμμάτων ἀντεισακτέον τῷ βȣλομένῳ ἀριθμȣ̀ς, ἵν' ἐναργέστερον παριστᾶται ἁπάσης συμβολικῆς ἐκθέσεως ὁ νȣ͂ς.

395. ά. Ἔστω $\alpha = \beta$· ȣ̓κȣ͂ν ά. $\alpha - \beta = o$ (Ἀριθ. 15)· β'. $\beta - \alpha = o$· γ'. $\alpha + \beta = 2\beta$, ἢ $\beta + \alpha$

$= 2\alpha$· δ΄. $\alpha + \nu = \beta + \nu$, ἢ $\alpha - \nu = \beta - \nu$ (393)· ἢ $\nu - \alpha = \nu - \beta$· έ. $\alpha + \nu - \nu - \beta = 0$ (Α᾽ριθ. 15).

396. β΄. Ἔςω $\alpha = \beta$· ἐκῶν ά. $\alpha : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\beta} : 1$ (240), ἐντεῦθεν ἄρα $\alpha = \frac{\sqrt{\beta} \times \sqrt{\beta}}{1} = \frac{\beta}{1}$, ἢ $\sqrt{\beta} = \frac{\alpha \times 1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$ ἢ $1 = \frac{\sqrt{\beta} \times \sqrt{\beta}}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$ (252, 253).

397. γ΄. Ἔςω $\alpha = \beta$· ἐκῶν $\sqrt[2]{\beta} = \sqrt[2]{\alpha}$ (118) ϗ ἐν γένει $\sqrt[\pi]{\alpha} = \sqrt[\pi]{\beta}$· ἄρα $\alpha : \sqrt[\pi]{\alpha} :: \sqrt[\pi]{\beta} : 1$ (240). ἢ $\sqrt[\pi]{\alpha} : 1 :: \alpha : \sqrt[\pi]{\beta}$.

398. δ΄. Ἔςω $\alpha = \beta$· ἄρα $\alpha^2 = \beta^2$ (78) ϗ ἐν γένει $\alpha^\pi = \beta^\pi$· ἄρα $\alpha : \beta :: \beta : \alpha$ (240)· ἄρα $\alpha = \frac{\beta^2}{\alpha}$ ϗ $\beta = \frac{\alpha^2}{\beta}$ (253)· ἐν γένει δὲ ἔςαι $\alpha^\pi : \beta^\pi :: \beta^\pi : \alpha^\pi$· ὅθεν $\alpha^\pi : \beta^\pi - \alpha^\pi :: \beta^\pi : \alpha^\pi - \beta^\pi$ κτ.

399. έ. Ἔςω $\alpha = \sqrt[2]{\beta}$· ἄρα $\alpha^2 = \beta$ (78, 118)· ἄρα $\alpha : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\beta} : \alpha$ (240) ἄρα $\alpha = \frac{\beta}{\alpha}$, ϗ $\sqrt{\beta} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\beta}}$ (250) ϗ ἐν γένει ἐὰν ᾖ $\alpha = \sqrt[\pi]{\beta}$, ἔςαι $\alpha^\pi = \beta$.

400. ϛ΄. Ἔςω $\sqrt{\alpha} = \beta$· ἄρα ά. $\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\beta} : 1$ (240)· ὅθεν $\sqrt{\alpha} = \frac{\beta}{1}$ ἢ $1 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}$· β΄. $\sqrt{\alpha} = \beta$, ὅθεν $\alpha = \beta^2$· ἐκῶν $\alpha : \beta :: \beta : 1$· ὅθεν $\alpha = \frac{\beta^2}{1}$, ἢ $\beta = \frac{\alpha}{\beta}$, ἐκ τέτων δὲ ϗ $\alpha + \beta : \beta :: \beta + 1 : 1$ κτ. (244).

401. ζ΄. Ἔςω $\alpha = \beta$· ἄρα $2\alpha = 2\beta$· ϗ ἐν γέ-

νει $\nu\alpha = \nu\beta$ (301)· ἄρα ά. $\nu : \beta :: \nu : \alpha$· β΄. $\nu = \frac{\beta\nu}{\alpha}$, ϗ $\alpha = \frac{\beta\nu}{\nu}$ (250) γ΄. $\nu : \beta + \nu :: \nu : \alpha + \nu$, ἢ $\nu - \beta : \beta :: \nu - \alpha : \alpha$ κτ. (244).

402. ή. Ἔςω $\alpha = \beta$· ἐκεν $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$ ϗ ἐν γένει $\frac{\alpha}{\nu} = \frac{\beta}{\nu}$ (Πόρισμ. τε 258), ἄρα ά. $\frac{\alpha}{\nu} : \frac{\beta}{\nu} :: \alpha : \beta$ (258)· ἄρα β΄. τεθέντος $\frac{\alpha}{\nu} = \mathrm{P}$, ϗ $\frac{\beta}{\nu} = \varrho$, ἔςαι $\beta = \frac{\alpha\varrho}{\mathrm{P}}$, ϗ $\alpha = \frac{\beta\mathrm{P}}{\varrho}$ (250).

403. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπὶ τε ἐσχάτε τεδε ὑποδείγματος παρατηρητέον, ὡς ὅταν σημειεν δέῃ κλάσματος διὰ κλάσματος διαίρεσιν, ἢ ϗ δι' ὁλοσχερες, ἐκθετέον ἕκαςον κλάσμα δι' ἑνὸς μόνε γράμματος· τετὶ δὲ ἐχ' ὅπως τὴν τε νέε πηλίκε ἔκθεσιν, ἀλλὰ ϗ τὴν λύσιν τε προβλήματος ἐκ ἄν τις εἴποι ὅσον ἐξευμαρίζει.

404. θ΄. Ἔςω $\nu\alpha = \beta$· ἐκεν $\alpha = \frac{\beta}{\nu}$ (100), ἢ $\nu = \frac{\beta}{\alpha}$ ἄρα ϗ $\alpha : \beta :: 1 : \nu$ (240) ἐκεν $\frac{\alpha\nu}{\beta} = 1$ (250)· ἐκ τε $\nu\alpha = \beta$ ἀποφέρεται ϗ $\alpha : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\beta} : \nu$ (240)· ἄρα $\alpha = \frac{\sqrt{\beta} \times \sqrt{\beta}}{\nu}$, ϗ $\frac{\alpha\nu}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\beta}$

405. ί. Ἔςω $\alpha = \nu\beta$· ἄρα $\nu = \frac{\alpha}{\beta}$, καὶ $\beta = \frac{\alpha}{\nu}$ (Ἀριθ. 108) ἄρα ϗ $\nu : \sqrt{\alpha} :: \sqrt{\alpha} : \beta$· ὅθεν $\sqrt{\alpha} = \frac{\beta\nu}{\sqrt{\alpha}}$ (250).

406. ιά. Ε῎ςω $\alpha = \frac{\beta}{\nu}$, ἄρα $\alpha\nu = \beta$ (107)· ἄρα ϗ $\nu = \frac{\beta}{\alpha}$ (Α᾽ριθ. 108)· ἄρα τελευταῖον $\alpha : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\beta} : \nu$.

407. ιβ΄. Ε῎ςω $\frac{\alpha}{\nu} = \beta$· ἄρα ά. $\alpha = \beta\nu$ (Α᾽ριθ. 107)· β΄. $\nu = \frac{\alpha}{\beta}$· γ΄. $\beta : \sqrt{\alpha} :: \sqrt{\alpha} : \nu$.

408. ιγ΄. Ε῎ςω $\alpha\nu = \beta\gamma$· ἄρα ά. $\alpha = \frac{\beta\gamma}{\nu}$· β΄. $\nu = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$· γ΄. $\beta = \frac{\alpha\nu}{\gamma}$· δ΄. $\gamma = \frac{\alpha\nu}{\beta}$ (250).

409. ιδ΄. Ε῎ςω $\alpha\nu = \beta\gamma$· ἄρα ά. $\frac{\alpha\nu}{\beta\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\nu}{\gamma}$ (291) β΄. $\alpha : \beta :: \gamma : \nu$· γ΄. $\nu : \gamma :: \beta : \alpha$

ιέ. Ε῎ςω $\frac{\alpha}{\nu} = \frac{\beta}{\gamma}$· ἄρα ά. $\alpha : \nu :: \beta : \gamma$ (185)· β΄. $\alpha = \frac{\beta\nu}{\gamma}$, $\gamma = \frac{\beta\nu}{\alpha}$, $\nu = \frac{\alpha\gamma}{\beta}$, ϗ $\beta = \frac{\alpha\gamma}{\nu}$ (250)· γ΄. $\frac{\alpha \times \nu\gamma}{\nu} = \frac{\beta \times \nu\gamma}{\gamma}$ (393)· ἄρα $\alpha\gamma = \beta\nu$ (58).

410. ις΄. Α᾽ναλόγως δὲ τέτοις ϗ ἄπειρα ἄλλα ἀπενέγκασθαι δυνησόμεθα· κείσθω γὰρ παραδείγματος χάριν ἡ ἀναλογία $\alpha : \beta :: \gamma : \nu$ (Ρ), ὅθεν ἀρυόμεθα τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\nu = \beta\gamma$ (409), ἥτις ἀκριβῶς παρίςησιν ἣν ἄντις βέληται ἀναλογίαν· ἐπιτρέπεται γὰρ πάντα μὲν πρῶτον ἀναλογίας ὅρον ἐμφαίνειν διὰ α, πάντα δὲ δεύ-

τερον διὰ β· οὐκοῦν ἐκ τῆς Ρ ἀναλογίας ἀριθμοῦ μονονοὐκ ἐπέκεινα ἄλλας ἐξαγαγεῖν δυνησόμεθα· καὶ γάρ, ἵνα παρῶ τὰς ὀκτὼ διαφόρους ἐκείνας διαθέσεις (242), ἃς ὑπελθεῖν ἔξεστι τοῖς ὅροις τοῖσδε, ναὶ μὴν καὶ τὰς προσθέσει, ἢ ἀφαιρέσει, ἀνακυπτούσας (242), διαιροῦντες, ἢ πολλαπλασιάζοντες αὐτοὺς δι' ἀριθμῶν διαφόρων ἐς ἄπειρον (246, 247), ἀπειραρίθμους ἀναλογίας ἀποτελέσομεν ἐν ὅροις πράγματι ἀλλήλων διενηνοχόσι· οὐ μὴν ἀλλὰ τῷδε τῶν βαθμῶν σχηματισμῷ, καὶ τῇ ἀπ' αὐτῶν ἐξαγωγῇ τῶν ῥιζῶν, ἄλλας ἀπειραρίθμους ἀναλογίας ἀποισόμεθα ἐν ὅροις δυνάμει διαφόροις ἀλλήλων· οἷαίπερ εἰσὶν αἵδε· $\alpha^2 : \beta^2 :: \gamma^2 : \nu^2$, $\alpha^3 : \beta^3 :: \gamma^3 : \nu^3$, κτ., ἢ $\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\gamma} : \sqrt{\nu}$, $\sqrt[3]{\alpha} : \sqrt[3]{\beta} :: \sqrt[3]{\gamma} : \sqrt[3]{\nu}$ κτ. (263).

411. ιζ΄. Οὐκ ἔστιν οὕτως ἁπλῆ ἐξίσωσις, οἷα ἡ $\alpha = \beta$, ἀφ' ἧς οὐκ ἔστιν ἀπολαβεῖν ἀναλογίαν τινά, καὶ ἐκ ταύτης ἀπειραρίθμους ἑτέρας· ἑκάστη ἄρα τῶνδε τῶν ἀναλογιῶν ἀποδώσει καινὴν ἐξίσωσιν, εἴτ' οὖν τὴν ἔκθεσιν τῆς τοῦ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινομένου πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν μέσων ἰσότητος (238)· οὐκ ἔστιν ἄρα ἁπλῆ ἐς τοσοῦτον ἐξίσωσις, ὥστε ἀπ' αὐτῆς ἀπειραρίθμους ἄλλας μὴ ἀπαρύεσθαι.

412. ιη΄. Τοὐναντίον δέ, ὁσαιδηποτοῦν ἀναλογίαι, εἰς μίαν μόνην ἀναλογίαν, ναὶ μὴν καὶ ἐξίσωσιν ἀναχθῆναι δυνήσονται· πολλαπλασιασμῷ γάρ, ἢ διαιρέσει, ὅρου δι' ὅρου, ἑκάστου διὰ τοῦ ἑαυτῷ ὁμοταγοῦς, τὰ τέσσαρα γινόμενα, ἢ πηλίκα, ἀποδώσουσιν ἀναλογίαν καὶ δὴ καὶ ἐξίσωσιν (262): ἔστωσαν γὰρ αἱ τρεῖς ἀναλογίαι· πολλαπλασιάσαντες οὖν πάντας μὲν τοὺς πρώτους ὅρους ἐπ' ἀλλήλους, πάντας δὲ τοὺς δευτέρους, καὶ ἑξῆς ὡσαύτως ἕξο-

$$\alpha : \beta :: \gamma : \delta$$
$$\varepsilon : \zeta :: \vartheta : \eta$$
$$\iota : \kappa :: \mu : \nu$$
$$\overline{\alpha\varepsilon\iota : \beta\zeta\kappa :: \gamma\vartheta\mu : \delta\eta\nu}$$

μὲν μίαν μόνην ἀναλογίαν $\alpha\varepsilon\iota : \beta\zeta\kappa :: \gamma\vartheta\mu : \delta\eta\nu$ (262) ἥτις προβάλλει τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\varepsilon\iota\delta\eta\nu = \beta\zeta\kappa\gamma\vartheta\mu$ (238).

413. Ὡσαύτως δὲ ὅσας δηποτῦν ἐξισώσεις συνάψει τῶν πρώτων ϗ δευτέρων μελῶν ἐπὶ μίαν ἀναγαγεῖν δυνησόμεθα (393)· ὕτως αἱ πέντε ἐξισώσεις αἱ ἐνταῦθα ἐκκείμεναι μίαν τὴν Ρ ἀπαρτίσϋσι.

$$\begin{array}{l} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \\ \varepsilon = \zeta \\ \vartheta = \eta \\ \iota = \kappa \\ \hline \alpha + \gamma + \varepsilon + \vartheta + \iota = \beta + \delta + \zeta + \eta + \kappa \ (\mathrm{P}). \end{array}$$

414. Ὁπηνίκα ἄρα τὸ πρόβλημα πλείϋς περιέχει ἐξισώσεις, ἔξεσαι συνάψασι τὺς τῦ πρώτυ μέλυς ὅρυς μεθ' ὅ τὺς τῦ δευτέρυ, μίαν μόνην ἐξ αὐτῶν συςήσασθαι ἐξίσωσιν· ὃ δὴ ἐν ὐκ εὐαρίθμοις περιπτώσεσιν ἐξευμαρίζει τὴν τῦ προβλήματος λύσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ πρωτοβαθμίων προβλημάτων, μιᾷ μόνῃ συνεςηκότων ἐξισώσει.

415. Μέθοδος γενική· Τὴν τῆς ἀγνώςυ ποσότητος, εἴτ' ὖν ζητυμένης, χ πρὸς τὰς ἐγνωσμένας σχέσιν ἢ σχέσεις, συμβολικῶς, ταὐτὸν εἰπεῖν δι' ἐξισώσεως ἐκθέμενοι, μονήρη γενέσθαι ποιῦμεν τὴν ἄγνωςον χ, ἐπὶ θατέρυ μόνων κειμένων τῶν γνωρίμων· ὗτινος δὴ ἐν ἐπιτεύξει ἐσόμεθα μιᾷ ἢ ϗ πλείοσι τῶν ἑξῆς πράξεων.

416. Α. Ἐὰν ἡ ἄγνωστος μετὰ μιᾶς, ἢ πλειόνων γνωρίμων, ἀθροίσματι ἐμφαίνῃ, προσθέσει, ἢ ἀφαιρέσει μονήρη αὐτὴν ἐργαζόμεθα, μετατιθέντες ἐπὶ θάτερα τῆς ἐξισώσεως πάσας τὰς γνωρίμους ποσότητας τὰς σὺν αὐτῇ μετ' ἐναντίων σημείων· ὃ καλείσθω Μετάθεσις.

Οὕτως ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\chi+4=10$, μετατίθημι τὸν $+4$ ἐπὶ τὰ δεξιὰ τοῦ $=$ σημείου, μεταλλάττων τὸ $+$ σύμβολον εἰς $-$· ἔσαι οὖν $\chi=10-4$.

Ἴδου δὴ ὁ τῆς μεταθέσεως λόγος· ἐὰν γὰρ ἑκατέρωθεν τῆς ἐξισώσεως $\chi+4=10$ ἀφαιρεθῇ ἡ ποσότης $+4$, ἡ μὲν ἐξίσωσις ἔσαι $\chi+4-4=10-4$, ὁ δὲ τῆς ἰσότητος λόγος ἥκιστα λυμανθήσεται (393)· οὐκοῦν γράφοντες $\chi=10-4$ οὐδὲν ἧττον ἀφαιροῦμεν ἑκατέρωθεν τῆς ἐξισώσεως τὴν $+4$ ποσότητα· εἴγε ἡ ἐξίσωσις $\chi+4-4=10-4$ ἀναγωγῇ ἀποτελεῖται $\chi=10-4$, ὡς ἤδη γέγραπται· ἐὰν δὲ ἡ ἐξίσωσις $\chi-4=10$, μετατίθημι ἐπὶ θάτερα τῆς ἐξισώσεως τὴν 4 ποσότητα, μεταβάλλων τὸ $-$ ἐπὶ $+$, ὅπερ τὴν μὲν ἐξίσωσιν ἀποτελεῖ $\chi=10+4$, τὸν δὲ λόγον τῆς ἰσότητος κατέχει ἀπήμαντον· οὐ γὰρ οὐδὲν ἄλλο ὅτι μὴ τὴν $+4$ ποσότητα ἑκατέρωθι τῆς ἐξισώσεως συνήψαμεν (393)· ἐὰν δὲ πραγματικῶς $+4$ προσεθῇ ἑκατέρῳ τῶν ἐξισώσεως $\chi-4=10$ μελῶν, γενήσεται $\chi-4+4=10+4$, ἥτις δι' ἀναγωγῆς ἀποκαθίσαται $\chi=10+4$, ὥσπερ αὐτὴν ἐγράψαμεν διὰ μεταθέσεως.

Ἐὰν ἄρα ἡ $\chi+\alpha-\beta=\gamma$ μεταθέσει δυνάμεθα μονήρη ποιῆσαι τὴν χ, γράφοντες $\chi=\gamma-\alpha+\beta$· οὕτω γὰρ τὴν μὲν ποσότητα β ἑκατέρωσε συνήψαμεν, τὴν δὲ α ἑκατέρωθεν ἀφείλομεν τῆς ἐξισώσεως.

417. Καὶ τοίνυν ἐὰν ἡ ἄγνωστος χ εὑρεθῇ ἐφ' ἑκά-

τερα τὰ τῆς ἐξισώσεως μέλη, ἐπεὶ χρὴ ἐπὶ θατέρε μόνην γενέσθαι, δυνησόμεθα, μηδεμίαν τῆς ἰσότητος ὑποςάσης τροπὴν, μεταβιβάζειν τὴν ἄγνωσον, ἔνθα κέοιτ᾽ ἂν αὕτη μετὰ συνεργȣ̃ μείζονος· ἐὰν γὰρ ᾖ $2\chi + \alpha = \beta + \chi$, μετατίθεμεν πρῶτον τὸ α· ὅθεν ἔςαι $2\chi = \beta - \alpha + \chi$, μετατίθεμεν εἶτα δεξιόθεν ἐπὶ τὰ ἀριςερὰ τὸ $+\chi$· ὅθεν ἔςαι $2\chi - \chi = \beta - \alpha$, καὶ ἀναγωγῇ, $\chi = \beta - \alpha$·

418. Ἐὰν δ᾽ ἐφ᾽ ἑκατέρȣ τῶν μελῶν τὸν αὐτὸν ἔχῃ συνεργὸν ἡ ἄγνωσος μετὰ συμβόλων ἀντιθέτων, μετατίθεμεν τὴν λειπτικὴν ἐπὶ τὴν ὑπάρχȣσαν, ἵν᾽ ἡ ἄγνωσος μονάσασα μείνῃ ὑπάρχȣσα· ἕτως ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $2\chi = \alpha - 2\chi$, μετατίθεμεν τὴν -2χ ἐπὶ θάτερα, ποριζόμενοι τὴν ἐξίσωσιν $2\chi + 2\chi = \alpha$, εἶτ᾽ ȣ̂ν $4\chi = \alpha$.

419. Ἐν γένει δὲ, ὅταν λειπτικὴ ὑπάρχῃ ἡ ἄγνωσος, ἀποτελȣ̃μεν αὐτὴν ὑπαρκτικὴν διὰ μεταθέσεως· ἐὰν ȣ̂ν ᾖ $\alpha + \beta = \gamma - \chi$, ποιȣ̃μεν $\chi + \alpha + \beta = \gamma$· ὅθεν $\chi = \gamma - \alpha - \beta$.

420. Β΄. Ἐὰν ἡ ἄγνωσος μετ᾽ ἀγνώςȣ γινόμενόν τι παρέχῃ, διαιρετέον ἑκάτερον τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν διὰ τῆς τὴν ἄγνωσον πολλαπλασιαζȣ́σης ποσότητος· ἐπὶ $4\chi = \alpha$, ἵνα μόνην ποιήσωμεν τὴν χ διαιρȣ̃μεν διὰ 4 τήν τε 4χ ϗ τὴν α, γράφοντες $\frac{4\chi}{4} = \frac{\alpha}{4}$· ἀλλὰ $\frac{4\chi}{4} = \chi$· ἡ ἄρα ἐξίσωσις φανήσεται $\chi = \frac{\alpha}{4}$ (393).

421. Ἐκ δὲ δὴ τȣ́τȣ τȣ̃ κανόνος ἀπογεννᾶται ἐν τῇ πράξει βραχύτερος ἄλλος ὅδε. „Ὅταν ἡ ἄγνωσος παριςᾷ τι γινόμενον, γραπτέον μὲν τὴν ἄγνωσον μόνην, δι-

„αιρετέον δὲ τὲς ἄλλες ὅρες τῆς ἐξισώσεως διὰ τῆς πο„σότητος τῆς τὴν ἄγνωςον πολλαπλασιαζέσης“· ὕτως ἐπὶ τῦ ἀνωτέρωθι ὑποδείγματος $4\chi=\alpha$, ἐπείπερ ἔγνωςαι ὡς 4χ διαιρεθὲν διὰ 4 παρέξεται χ, γράφομεν

$$\chi=\frac{\alpha}{4}.$$

422. Ταὐτὸν δὲ ἔςαι, κἂν ἀντ' ἀριθμῦ γράμμα πολλαπλασιάζῃ τὴν ἄγνωςον· ὕσης γὰρ $\alpha\chi=\beta+\gamma$, γράφομεν $\chi=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$. ἐὰν δ' ᾖ $\alpha\chi+\beta\chi+\gamma\chi=\delta-\zeta$, παρατηρῦντες ὅτι οἱ τρεῖς τῦ πρώτυ μέλυς ὅροι ὑδέν εἰσιν ἀλλ' ἢ τὸ γινόμενον ὑπὸ χ ϗ $\alpha+\beta+\gamma$ (68. ά.) ἀπαλλάττομεν τῦ πολλαπλασιαςῦ τὴν χ διὰ διαιρέσεως γράφοντες $\chi=\frac{\delta-\zeta}{\alpha+\beta+\gamma}$. τῆς δ' ἀγνώςυ χ ἴσης εὑρεθείσης γνωςαῖς ποσότησι ταῖς ἐπὶ θάτερα, τὸ πρόβλημα ἐπιλέλυται (5)· ἐὰν δ' ᾖ ἐξίσωσις ἡ $\alpha\chi-\beta\chi+\alpha\gamma=\delta-\zeta\chi$, τὴν χ μονάζυσαν καταςήσομεν ὕτω· ά. μετατίθεμεν $-\zeta\chi$ ἐπ' ἀριςερὰ, ϗ $+\alpha\gamma$ ἐπὶ τὰ δεξιὰ γράφοντες $\alpha\chi-\beta\chi+\zeta\chi=\delta-\alpha\gamma$· β'. γράφομεν τὴν χ μόνην ἐπὶ τῦ πρώτυ μέλυς, διαιρῦντες τὸ δεύτερον διὰ $\alpha-\beta+\zeta$ πολλαπλασιαςῦ τῆς ἀγνώςυ· ϗ δὴ ἕξομεν $\chi=\frac{\delta-\alpha\gamma}{\alpha-\beta+\zeta}$.

423. Γ. „Ἐὰν ἡ ἄγνωςος κλάσματι ἐφαίνῃ μεθ' „ἑτέρας ποσότητος, ἀπαλλάξομεν αὐτὴν, πολλαπλασιά„ζοντες πάντας τὺς ὅρυς τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὴν τὸ ἄγ„νωςον διαιρῦσαν ποσότητα“.

Ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\frac{\chi}{5}=\alpha$, ἑκάτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὴν τὸ ἄγνωςον διαιρῦσαν ποσότητα 5· ἔςαι ἦν $\frac{5\chi}{5}=5\alpha$· ἀλλὰ $\frac{5\chi}{5}=\chi$· ἀποτελεσθήσεται ἄρα ἡ ἐξίσωσις $\chi=5\alpha$.

424. Διὰ πολλαπλασιασμῦ τοίνυν ἁπλῆς τῆς χ γινομένης ἐπὶ θατέρυ τῶν μελῶν, συνάγομεν ἐξῆς ἐν τῇ πράξει κανόνα „ὅταν ἡ ἄγνωςος διὰ ποσότητος ἄλλης „διαιρῆται, γραπτέον αὐτὴν ἁπλῶς ὡς ὁλοχερῆ, πολλα„πλασιαςέον δὲ πάντας τὺς λοιπὺς τῆς ἐξισώσεως ὅρυς διὰ „τῆς τὴν ἄγνωςον διαιρύσης ποσότητος“· ἐπὶ ἦν τῦ ἀνωτέρω ὑποδείγματος $\frac{\chi}{5}=\alpha$, γράφομεν ὕτω $\chi=5\alpha$· ταὐτὸν δὲ γενήσεται, κᾂν ἡ διαιρῦσα τὴν ἄγνωςον ἕντι τῶν γραμμάτων ὑπάρχῃ. ἐπὶ γὰρ τῆς ἐξισώσεως $\frac{\chi}{\alpha}=\beta$, γράφομεν $\chi=\alpha\beta$.

425. Συμβὰν δὲ τὴν ἄγνωςον τὸν τῦ παρονομαςῦ χῶρον ἐπέχειν ἐπὶ τῦ κλάσματος, ὡς ἐν $\frac{\alpha}{\chi}=\beta$, κατὰ τόνδε τὸν κανόνα τὸ α μονάσει ἐπὶ τῦ πρώτυ τῆς ἐξισώσεως μέλυς, τὸ δὲ δεύτερον μέλος β πολλαπλασιασθήσεται ἐπὶ χ· ὅθεν ἔςαι $\alpha=\beta\chi$, ἔνθα διαιρέσει διὰ β προκύψει $\frac{\alpha}{\beta}=\chi$ (420).

426. Ἐν γένει δὲ χρώμεθα τῷ πολλαπλασιασμῷ, ἡνίκα ἆραί τι κλάσμα ἐκ τῆς ἐξισώσεως βυλόμεθα· ἔχοντες γὰρ $\chi+\frac{3}{4}=\alpha$, ἐὰν ἆραι ἐντεῦθεν τὸ $\frac{3}{4}$ κλάσμα

βȣλώμεθα, πολλαπλασιάζομεν πᾶσαν τὴν ἐξίσωσιν ἐπὶ 4 γράφοντες $4\chi + 3 = 4\alpha$· ἵνα δ' ἐκπερανθῇ ἡ ἐπίλυσις ταύτης τῆς ἐξισώσεως, γράφομεν τὸ πρῶτον $4\chi = 4\alpha - 3$ (416), εἶτα $\chi = \frac{4\alpha - 3}{4}$ (420).

427. Ἀλλὰ πλείοσι γὰρ ἐντυχόντες κλάσμασιν, ἅπαντα ἀφανιȣ̃μεν, πολλαπλασιάσαντες ἑκάτερα τὰ τῆς ἐξισώσεως μέλη ἐπὶ τὸ γινόμενον ὑφ' ἁπάντων τῶν παρονομαςῶν· ȣ̃τως ἐὰν ᾖ $\chi + \frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{4} + \frac{\chi}{5} = \alpha$, πολλαπλασιαθεῖσα πᾶσα ἡ ἐξίσωσις ἐπὶ 40, γενήσεται $40\chi + \frac{40\chi}{2} + \frac{40\chi}{4} + \frac{40\chi}{5} = 40\alpha$ (Ἀρ. 191)· ἐπεὶ δὲ $\frac{40\chi}{2} = 20\chi$, ϗ $\frac{40\chi}{4} = 10\chi$, ϗ $\frac{40\chi}{5} = 8\chi$· ἔςαι ἄρα $40\chi + 20\chi + 10\chi + 8\chi = 40\alpha$, καὶ ἀναγωγῇ τῶν ὁμοίων ὅρων (30) $78\chi = 40\alpha$· ἄρα $\chi = \frac{40\alpha}{78}$ (420).

Ἔχεις δὲ ϗ τὸν λόγον ταύτης τῆς πράξεως· πολλαπλασιαθέντος μὲν γὰρ ἑκατέρȣ τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν ἐπὶ 40, γινόμενον ὑφ ἁπάντων τῶν παρονομαςῶν, ὁ τῆς ἰσότητος λόγος ἀμετακίνητος μεμένηκε (393)· παρὰ ταῦτα δὲ, ἐπείπερ ὁ ἑκάςȣ κλάσματος παρονομαςὴς ἦν εἷς τῶν ποιητῶν τȣ̃ 40 ἀριθμȣ̃, ἐφ' ὃν ἐπολλαπλασιάσθησαν ἅπαντες οἱ τῶν κλασμάτων ἀριθμηταὶ· ἅπας ἄρα ἀριθμητὴς πολλαπλαθεὶς ἐπὶ 40, διαιρέσιμος εἶναι ὀφείλει λειψάνȣ ἄτερ διὰ τȣ̃ κατ' αὐτὸν παρονομα-

ςϐ· γινομένης δὲ τῆς διαιρέσεως ταύτης, πάντα τὰ κλάσματα ἀφανισθῆναι ἐπάναγκες (Α᾽ριθ. 108).

428. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ε᾽πείπερ πολλαπλασιάζοντες, φέρ᾽ εἰπεῖν, τὸν ὅρον $\frac{\chi}{2}$ ἐπὶ $2\times4\times5$, ὅθεν γίνεται $\frac{40\chi}{2}$, διαιρεῖν ὀφείλομεν τὸν ἀριθμητὴν 40χ διὰ 2, ὅ, τε ἐπὶ 2 πολλαπλασιασμὸς, ἀλλὰ καὶ ἡ διὰ 2 διαίρεσις, ἄχρηςα δήπȣ τυγχάνȣσιν· ἀποχρήσειεν ἄρα, εἰ πολλαπλασιάσαιμεν τὸν ἀριθμητὴν χ ἐπὶ 4×5, γινόμενον ὑπὸ δύω παρονομαςῶν ἄλλων κλασμάτων, ἀποϐαλλομένȣ ἄρδην τȣ̃ 2 παρονομαςȣ̃· ὅθεν αὐτίκα προκύψει 20χ, ὅπερ μετὰ πράξεις τινὰς ἄλλως εὑρίσκεται· ταὐτὸν δὲ νοητέον καὶ περὶ τῶν λοιπῶν κλασμάτων, τῶν τῇ προτεθείσῃ ἐξισώσει ἐμπεριεχομένων· ὅθεν ἀναφύει ἐπὶ τῆς πράξεως κανὼν ἐπιτομώτερος.

429. „Ο῞ταν ἐξίσωσίς τις πλείω περιέχῃ κλάσμα- „τα, δίχα τινὸς μετακινήσεως τῆς ἰσότητος, πολλαπλα- „σιαςέον πάντας τȣ̀ς τῶν κλασμάτων ἀριθμητὰς, ἕκαςον ἐπὶ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν παρονομαςῶν τῶν ἄλλων, ἀπο- „τιθεμένȣς πάμπαν τὸν ἑκάςȣ παρονομαςήν‟· ἐπὶ τῆς προτεθείσης ȣ̃ν ἐξισώσεως $\chi+\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{4}+\frac{\chi}{5}=\alpha$, πολλαπλασιασθήτων τό, τε ὁλοσχερὲς χ καὶ τὸ ὁλοσχερὲς α ἐπὶ 40, γινόμενον ὑπὸ πάντων τῶν παρονομαςῶν· ἀλλὰ ά. $\frac{\chi}{2}$ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ 4×5, ἀποῤῥιπτομένȣ τȣ̃ κατ᾽ αὐτὸ παρονομαςȣ̃· ὅθεν ἔςαι 20χ· β΄. $\frac{\chi}{4}$ πολ-

λαπλασιασθήτω ἐπὶ 2×5· ὅθεν 10χ· γ΄. $\frac{\chi}{5}$ ἐπὶ 2×4· ὅθεν 8χ· ἡ δ' ἐξίσωσις ἀμέσως διὰ τούτου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γίνεται $40\chi + 20\chi + 10\chi + 8\chi = 40\alpha$, ἔνθ' ἄλλως προσέδει καὶ διαιρέσεως.

Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ἐξαλειφθησομένου κλάσματος ἄλλη ποσότης ἢ παρὰ τὴν ἄγνωστον χ, μετιτέον αὐτὴν καθάπερ εἴρηται περὶ τῆς ἀγνώστου χ, μηδόλως πολλαπλασιάζοντας ἐπὶ τὸν οἰκεῖον αὐτῆς παρονομαστήν (424).

430. Ἐντεῦθεν ἄρα ἡνίκ' ἂν δύω μόνα κλάσματα ἐξισώσει τινὶ παρῶσιν, εἰς ἀπάλειψιν αὐτῶν πολλαπλασιαστέον τὸν ἑκατέρου ἀριθμητὴν ἐπὶ τὸν θατέρου παρονομαστὴν, τὰ δ' ἐνυπάρχοντα ὁλοσχερῆ ἐπὶ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν δύω παρονομαστῶν.

Προκειμένης φέρε ἐξισώσεως τῆς $\chi + \frac{\chi}{3} = \alpha + \frac{\chi}{4}$, πολλαπλασιασθήτω πρῶτον τὰ ὁλοσχερῆ χ καὶ α ἐπὶ 3×4, γινόμενον ὑπὸ τῶν δύω παρονομαστῶν, εἶτα ὁ μὲν ἀριθμητὴς $\frac{\chi}{3}$ (παρορωμένου δήπου τοῦ παρονομαστοῦ 3) ἐπὶ τὸν 4 παρονομαστήν· ὅθεν ἔσται 4χ· ὁ δὲ $\frac{\chi}{4}$ ἐπὶ τὸν 3 παρονομαστήν· ὅθεν 3χ· ἡ οὖν προτεθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $12\chi + 4\chi = 12\alpha + 3\chi$· μεταθέσει δὲ τοῦ 3χ, καὶ ἀναγωγῇ, $13\chi = 12\alpha$ (416)· ὅθεν $\chi = \frac{12\alpha}{13}$ (420).

Συμβὰν δὲ ἐντυχεῖν δυσὶ κλάσμασι, τὸν αὐτὸν ἔχουσι παρονομαστὴν, ἀποχρήσει μόνον τὰ ὁλοσχερῆ πολλαπλασιάσαι ἐπὶ τὸν παρονομαστήν· ἐὰν οὖν ἡ $\frac{20}{5} + \frac{10}{5} = 6$,

πολλαπλασιαθήτω μόνος ὁ 6 ἐπὶ 5· ἡ δ' ἐξίσωσις ἔσεται 20+10=30.

431. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἔςι μὲν ȣ̃ν τὸ πάντων τῶν τῆς Μαθηματικῆς μερῶν χρησιμώτατόν τε ϗ τερπνότατον ἀναμφιλέκτως ἡ Ἀνάλυσις, ἧς τȣ̀ς κανόνας ϗ μεθόδȣς ἐκτενέςερον ἀποδȣ̃ναι ἔδοξε· δεῖ δὲ ταῦτα ἐπαισθητότερά τε ϗ εὐκρινέςερα ἀπεργάσασθαι, προσθεμένȣς ἔςιν ἅτινα προβλημάτια, ὧν ἡ λύσις τῆς τῶν προεκτεθειμένων ἤδη θεωρίας ἐξέχεται.

432. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ὠνήσατό τις ἀγρȣ̀ς τρεῖς, ὧν ὁ μὲν δεύτερος τετίμηται τȣ̃ διπλȣ̃ τῆς τȣ̃ πρώτου τιμῆς, ὁ δὲ τρίτος τȣ̃ τριπλȣ̃ τῆς τȣ̃ δευτέρȣ· ἡ δὲ ὁλικὴ τῶν τριῶν τιμὴ ἔςιν 63000 ἀργύρια· πόσȣ ἄρα τετίμηται ἕκαςος;

ΛΥΣΙΣ ϗ ΣΧΟΛΙΟΝ. Τȣτὶ τὸ πρόβλημα ϗ τὰ τȣ́τῳ ὁμοφυῆ ἐπιλυθῆναι δύνανται ϗ διὰ τῆς μεθόδȣ τῆς ψευδȣ̃ς ὑποθέσεως (Ἀριθ. 264). ὡς ȣ̃ν ἐκεῖθι 1 κέκληται ἡ πασῶν ἐλάττων ποσότης, ȣ̃τως ἐνταῦθα κληθήσεται χ ἡ ἐλάττων τῶν τριῶν τιμὴ, εἴτ' ȣ̃ν ἡ τȣ̃ πρώτου ἀγρȣ̃· ἡ δὲ δευτέρα, τὸ διπλȣ̃ν ȣ̃σα τῆς πρώτης, ἔσεται 2χ· ἡ δὲ τρίτη, τριπλῆ ȣ̃σα τῆς δευτέρας, δηλωθήσεται διὰ 6χ· ἀλλ' αἱ τρεῖς ἅμα τιμαὶ συμπληρȣ̃σιν ἀργύρια 63000· κληθείσης ἄρα τῆς γνωςῆς ποσότητος 63000=α, τὸ ζήτημα ἐξετασθὲν κατὰ τὸν πρῶτον κανόνα (388) ἐκτεθήσεται συμβολικῶς· κατὰ δὲ τὸν δεύτερον κανόνα (389), ἐπειδὴ ἡ θέσις τȣ̃ προβλήματος ἐθέλει τὴν ἐλάττονα ποσότητα χ σὺν τῷ αὐτῆς διπλῷ 2χ, σὺν τῷ τριπλῷ τῆς δευτέρας 6χ, ἐξισȣ̃σθαι τῷ α, συςαθήσεται ἄρα ἡ ἐξίσωσις χ+2χ+6χ=α.

Τȣ̃ τοίνυν προβλήματος ἐξισώσει ȣ̃τω περιγραφέν-

τος λείπεται τὴν ἄγνωςον χ, εἴτ' ὖν τὴν ἐλάττω τιμὴν, μόνην ποιῆσαι γενέϑαι ἐπὶ ϑατέρυ τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν, ἐν δὲ ϑατέρῳ μόνας ὑπάρχειν τὰς ἐγνωσμένας (390). τυτὶ ὖν μετελευσόμεθα τόνδε τὸν τρόπον.

Α'. Ἀναγωγῇ τῶν ὁμοίων ὅρων (30) ποιῦμεν $9\chi = \alpha$. Β'. διαιρέσει δὲ ἁπάσης τῆς ἐξισώσεως διὰ 9, $\chi = \frac{\alpha}{9}$ (421)· κὴ δὴ τὸ πρόβλημα λέλυται· ἐπεὶ γὰρ

$\alpha = 63000$, κὴ $\chi = \frac{\alpha}{9}$, διαιρετέον ἀριθμητικῶς 63000 διὰ 9· εὑρεθήσεται τοίνυν ὁ πρῶτος ἀγρὸς τετιμημένος ἀργυρίων 7000· ὁ δὲ δεύτερος $2 \times 7000 = 14000$, ὁ δὲ τρίτος $3 \times 14000 = 42000$.

433. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ δὲ βάσανος τῆς τῦ προβλήματος λύσεως γίνεται, ἐὰν δειχθῇ τὸ ἀποτέλεσμα συμφωνῦν τῇ θέσει, ἢ ταῖς ϑέσεσι, τῦ προβλήματος.

Ἐπὶ γὰρ τῦ προτεθέντος ὑποδείγματος, ἐὰν ὑποτεθῇ $\chi = 7000$, εἴτ' ὖν ἡ ἐλάττων τιμὴ, συναφθῇ δὲ αὐτῇ τὸ διπλῦν, ἢ ἡ τῦ δευτέρυ τιμὴ, εἴτ' ὖν 14000, ἐπιπροςεθῇ δὲ κὴ τὸ τῆς δευτέρας τιμῆς τριπλάσιον, εἴτ' ὖν 42000, τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα ἐξισωθήσεται τῷ προτεθέντι ἀρθμῷ 63000, ὥσπερ βόλεται ἡ τῦ προβλήματος ϑέσις· ἀσφαλῶς ἄρα τὸ πρόβλημα λέλυται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Λιβάνιος διενθυμηθεὶς ἀριθμόν τινα, ἐὰν, ἔφη, τῷδε συναφθῇ τὸ τριπλῦν αὐτῦ, κὴ δὴ κὴ τὸ τετραπλῦν, ἔςαι τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα 80. Τίς ἆρ' ἔςιν ὗτος ὁ ἀριθμός;

ΛΥΣΙΣ. Εὔδηλον ὡς τοδὶ τῷ προλαβόντι ἔςιν ὁμοφυές· συςαθήσεται ὖν ἐπὶ τύτῳ ἡ ἐξίσωσις $\chi + 3\chi + 4\chi = 80$· ἀναγωγῇ δὲ, $8\chi = 80$: ἄρα $\chi = \frac{80}{8} = 10$.· διεν-

τεθύμηται ἄρα ὁ Λιβάνιος 10· ἡ δὲ βάσανος δείκνυσιν ἀσφαλῆ τὴν τοῦ προβλήματος λύσιν, ὅτι $10+30+40=80$,

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Πέτρος, Ἰάκωβος καὶ Ἰωάννης καὶ Ἀνδρέας, ἅμα ἄγουσιν ἔτη 105· καὶ ἡ μὲν τοῦ Πέτρου ἡλικία τὸ ἥμισύ ἐστι τῆς τοῦ Ἰακώβου, τοῦ δὲ, τὸ τρίτον τῆς τοῦ Ἰωάννου· αὐτοῦ δὲ, τὸ ἥμισυ τῆς τοῦ Ἀνδρέου· πόση ἐστὶν ἡ ἑκάστου τούτων ἡλικία;

ΛΥΣΙΣ. Τὸ ζήτημα, καλῶς ἐξετασθὲν κατὰ τὸν πρῶτον κανόνα (388), φαίνεται ἐπιλυόμενον, ἤτοι δι' ὁλοχερῶν, ἢ διὰ κλασμάτων.

α΄. Κληθείσης μὲν γὰρ τῆς τοῦ Πέτρου ἡλικίας χ, ἥτις οὖσα πασῶν ἐλάττων ἐστὶ τὸ ἥμισυ τῆς τοῦ Ἰακώβου, ἡ τοῦ Ἰακώβου ἔσται 2χ, ἧς τὸ τρίτον οὔσης τῆς τοῦ Ἰωάννου, ἔσται ἡ τοῦ Ἰωάννου 6χ· τέλος δὲ ταύτης τὸ ἥμισυ οὔσης τῆς τοῦ Ἀνδρέου, ἔσται ἡ τοῦ Ἀνδρέου αὐτοῦ 12χ· καὶ ἐπεὶ συλλήβδην πᾶσαι αἱ ἡλικίαι συμπληροῦσι 105 ἔτη, ἅπερ κληθήτωσαν α, ἐκ τῆς τοῦ προβλήματος θέσεως προκύψει ἡ ἐξίσωσις $\chi+2\chi+6\chi+12\chi=\alpha$· ἀναγωγῇ δὲ, $21\chi=\alpha$· ἄρα (421) $\chi=\frac{\alpha}{21}$

Διαιρεθέντος ἄρα α, εἴτ' οὖν 105, διὰ 21 εὑρεθήσεται $\chi=5$, ἡλικία τοῦ νεωτέρου· ἐκοῦν τοῦ μὲν δευτέρου ἔσται 10, τοῦ δὲ τρίτου, 30: τοῦ δὲ τετάρτου 60, ὧν τὸ ἄθροισμα ἐπ' ἀκριβὲς ἐστὶν 105.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὁ λογισμὸς τῶν κλασμάτων ἀεὶ ἐπιμηκέστερός ἐστι τοῦ τῶν ὁλοχερῶν· ἀποπειρασόμεθα μέντοι αὐτίκα καὶ τοῦδε, α΄. ἵν' ἀείποτ' ἐπὶ τῆς πράξεως ὁ τοῦ διὰ κλασμάτων ὄπισθεν τιθῆται τοῦ δι' ὁλοχερῶν· β΄. ὅταν ἡ ἐξίσωσις κλάσματα περιέχῃ, κατὰ πρῶτον αὐτῶν αὐτὴν ἀπαλλάττωμεν.

β'. Εἰλήφθω ὡς ἐγνωσμένη μονὰς, ἢ ὡς ὅρος παραθέσεως, ἡ μεγίϛη ἡλικία, εἴτ' ἒν ἡ τοῦ Α'νδρέȣ, ἧς αἱ τρεῖς ἄλλαι εἰσὶ κλάσματα, ϗ κληθήτω χ· οὐκȣ̃ν ἡ τοῦ Ι'ωάννȣ ἡλικία, τὸ ἥμισυ οὖσα τῆς τοῦ Α'νδρέου ἔϛαι $\frac{\chi}{2}$· ἡ δὲ τοῦ Ἰακώϐȣ, τὸ τρίτον οὖσα τῆς τοῦ Ἰωάννȣ, ἔσεται $\frac{\chi}{2\times3} = \frac{\chi}{6}$ (Α'ριθ. 203)· τέλος δὲ ἡ τοῦ Πέτρȣ, τὸ ἥμισυ οὖσα τῆς τοῦ Ἰακώϐȣ, ἔσεται $\frac{\chi}{6\times2} = \frac{\chi}{12}$ · ἡ δὲ τοῦ προϐλήματος θέσις, πάσας τὰς ἡλικίας τάς δε ἰσοῦθαι βȣλομένη τῷ 105 = α, ἐκτεθήσεται διὰ τῆς δε τῆς ἐξισώσεως. $\frac{\chi}{12} + \frac{\chi}{6} + \frac{\chi}{2} + \chi = \alpha$

Πρῶτον οὖν ἀπηλλάχθω τῶν κλασμάτων ἡ ἐξίσωσις, πολλαπλασιαθέντων τῶν μὲν ὁλοχερῶν α ϗ χ ἐπὶ 12 × 6 × 2 (429), ἢ ἐπὶ 144. τῶν δὲ κλασμάτων ά. τοῦ ἀριθμητοῦ χ τοῦ πρώτȣ ἐν ἀριϛεροῖς κλάσματος ἐπὶ 6 × 2, ἀποϐαλλομένȣ τοῦ παρονομαϛοῦ 12· ὅθεν 12χ· β'. τοῦ κατὰ τὸ δεύτερον κλάσμα χ ἐπὶ 12 × 2· ὅθεν 24χ· γ'. τοῦ κατὰ τὸ τρίτον, ἐπὶ 12 × 6· ὅθεν 72χ· γενήσεται οὖν ἡ ἐξίσωσις $12\chi + 24\chi + 72\chi + 144\chi = 144\alpha$· ἀναγωγῇ δὲ, $252\chi = 144\alpha$· ἄρα $\chi = \frac{144\alpha}{252}$ (420)· ἀλλὰ α = 105· ἄρα $\chi = \frac{144\times105}{252} = \frac{15120}{252} = 60$, ὃς δηλοῖ τὴν τȣ̃ Α'νδρέȣ ἡλικίαν, ἡ δὲ τȣ̃ Ἰωάννȣ ἔϛαι $\frac{60}{2} = 30$, ἡ δὲ τȣ̃ Ἰακώϐȣ, $\frac{30}{3} = 10$, ἡ δὲ τȣ̃ Πέ-

τρȣ $\frac{10}{2} = 5$· αἱ δὲ τέσσαρες αὗται ἡλικίαι ἀποπληρȣ̃σιν ἀκριϐῶς τὴν τȣ̃ προϐλήματος θέσιν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Στρατηγὸς, ἐρωτηθεὶς πόσȣς ἄγοι ςρατιώτας, εἴπερ ἔφη, εἶχον τὸ διπλȣ̃ν ἔτι ὧν ἔχω, ϗ τὸ δέκατον, ϗ πρὸς τȣ́τοις 7000, εἶχον ἂν σύμπαντας 100000· πόσȣς ἄρ' ἦγε μεθ' ἑαυτȣ̃ ςρατιώτας;

ΛΥΣΙΣ. ά. Τὸ πρόϐλημα ἐκφραθήσεται „ὁ ἀριθμὸς „τῶν ςρατιωτῶν σὺν τῷ διπλῷ τȣ̃δε τȣ̃ ἀριθμȣ̃, σὺν τῷ „δεκατημορίῳ αὐτȣ̃ σὺν 7000 ἰσȣ̃ται τῷ 100000"· ἔςω ὁ τῶν ςρατιωτῶν ἀριθμὸς χ, ȣ̃ τὸ μὲν διπλȣ̃ν $= 2\chi$, τὸ δὲ δεκατημόριον $= \frac{\chi}{10}$· κληθήτω δὲ ὁ μὲν $7000 = \alpha$, ὁ δὲ $100000 = \beta$· ἡ ȣ̃ν θέσις τȣ̃ προϐλήματος συνίςησι τὴν ἐξίσωσιν· $\chi + 2\chi + \frac{\chi}{10} + \alpha = \beta$, ἢ $3\chi + \frac{\chi}{10} + \alpha = \beta$· ἀπαλλαγῇ τῶν κλασμάτων (424), $30\chi + \chi + 10\,\alpha = 10\,\beta$· ἀναγωγῇ δὲ ϗ μεταθέσει, $31\chi = 10\beta - 10\alpha$·

ἄρα $\chi = \frac{10\beta - 10\alpha}{31}$· ἀλλὰ $\beta = 100000$, ϗ $\alpha = 7000$,

ἄρα $\chi = \frac{10 \times 100000 - 10 \times 7000}{31} = 30000$, ὁ ἀριθμὸς τῶν τῷ ςρατῷ ἐμπεριλαμϐανομένων· ὄκȣ̃ν συναφθέντων τῷ 30000 τȣ́τε διπλȣ̃ 60000, ϗ τȣ̃ δεκατημορίȣ 3000, ϗ 7000, τὸ ἄθροισμα ἅπαν ἔςαι τῷόντι 100000.

434. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἄνευ δὲ τῶν κλασμάτων, τȣ̃ δεκατημορίȣ μὲν τȣ̃ ὅλȣ ςρατȣ̃ κληθέντος χ, αὐτȣ̃ δὲ τȣ̃ ςρατȣ̃ 10χ, τȣ̃ δὲ διπλȣ̃ 20χ, ἐκ τῆς θέσεως τȣ̃ προϐλήματος ἔςαι $10\chi + 20\chi + \chi + \alpha = \beta$· ἀναγωγῇ δὲ ϗ με-

ταθέσει, $31\chi = \beta - \alpha$, ἄρα τὸ δέκατον τȣ̃ ὅλȣ ςρατȣ̃ $\chi = \frac{\beta - \alpha}{31}$, ἢ $\frac{100000 - 7000}{31} = 3000$· ὁ δὲ ὅλος ςρατὸς $3000 \times 10 = 30000$, ὡς ϗ πρὶν εὕρηται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Ἀντήνωρ εἰς Ἀθήνας παραγενόμενος τῇ μὲν πρώτῃ ἡμέρᾳ ἐδαπάνησε τὸ ἥμισυ ὧν ἔφερε χρημάτων, τῇ δὲ δευτέρᾳ, τὸ τέταρτον, τῇ δὲ τρίτῃ τὸ δέκατον, τῇ δὲ τετάρτῃ τὸ εἰκοςόν· κατελείφθησαν ȣ̃ν αὐτῷ μναῖ 10. πόσας ἆρ᾽ ἔφερε μεθ᾽ ἑαυτȣ̃;

Ἐκφρασθείη ȣ̃ν ἡ θέσις τȣ̃ προβλήματος ȣ̃τως (388) „ὁ ἀριθμὸς πασῶν, ὧν εἶχεν ὁ Ἀντήνωρ, μνῶν πρὶν ἀφικέσθαι εἰς Ἀθήνας, πλὴν τȣ̃ ἡμίσεως αὐτῶν ϗ τȣ̃ τετάρτȣ ϗ τȣ̃ δεκάτȣ ϗ τȣ̃ εἰκοςȣ̃, ἐξισȣ̃ται μναῖς 10.

Ἔςω ȣ̃ν ἅπας μὲν ὁ ἀριθμὸς $= \chi$, τὸ δ᾽ ἥμισυ $\frac{\chi}{2}$, τὸ δὲ τέταρτον $\frac{\chi}{4}$, τὸ δὲ δέκατον $\frac{\chi}{10}$, τὸ δ᾽ εἰκοςὸν $\frac{\chi}{10}$, τὸ δὲ γνωςὸν κατάλοιπον $10 = \alpha$· ἐκ τȣ́των τοίνυν ἔςαι ἡ ἐξίσωσις $\chi - \frac{\chi}{2} - \frac{\chi}{4} - \frac{\chi}{10} - \frac{\chi}{20} = \alpha$.

Ἀπαλλαγῇ τοίνυν τῶν κλασμάτων κατὰ τὰ προοροθετηθέντα, ἔςαι $1600\chi - 800\chi - 400\chi - 160\chi - 80\chi = 1600\,\alpha$· ἀναγωγῇ δέ, $160\chi = 1600\,\alpha$· ἄρα $\chi = \frac{1600\,\alpha}{160}$.

ἀλλὰ $\alpha = 10$, ἄρα $\chi = \frac{16000}{160} = 100$· ἐὰν δ᾽ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ 100 τὰ προδηλωθέντα μέρη ἐν τῷ προβλήματι, καταλειφθήσονται 10.

Ἵνα δὲ κλασμάτων χωρὶς τὸ πρόβλημα ἐπιλυσώμεθα

ἔϛω $\chi = \frac{1}{20}$ τȣ̃ ἀθροίσματος· ȣ̓κȣ̃ν $2\chi = \frac{1}{10}$ τȣ̃ αὐτȣ̃ ὅλȣ, ϗ $5\chi = \frac{1}{4}$, ϗ $10\chi = \frac{1}{2}$, ϗ $20\chi =$ τῷ ὅλῳ τῶν χρημάτων τȣ̃ Πέτρȣ ἀθροίσματι· ὅθεν ἡ ἐξίσωσις $20\chi - 10\chi - 5\chi - 2\chi - \chi = \alpha$· ἀναγωγῇ δὲ, $2\chi = \alpha$· ἄρα $\chi = \frac{\alpha}{2} = \frac{10}{2} = 5$· δηλοῖ δὲ τὸ χ τὸ εἰκοσὸν μέρος τῶν χρημάτων, ἄρα $5 \times 20 = 100$ ἔϛι τὸ ὅλον τῶν χρημάτων τȣ̃ Α᾽ντήνωρος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛʹ. Ε᾽ργάτης τις εὕρηται ἔχων τὸ πέμπτον τῶν 9 ἀργυρίων συνάμα τῷ πέμπτῳ τȣ̃ μισθȣ̃, ὃν ἀπηνέγκατο ἐν ἑϐδομάσι τρισί· τȣ́τῳ δὲ συνάψας τὸν πέντε ἑϐδομάδων μισθὸν, εὕρηται ἔχων ἀργύρια 41· ἐπὶ πόσῳ ȣ̃ν ἑκάϛης ἑϐδομάδος μεμίσθωται;

ΛΥΣΙΣ. Ἡ θέσις τȣ̃ προϐλήματος ἔϛιν ἄυτη „τὸ „πέμπτον τῶν 9 ἀργυρίων, ϗ τȣ̃ τριπλȣ̃ ἑϐδομιαίȣ μισθȣ̃, „σὺν τῷ πενταπλῷ ἑϐδομιαίῳ μισθῷ, ἰσȣ̃ται 41 ἀργυρίοις“. ἔϛω ȣ̃ν χ μὲν ὁ ἑϐδομιαῖος μισθὸς, α δὲ $= 9$, ϗ $\beta = 41$, ἐξ ὧν κατὰ τὴν θέσιν ἔϛαι $\frac{\alpha + 3\chi}{5} + 5\chi = \beta$· ἀπαλλαγῇ τῶν κλασμάτων (424), $\alpha + 3\chi + 25\chi = 5\beta$· μεταθέσει δὲ ϗ ἀναγωγῇ, $28\chi = 5\beta - \alpha$· ἄρα $\chi = \frac{5\beta - \alpha}{28}$, ἢ $\chi = \frac{5 \times 41 - 9}{28} = 7$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζʹ. Ποιμήν τις, ἐρωτηθεὶς πόσα βόσκοι πρόϐατα, ἡ διαφορὰ, ἔφη, τȣ̃ τετάρτȣ ϗ δεκάτȣ μέρȣς τῶν προϐάτων μȣ, ἔϛι 15· πόσα τοίνυν ποιμάινει;

ΛΥΣΙΣ. Ε῎ϛω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν προϐάτων, ϗ $\alpha = 15$· ἡ δὲ θέσις συνίϛησι προδήλως τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi}{4} - \frac{\chi}{10}$

$=\alpha$· ἀπαλλαγῇ δὲ τῶν κλασμάτων, $10\chi - 4\chi = 40\alpha$· ἄρα $6\chi = 40\alpha$, κ̓ $\chi = \frac{40\alpha}{6} = \frac{600}{6} = 100$· τόσα ἄρα ποιμάινει.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η΄. Ὁ Ἰωάννης τῇ μὲν πρώτῃ ἡμέρᾳ ἐδαπάνησε 5 ἀργύρια ἔλαττον, ἢ τῇ δευτέρᾳ· τῇ δὲ πρώτῃ κ̓ τῇ δευτέρᾳ ὁμȣ, τὸ ἥμισυ τῆς τρίτης· συλλήβδην δὲ, 75 ἀργύρια· πόσα ἐν ἑκάςης ἐδαπάνησεν ἡμέρας;

ΛΥΣΙΣ. Ἡ τῆς πρώτης ἡμέρας δαπάνη κληθήτω χ, κ̓ ἔςω $5=\alpha$· ȣ̓κȣ̃ν ἡ τῆς δευτέρας ἔςαι $\chi+\alpha$, ἡ δὲ τῆς δευτέρας κ̓ τῆς πρώτης ἅμα, $2\chi+\alpha$· ἡ δὲ τῆς τρίτης, διπλῆ ȣ̓̃σα τῶν δύω προτέρων ἡμερῶν, ἔςαι $4\chi+2\alpha$· ὑποτεθείσης δὲ $\beta=75$, ἔςαι $2\chi+\alpha+4\chi+2\alpha=\beta$· ἄρα $6\chi+3\alpha=\beta$, κ̓ $6\chi=\beta-3\alpha$, κ̓ $\chi=\frac{\beta-3\alpha}{6}=\frac{75-15}{6}=10$, κ̓ $\chi+\alpha=15$, κ̓ $4\chi+2\alpha=50$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ΄. Πατήρ τις ἐν τῇ ἑαυτȣ̃ διαθήκῃ ȣ̓́τως ἀποφάινεται κληρονόμȣς τȣ̀ς ἑαυτȣ̃ ὑȣ̀ς, ὥςε τὸν μὲν πρεσβύτατον κομίσασθαι ἀργύρια 1000 σὺν τῷ ἐννάτῳ μέρει τῆς παρὰ ταῦτα λοιπῆς περιȣσίας, τὸν δὲ δεύτερον 2000 σὺν τῷ ἐννάτῳ μέρει τῆς περιλοίπȣ περιȣσίας, μετὰ τὴν ἀφάιρεσιν τῆς τȣ̃ πρώτȣ μερίδος κ̓ τῶν 2000, κ̓ ἑξῆς ὡσάυτως ἕκαςον τῶν λοιπῶν ὑέων· ἀλλὰ τέλος ἴσον ἕκαςος κομισάμενος εὑρέθησαν· πυνθάνομαι ȣ̓̃ν, πόση μὲν ἦν ἡ περιȣσία, πόσοι δ᾽ ἦσαν οἱ ὑεῖς;

ΛΥΣΙΣ. Κληθήτω ὅλη μὲν ἡ περιȣσία χ, 1000 δὲ $=\alpha$· ἐπεὶ ȣ̓̃ν ὁ πρωτότοκος λήψεται 1000 σὺν τῷ ἐννάτῳ μέρει τῆς μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν 1000 περιλειπομένης περιȣσίας, ἡ ἀυτȣ̃ μερὶς ἔςαι $\alpha+\frac{\chi-\alpha}{9}$, ἥτις ἀναγω-

γῇ εἰς πλείω εὐμάρειαν ἔςαι ($\frac{9\alpha}{9}$ ὄντος $= \alpha$) $\frac{9\alpha+\chi-\alpha}{9}$ $= \frac{8\alpha+\chi}{9}$· κείσθω δὲ $\frac{8\alpha+\chi}{9} = \rho$ (403).

Τὸ ἐν κατάλοιπον τῦ χ, ὃ ἀφήρηται ἡ μερὶς ρ, ἔςαι $\chi - \rho$· ἡ δὲ τῦ δευτέρυ, ἐσα 2000 σὺν τῷ ἐννάτῳ μέρει τῦ $\chi - \rho - 2000$, ἔςαι $2\alpha + \frac{\chi-\rho-2\alpha}{9} = \frac{18\alpha+\chi-\rho-2\alpha}{9}$ $= \frac{16\alpha+\chi-\rho}{9}$.

Ἐπεὶ δὲ πάντες ἴσον ἐκομίσαντο, ἔςαι ἄρα ἡ τῦ πρώτυ μερὶς $\frac{8\alpha+\chi}{9} = \frac{16\alpha+\chi-\rho}{9}$ μερίδι τῦ δευτέρυ· ἐπεὶ δὲ ταῦτα τὰ δύω κλάσματα, ἰσάλληλα ὄντα, ἔχυσι τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν 9, ἀνάγκη πᾶσα καὶ τὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν ἰσῦσθαι ἀλλήλοις· ἔςαι ἄρα $8\alpha + \chi = 16\alpha + \chi - \rho$· μεταθέσει δὲ καὶ ἀναγωγῇ· $\rho = 8\alpha$.

Ἀντικαταςάσης δὲ ἀντὶ ρ τῆς προτέρας δυνάμεως $\frac{8\alpha+\chi}{9}$, γενήσεται $\frac{8\alpha+\chi}{9} = 8\alpha$· ἄρα $8\alpha + \chi = 72\alpha$, καὶ (416) $\chi = 72\alpha - 8\alpha = 64\alpha = 64000$ ἀργυρίοις, ἃ ἦν ἡ σύμπασα πατρῴα τῶν ὑέων κληρονομία.

Ἐπεὶ δὲ ἡ τῦ πρωτοτόκυ μερὶς ἰσῦται ταῖς ἑκάςυ τῶν λοιπῶν, τίθεται δὲ ἐν τῷ προβλήματι ἴση 1000 σὺν τῷ ἐννάτῳ μέρει τῦ 64000 — 1000, εἴτ' ἐν τῦ 63000, ἔςαι ἄρα ἑκάςη μερὶς 8000· διαιρεθέντος τοίνυν τῦ 64000 διὰ 8000, πορισθήσεται ὁ τῶν ὑέων ἀριθμός· εἰσὶν ἄρα ὑεῖς ὀκτώ.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἀτενῶς ἐπιςήσαντες τῷδε τῷ προβλή-

ματι, γνωσόμεθα ϗ μυρίων ἄλλων ὁμοίων τὴν γένεσιν· ἐὰν γὰρ τεθῇ ὁ μὲν τὰς ἑκατοντάδας, ἢ χιλιάδας, τῶν ἀργυρίων ἐμφαίνων ἀριθμὸς ὁ τετράγωνος εἶναι ἀπὸ τȣ͂ τῶν τέκνων ἀριθμȣ͂, τὸ δὲ πηλίκον μέρος τȣ͂ καταλοίπȣ, ὅ ἐςιν ἐπιπροςεθειμένον ἑκάςῳ, ἔχῃ παρονομαςὴν τὸν ἀριθμὸν τῶν τέκνων σὺν μονάδι, χηματιϑήσεται ἅπαν πρόϐλημα. Πατήρ τις, φέρ᾽ εἰπεῖν, ἔχει τέκνα ἕξ· ȣ̓κȣ͂ν τεθήτω ἀργύρια 36000· τεθήτω δὲ τὸ δοθὲν τῷ πρώτῳ μέρος 1000 σὺν τῷ ἑπτημορίῳ τῆς παρὰ ταῦτα περιȣσίας, ϗ ἑξῆς, ὡς ϗ ἀνωτέρω· ϗ δὴ τὰ ἕξ τέκνα κομιȣ͂νται μερίδας ἴσας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι΄. Δυοῖν σωμάτων τὴν αὐτὴν τρεχόντων ὁδὸν, τȣ͂ δευτέρȣ ταχυτέρȣ ὄντος· τȣ͂ ἀποςήματος, ᾧ ἀλλήλων ἀπέχȣσι, γνωϑέντος, ϗ τȣ͂ λόγȣ τῆς αὐτῶν ταχυτῆτος, ὁρίσαι τὸν τόπον, ȣ͂ τὸ δεύτερον ἀπαντήσει τῷ πρώτῳ.

ΛΥΣΙΣ. Κληθήτω α τὸ ἐγνωσμένον ἀπόςημα, ὃ ἀπέχȣσι τὰ σώματα· χ δὲ τὸ διάςημα, ὃ διέδραμε τὸ πρῶτον σῶμα πρὶν ἀπαντηθῆναι, ϗ ν ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων, εἶτ᾽ ȣ͂ν ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐμφαίνων ποσαπλῇ τῆς τȣ͂ πρώτȣ ταχύτητι τρέχει τὸ δεύτερον.

Σαφὲς ȣ͂ν ὅτι τὸ δεύτερον σῶμα, ἵν᾽ ἀπαντήσῃ τῷ πρώτῳ, ὀφείλει διελθεῖν τὸ ἀπόςημα α, ᾧ ἀλλήλων ἀφίςανται σὺν τῷ διαςήματι χ, ὃ ὥδευσε τὸ πρῶτον πρὶν ἀπαντηθῆναι· τὸ ἄρα διάςημα, ὃ ὁδεύσει τὸ δεύτερον σῶμα ἕως τ᾽ ἂν ἀπαντήσῃ τῷ πρώτῳ, ἔςαι $\alpha + \chi$.

Ἀλλ᾽ ἔτι τὸ διάςημα $\alpha + \chi$, ὃ διώδευσε τὸ δεύτερον σῶμα, ἔςιν ἴσον τῷ χ διαςήματι τῷ διοδευθέντι ὑπὸ τȣ͂ πρώτȣ τοσάκις, ὁσάκις πλείονι τῆς τȣ͂ πρώτȣ διαδραμεῖται ταχυτῆτι τὸ δεύτερον· ἔςιν ἄρα ἴσον τῷ χ πολλαπλασιαϑέντι ἐπὶ ν, εἶτ᾽ ȣ͂ν $\chi \times \nu = \chi\nu$· ἐκ τȣ́των ȣ͂ν ἡ ἐξίσωσις $\alpha +$

$\chi = \nu\chi$, ἔκθεσις τῆς γενικῆς τȣ̃ ἀνὰ χεῖρας προβλήματος θέσεως ὑπὲρ παντὸς τȣ́τῳ ὁμοφυȣ̃ς προβλήματος.

Μεταθέσει, $\alpha = \nu\chi - \chi$· ἵνα δὲ μόνη γένηται ἡ χ ἐπὶ θατέρȣ τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν, ζητητέον, δι' ἧς ἂν ποσότητος πολλαπλασιασθεῖσα ἡ χ ἀποδοίη $\nu\chi - \chi$· εὑρίσκεται δὲ (51 κτ.) $\nu - 1$· ἐπ' αὐτὴν γὰρ πολλαπλασιασθεῖσα ἡ χ ἀποτελεῖ $\nu\chi - \chi$· διαιρεθεῖσα ȣ̃ν ἡ ἐν χερσὶν ἐξίσωσις διὰ $\nu - 1$, ἀποδώσει $\chi = \frac{\alpha}{\nu - 1}$· λέλυται ἄρα ἐν γένει τὸ πρόβλημα.

Ἐκ δὲ δὴ τȣ́τȣ τȣ̃ γενικȣ̃ τύπȣ $\chi = \frac{\alpha}{\nu - 1}$, πάντα τὰ μερικὰ προβλήματα, τὰ τῆς αὐτῆς τῷ προλαβόντι γενικῷ φύσεως, ἐπιλυθήσονται· ἐφαρμοσόμεθα τοίνυν τȣτὶ τρισὶ τοῖς ἑπομένοις προβλήμασι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑʹ. Βασιλέως τινὸς πορευομένȣ εἴς τινα πόλιν, γραμματοφόρος, ἀφιστάμενος τȣ̃ χώρȣ, ἔνθα ὑπῆρχεν ὁ βασιλεὺς, τρισὶ λεύγαις, βαδίζων μέντοι ταχύτητι τριπλῇ τῆς τȣ̃ βασιλέως, φθάσας ἐνεχείρισεν αὐτῷ ἐπιστολήν· ὁρίσαι τὸν τόπον, ȣ̃ συνήντησε τῷ βασιλεῖ.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπὶ τȣ̃ γενικȣ̃ τύπȣ, τὸ μὲν ἀπόστημα $\alpha = 3$, ὁ δὲ λόγος $\nu = 3$, ἡ δ' ἐξίσωσις ἔσται $\chi = \frac{3}{3 - 1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$· τὸ ἄρα διάστημα, ὃ βαδιεῖται ὁ βασιλεὺς πρὶν συναντηθῇ, ἔσται λεύγη μία μεθ' ἡμισείας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒʹ. Τιθεμένȣ τȣ̃ μὲν ὡροδείκτȣ ἐπί τινος δεδομένȣ λεπτȣ̃, τȣ̃ δὲ λεπτοδείκτȣ ἐφ' ἑτέρȣ καὶ τȣ́τȣ δεδομένȣ, ὁρίσαι τὸν χῶρον, ἔνθα συναντήσει ὁ λεπτοδείκτης τῷ ὡροδείκτῃ.

ΛΥΣΙΣ. Τȣ̃ λεπτοδείκτȣ ταχυτῆτι δωδεκαπλῆ τῆς τȣ̃ ὡροδείκτȣ βαδίζοντος, ἔςαι ἐπὶ τȣ̃ γενικȣ̃ τύπȣ $\nu = 12$· ἄρα $\chi = \frac{\alpha}{11}$

Οὐκȣ̃ν τιθεμένȣ, φέρε, τȣ̃ μὲν ὡροδείκτȣ ἐπὶ τῶν 11 ὡρῶν, τȣ̃ δὲ λεπτοδείκτȣ ἐπὶ τῶν 12, τὸ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόςημα ἔςαι $\alpha = 11$, εἴτ' ȣ̃ν ἕνδεκα κατατομαὶ, ἃς ὁ λεπτοδείκτης ὀφείλει βαδίσαι ἕς τ' ἂν γένηται ἔνθα νυνὶ κεῖται ὁ ὡροδείκτης· ȣ̓κȣ̃ν ἔςαι $\chi = \frac{\alpha}{11} = \frac{11}{11} = 1$, ὅ ἐςιν, ὁ ὡροδείκτης πρὶν συναντηθῆναι τῷ λεπτοδείκτῃ διανύσει ὥραν μίαν· συναντήσȣσιν ἄρα ἀλλήλοις κατὰ τὴν μεσημβρίαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ΄. Σωμάτων δύω, τὴν ἐναντίαν ἀλλήλοις πορευομένων, γινωσκομένȣ τȣ̃ ἀπ' ἀλλήλων ἀποςήματος α, καὶ τȣ̃ τῶν ταχυτήτων λόγȣ ν, ὁρίσαι τὸν τόπον, ἔνθ' ἂν ἀλλήλοις συναντήσειαν.

ΛΥΣΙΣ. Κληθέντος χ τοῦ δρόμȣ, ὃν διήνυσε τὸ ἡττοταχὲς σῶμα, ὁ, ὃν ἐβάδισε τὸ μειζοταχὲς, ἔςαι χ εἰλημμένον τοσάκις, ὁσαπλῆ ἐςιν αὐτȣ̃ ἡ ταχύτης τῆς θατέρȣ, εἴτ' ȣ̃ν $\chi\nu$· ἀλλὰ ταῦτα τὰ δύω σώματα βαδιȣ̃νται ἅμα τὸ διάςημα α, ᾧ ἀπέχȣσιν ἀλλήλων, ἕς τ' ἂν συναντηθῶσιν· ȣ̓κȣ̃ν ἔςαι $\chi + \nu\chi = \alpha$· ȣ̓κȣ̃ν $\chi = \frac{\alpha}{\nu + 1} = \text{P}$ (51), ἐξίσωσις γενικὴ ξυντελȣ̃σα μερικωτέροις προβλήμασιν αὐτῷ ὁμοφυέσιν, οἷον τὸ ἐφεξῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔ΄. Εὐθύφρων καὶ Φίλιππος κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον πορεύονται, ὁ μὲν ἐκ Λαρίσσης εἰς Θεσσαλονίκην, ὁ δὲ Φίλιππος Θεσσαλονίκηθεν εἰς Λάρισσαν· καὶ ὁ μὲν

Εὐθύφρων ταχύτητι διπλῇ περιπατεῖ ἢ ὁ Φίλιππος· ἀπέχουσι δ' αἱ πόλεις ἀλλήλων ὥρας 60· ὁρίσαι τὸν τόπον, ἔνθα συναντηθήσονται.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπὶ τῆς Ρ ἐξισώσεως ἐστὶν $\alpha = 60$, καὶ $\nu = 2$, ἡ δ' ἐξίσωσις αὐτὴ γίνεται $\chi = \frac{60}{2+1} = \frac{60}{3} =$ 20· ἄρα μετὰ παρέλευσιν 20 ὡρῶν συναντήσονται ἀλλήλοις οἱ ὁδοιπόροι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Προβλήματα τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ἐκ πλειόνων ἐξισώσεων συγκροτούμενα.

435. Α΄. Μιᾶς παρούσης ἀγνώστου ποσότητος, εἰς ἔκθεσιν τῶν θέσεων, καὶ μὴν καὶ λύσιν τοῦ προβλήματος, μιᾶς μόνης ἐξισώσεως χρεία.

Β΄. Συχνάκις συμβαίνει, ὡς παρατηρεῖν ἔξεστιν ἐν τοῖς πλείοσι τῶν προεκτεθέντων προβλημάτων, τὴν τοῦ προβλήματος ἔκφρασιν πλειόνων δοκεῖν ἀγνώστων περιεκτικὴν, καίτοι πράγματι μιᾶς καὶ μόνης περιεχομένης· γνωσθείσης γὰρ ἅπαξ τῆς κατὰ μίαν ποσότητα δυνάμεως αἱ τῶν λοιπῶν αὐτίκα κατάδηλοι γίνονται.

Ἐπὶ τοῦ πρώτου, φέρε, προβλήματος (412) οὐχ' ὅπως ἡ τοῦ πρώτου ἀγροῦ ἠγνοεῖτο τιμὴ, ἀλλὰ δὴ καὶ αἱ τῶν ἄλλων· ἐκείνης μέντοι γνωσθείσης, αἱ ἄλλαι αὐτόματοι ἠκολούθησαν. ἐστὶ μέντοι ἐν τούτοις καὶ δυσὶ χρήσασθαι ἀγνώστοις.

436. Ὁ δὲ ὑπὲρ πάντας ἀπαραίτητος κανὼν ἐστὶν, ἵν' εὖ ἐκτεθῇ ἡ θέσις, ἢ αἱ θέσεις τοῦ προβλήματος, ἤ-

τοι διὰ μιᾶς, ἢ ϗ διὰ πλειόνων συνεςῶτος ἐξισώσεων· διάφοροι δὲ ὁδοὶ, καίτοι ἐπιτομώτεραι, ἢ ἐπιμηκέςεραι, ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἀγαγεῖν τέλος δύνανται· ὅθεν οἱ Μαθηματικοὶ οὐκ ἀεὶ μιᾷ, ἀλλὰ ϗ πλείοσιν ἐξισώσεσιν, ἐπιλύουσι τὰ προβλήματα.

437. Ὅταν μὲν αἱ προβληματικαὶ θέσεις ἰσάριθμοι ὦσι τοῖς ἀγνώςοις ποσοῖς, τὸ πρόβλημα καλεῖται ὡρισμένον, ὡς ἑκάςης ἀγνώςου μίαν μονίμην τε ϗ ὡρισμένην ἐπιδεχομένης δύναμιν· Τὸ δὲ τοιοῦτο πρόβλημα καθ' ἕνα μόνον τρόπον ἐπιλύεται.

438. Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγνώςων ὑπέρκειται τοῦ τῶν θέσεων, ὡς ἑκάςης ἀγνώςου πολλὰς ὑπερχομένης δυνάμεις, τὸ πρόβλημα ἔςαι ἀόριςον, ϗ πλειόνων ἐπιλύσεων ἐπιδεκτικόν. Ἐὰν, φέρε, προτεθῇ, τίς ἂν εἴη ὁ ἀριθμὸς, ὃς ἐπὶ τρία πολλαπλασιασθεὶς ἀποτελοίη 15; τὸ πρόβλημα ἔςαι ὡρισμένον· εἴγε $3\chi = 15$, ϗ $\chi = \frac{15}{3} = 5$, ἡ μόνη τοῦ χ δύναμις, ὁ μόνος δυνάμενος ἀριθμὸς ἐπιλύσασθαι τὸ πρόβλημα· εἰ δὲ προβληθεῖεν ἀριθμοὶ δύω χ, υ, ὧν τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖ 15, ἡ ἐξίσωσις $\chi + \upsilon = 15$ μυριαχῶς ἂν ἐπιλυθείη· γινομένης γὰρ $\chi = 15 - \upsilon$, παντοίας ἂν ἐπ' ἄπειρον ὑπέλθοι δυνάμεις ὁλοχερεῖς τε ϗ κλασματώδεις, ναὶ μὴν ϗ ὑπαρκτικαὶ ϗ λειπτικὰς ἡ υ. ἐὰν μὲν γὰρ ὑποτεθῇ $\upsilon = 14\frac{1}{2}$, ἔςαι $\chi = \frac{1}{2}$, ἐὰν δ' $\upsilon = 13$, $\chi = 2$ κτ. ἀλλὰ δὴ οὐχ ἧττον ἐπιλυθήσεται τὸ πρόβλημα, ἐὰν ὑποτεθῇ $\upsilon = 15$, ϗ $\chi = 0$, $\upsilon = 16$, ϗ $\chi = -1$, ϗ ὡσαύτως ἐπ' ἄπειρον· ἀεὶ γὰρ ἐξέςαι εἰπεῖν, ὅτι $\chi + \upsilon = 15$· ἀλλὰ περὶ μὲν τῶν ἀορίςων προβλημάτων ὕςερον, περὶ δὲ τῶν ὡρισμένων ϗ δὴ ῥητέον.

439. Οἱ ἐπὶ τῶν ἐκ μιᾶς ἐξισώσεως συνεςώτων

προβλημάτων κανόνες τηρητέοι οἱ αὐτοὶ κἀπὶ τῶν ἐκ πλειόνων· τουτοισὶ μέντοι προσδεῖ καὶ εἰδικωτέρου τινὸς κανόνος.

440. Λαβὼν ἐπὶ τῆς πρώτης ἐξισώσεως τὴν δύναμιν τῆς ἑτέρας τῶν ἀγνώστων, ὡς εἰ καὶ ἐλέλυτο τὸ πρόβλημα τῇ ἐπὶ θάτερα τῆς ἐξισώσεως μονώσει τῆς ἀγνώστου (416 κτ.), ἀντικαθίσαθι ταύτην ἐπὶ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἀντ᾽ αὐτῆς ταύτης τῆς ἀγνώστου· Τῆς δευτέρας ἐξισώσεως μίαν ἤδη ἄγνωστον περιεχούσης, ἐπίλυσον ταύτην κατὰ τοὺς ἄρτι ἀποδεδομένους κανόνας· μετὰ τοῦτο δὲ, ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως τὴν δύναμιν τῆς ἐν αὐτῇ ἀγνώστου ἐν ἐγνωσμένοις ποσοῖς θηρασάμενος, ἀντικαθίσαθι ἐν τῇ πρώτῃ, ἣν ἐπιλύσας ἕξεις ἐν ἐγνωσμένοις ποσοῖς τὴν δύναμιν τῆς πρώτης ἀγνώστου· ἡ δὲ πρᾶξις καλείσθω Ἀντικατάστασις.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κείσθων ἐξισώσεις δύω · $\chi + \upsilon + \alpha = \beta$ (A) $\chi - 2\upsilon = \gamma$ (B) ποίησον οὖν μόνην τὴν χ ἐπὶ τῆς A ἐξισώσεως $\chi = \beta - \upsilon - \alpha$· ἀντὶ οὖν χ ἀντικατάστησον ἐν τῇ B τὴν δύναμιν $\beta - \upsilon - \alpha$, καὶ δὴ ἔσαι $\beta - \upsilon - \alpha - 2\upsilon = \gamma$, καὶ ἀναγωγῇ $\beta - 3\upsilon - \alpha = \gamma$· ἐν ταύτῃ τοίνυν τῇ ἐξισώσει μιᾶς παρούσης ἀγνώστου τῆς υ, ἡ κατ᾽ αὐτὴν δύναμις εὐχερῶς θυρευθήσεται· μεταθέσει γὰρ ἔσαι $\beta - \alpha - \gamma = 3\upsilon$, καὶ $\upsilon = \frac{\beta - \alpha - \gamma}{3}$.

Ἑξῆς δὲ ἀντικατάστησον ἐν τῇ A τὴν ἤδη εὑρημένην τῆς υ δύναμιν $\frac{\beta - \alpha - \gamma}{3}$ ἀντὶ τῆς υ· καὶ δὴ ἔσαι ἡ A ἐξίσωσις $\chi + \frac{\beta - \alpha - \gamma}{3} + \alpha = \beta$.

Ἐπεὶ δ᾽ ἐν ταύτῃ μόνῃ ἔνεστιν ἄγνωστος ἡ χ, ῥᾷστα ἐπιλυθήσεται ἡ ἐξίσωσις ἐπὶ τὸ ἐν γνωστοῖς εὑρεθῆναι τὴν τῆς χ δύναμιν· καὶ γὰρ ἀπαλλαγῇ μὲν τοῦ κλάσματος ἔσται $3χ+β-α-γ+3α=3β$, μεταθέσει δὲ, $3χ=3β-β+α+γ-3α$, ἀναγωγῇ δὲ, $3χ=2β-2α+γ$· διαιρέσει δὲ τέως, $χ=\frac{2β-2α+γ}{3}$.

ἐπεὶ δ᾽ ἐκ ταύτης καὶ τῆς υ ἡ δύναμις ῥᾷστα εὑρίσκεται, τὸ πρόβλημα ἄρα ὁλοσχερῶς λέλυται.

441. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Δοθέντος τοῦ ἀθροίσματος δύω ποσῶν, καὶ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς, εὑρεῖν ἑκάτερον.

ΛΥΣΙΣ. Κληθήτω πρὸς τὸ δοκοῦν τὸ μὲν ἔλαττον χ, τὸ δὲ μεῖζον τῶν ποσῶν υ, καὶ τὸ μὲν ἄθροισμα α, ἡ δὲ διαφορὰ β.

Ὥσπερ οὖν δύω ἄγνωστοι ποσότητες πάρεισι τῷ προβλήματι τῷδε, ἥτε χ καὶ υ· οὕτω δὴ καὶ θέσεις δύω· καὶ ἡ μὲν πρώτη τίθησιν, ὅτι αἱ δύω υ καὶ χ ἅμα ληφθεῖσαι ἀποτελοῦσιν ἐγνωσμένον ἄθροισμα τὸ α, ἐξ ἧς ἀναφύει ἡ ἐξίσωσις $χ+υ=α$· ἡ δ᾽ ὡς ἡ ὑπεροχὴ, ᾗ ἡ μείζων υ ὑπερέχει τῆς ἐλάττονος χ, ἔστιν ἐγνωσμένη, καὶ ἴση τῇ β. ὅθεν προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $υ-χ=β$.

Συσταθεισῶν οὖν τῶν ἐξισώσεων οὕτω, παρὰ τοὺς γενικοὺς κανόνας (388, 389) χρηστέον ἐνταῦθα ἰδίως καὶ τῇ ἀντικαταστάσει, ἥτις ξυντελεῖ τῇ ἐπιλύσει τῶν ἐκ δύω ἐξισώσεων συνεστηκότων προβλημάτων (441).

Α΄. Ἐπὶ τῆς πρώτης ἐξισώσεως θηρευτέον τὴν τῆς χ δύναμιν οὕτω $χ=α-υ$.

Β΄. Ἀντὶ χ ἐπὶ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἀντικαταστατέον τὴν ἤδη εὑρημένην αὐτῆς δύναμιν $α-υ$· ἔσται τοί-

γυν $\upsilon - \alpha + \upsilon = \beta$· μεταθέσει δὲ ϰ̀ ἀναγωγῇ, $2\upsilon = \beta + \alpha$· ἄρα $\upsilon = \frac{\beta + \alpha}{2}$.

Γʹ. Ἀντικαταςατέον ἐπὶ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἀντὶ υ τὴν ἐν γνωςοῖς δύναμιν αὐτῆς $\frac{\beta + \alpha}{2}$. γενήσεται τοιγαρȣ̃ν $\chi + \frac{\beta + \alpha}{2} = \alpha$· ἀπαλλαγῇ τȣ̃ κλάσματος $2\chi + \beta + \alpha = 2\alpha$, μεταθέσει δὲ ϰ̀ ἀναγωγῇ, $2\chi = \alpha - \beta$. ἄρα $\chi = \frac{\alpha - \beta}{2}$.

442. Ἔκφρασις "γινωσκομένȣ τοῦ ἀθροίσματος „δύω ποσῶν, ϰ̀ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς, ἡ μὲν μείζων διχ„τυπωθήσεται τῷ $\frac{\alpha + \beta}{2}$, εἴτ' ȣ̃ν ἴση ἔςαι τῷ αὐτῶν „ἡμιαθροίσματι σὺν τῇ ἡμιδιαφορᾷ, ἡ δ' ἐλάττων τῷ „$\frac{\alpha - \beta}{2}$, ὅ ἐςιν, ἴση ἔςαι τῷ ἡμιαθροίσματι πλὴν τῆς „ἡμιδιαφορᾶς".

Ἐκ ταύτης τῆς γενικῆς ἐκφράσεως ἀπαρυόμεθα τὴν τῶν δύω ἑξῆς προβλημάτων, ναὶ μὴν ϰ̀ ἄλλων τȣ́τοις ὁμοφυῶν, ἐπίλυσιν· ȣ̓ μὴν ἀλλὰ τὰ μέγιςα ἡμῖν ἐν τοῖς ἐφεξῆ ξυντελέσει, θεμέθλȣ δίκην ϰ̀ βάσεως ὑποτιθεμένη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Βʹ. Πέτρος ϰ̀ Ἰωάννης συνάμα ἐκέρδησαν ἀργύρια 66000· ἀλλ' ὁ Πέτρος πλεῖον τȣ̃ Ἰωάννȣ ἀργυρίοις 400· πόσον ἆρ' ἔςι τὸ ἑκάςȣ κέρδος.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῆς γενικῆς ἐκφράσεως ὁ μὲν Πέτρος ἐκέρδησε τὸ ἥμισυ τῶν 66000 σὺν τῷ ἡμίσει τῶν 400, εἴτ' ȣ̃ν 33200, ὁ δὲ Ἰωάννης τὸ ἥμισυ τῶν 66000 πλὴν

τȣ̃ ἡμίσεως τῶν 400, εἴτ' ȣ̃ν 32800· τὸ δὲ ἄθροισμα τȣ́των ἀκριβῶς ἐςὶ 66000.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Στρατηγοὶ δύω συνάμα ἄγουσι ςρατιώτας 120000· ἀλλὰ τȣ̃ μὲν ὁ ἀριθμὸς τῶν ςρατιωτῶν ὑπερέχει τȣ̃ θατέρȣ τῷ 10000· πόσȣς ἄρ' ἄγει ἑκάτερος;

ΛΥΣΙΣ. Ο῾ μὲν τὸ ἥμισυ τῶν 120000 σὺν τῷ ἡμίσει τῶν 10000, εἴτ' ȣ̃ν 65000, ὁ δὲ τὸ ἥμισυ τῶν 120000 πλὴν τȣ̃ ἡμίσεως τῶν 10000, εἴτ' ȣ̃ν 55000.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸ προεκτεθὲν γενικὸν πρόβλημα, ταὐτὸν δὲ ῥητέον ϗ περὶ τῶν εἰδικωτέρων αὐτῷ ὁμοφυῶν, δύναται ἐπιλυθῆναι ϗ διὰ μιᾶς ἐξισώσεως ȣ̃τω (436).

Τῆς ἐλάττονος τῶν δύω ποσοτήτων χ ἰσοδυναμȣ́σης τῇ μείζονι πλὴν τῆς διαφορᾶς β, δυνατὸν ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi + \upsilon = \alpha$ ἀντικαταςῆσαι $\upsilon - \beta$ ἀντὶ χ ϗ τὴν ἐξίσωσιν τρέψαι ἐπὶ $\upsilon - \beta + \upsilon = \alpha$, ἀναγωγῇ δὲ ϗ μεταθέσει $2\upsilon = \alpha + \beta$· ἄρα $\upsilon = \frac{\alpha + \beta}{\alpha}$.

443 ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Πατήρ τις πενταπλασίȣς ἦγεν ἐνιαυτȣ̀ς τȣ̃ ὑȣ̃ αὐτȣ̃, ὃς οἱ παραμυθȣ́μενος ἔλεγε· μετὰ δεκαετίαν, Φίλε πάτερ, οἱ σοὶ ἔσονται τῶν ἐμῶν τριπλάσιοι· πόσους οὖν ἦγεν ὁ Πατὴρ, πόσους δὲ ὁ ὑός;

ΛΥΣΙΣ. Ε῎ςω χ ἡ τȣ̃ πατρὸς ἡλικία, υ δὲ ἡ τȣ̃ ὑȣ̃, καὶ $10 = \alpha$· εἰσὶ δὲ τῷ προβλήματι θέσεις δύω (488), ὧν ἡ μὲν τίθησιν ὡς ἡ τȣ̃ πατρὸς ἡλικία χ ἰσȣ̃ται τῇ πενταπλῇ τȣ̃ ὑȣ̃ ἡλικίᾳ υ· ȣ̓κȣ̃ν $\chi = 5\upsilon$· ἡ δὲ δευτέρα, ὅτι ὅταν ἡ τȣ̃ πατρὸς ἡλικία χ αὐξηθῇ 10 ἔτεσιν, ἤτοι τῷ α, ἔςαι τριπλῆ τῆς τȣ̃ ὑȣ̃ ἡλικίας υ αὐξηθείσης ϗ αὐτῆς τῷ α· ἐντεῦθεν ἄρα $\chi + \alpha = 3\upsilon + 3\alpha$.

444. ΣΧΟΛΙΟΝ. Φαίνεται μὲν ὡς ἄρα ἐν τῷ δευ-

τέρῳ μέλει ἔδει γραφῆναι $3y + a$, ἀλλ' ἐ $3y + 3a$· ἐπεὶ δὲ ἡ τῦ πατρὸς ἡλικία ἐν δέκα ἔτεσι τριπλασιαθήσεται τῆς τῦ υἱῦ ἡλικίας, προσλαβέσης ϗ τὸ δέκατον ἔτος, εἴτ' οὖν γενομένης $y + a$· ἄρα τρὶς $y + a$ ἀποτελεῖ $3y + 3a$.

Ἀντικαταςάσει ἐν ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει ἀντὶ x τῦ $5y$, ἔςαι $5y + a = 3y + 3a$· μεταθέσει δὲ, $5y - 3y = 3a - a$, ἀναγωγῇ δὲ, $2y = 2a$, διαιρέσει δὲ διὰ 2, $y = a$· ἄρα ἡ ἡλικία τῦ υἱῦ, ἣν ἄγει νυνὶ, ἐςιν ἐνιαυτῶν δέκα.

Ἀντικαταςήτω δὲ ἀντὶ y ὁ 10 ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει· ϗ δὴ ἔςαι $5 \times 10 = x = 50$· ἄρα ὁ πατὴρ νυνὶ ςαδιεύει τὸ πεντηκοςὸν ἔτος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Ἐὰν μοὶ δῷς, ποιμήν τις πρὸς ἕτερον ἔφη ποιμένα, τὰ πεντήκοντα τῶν σῶν προβάτων, ἴσα ἑκάτεροι ποιμανῦμεν· ἐὰν δέοι παράσχω τοσαῦτα τῶν ἐμαυτῦ, τριπλάσια σὺ τῶν ἐμῶν ἕξεις οἴων· πόσ' ἆρ ἑκάτερος ἐποίμαινε;

ΛΥΣΙΣ. Κληθήτω x ὁ ἀριθμὸς τῶν τῦ πρώτυ προβάτων· y δὲ ὁ τῶν τῦ δευτέρυ ϗ $50 = a$.

Ἡ μὲν πρώτη θέσις βύλεται, ὡς ὁ ἀριθμὸς x τῶν τῦ πρώτυ ποιμένος προβάτων αὐξηθεὶς 50, ἤτοι τῷ a, ἰσῦται τῷ ἀριθμῷ τῶν τῦ δευτέρυ y μειωθέντι τῇ αὐτῇ ποσότητι a· ἐκῦν ἔςαι $x + a = y - a$.

Ἡ δὲ δευτέρα, ὅτι ὁ y ἀριθμὸς τῶν τῦ δευτέρυ προβάτων, αὐξηθεὶς τῷ a, τριπλάσιος ἔςαι τῦ ἀριθμῦ x τῶν τῦ πρώτυ, μειωθέντος τῷ αὐτῷ a· ἐκῦν $y + a = 3x - 3a$.

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἔςι $x = y - 2a$ (440) ἀντὶ ἐν x ἀντικαταςάντος ἐν τῇ δευτέρᾳ τῦ $y - 2a$, ἔςαι $y + a = 3y - 6a - 3a$· μεταθέσει δὲ ϗ ἀναγωγῇ,

$$2y = 10\alpha \cdot \text{ἄρα } y = \frac{10\alpha}{2} = 5\alpha = 5 \times 50 = 250 \cdot$$

ἄρα ὁ ἀριθμὸς y τῶν τȣ̃ δευτέρȣ ποιμένος προβάτων ἦν 250· ἐν δὲ τῇ πρώτῃ ἐξισώσει ἀντικατας άντος τȣ̃ 250 ἀντὶ y, γενήσεται $\chi + \alpha = 250 - \alpha$· ἄρα $\chi = 250 - 2\alpha = 250 - 100 = 150$· τᾶυτα εἶχεν ἄρα ὁ πρῶτος,

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς΄. Στρατηγὸς, ὡρισμένον τινὰ ἀριθμὸν ςρατιωτῶν συναγαγεῖν βȣλόμενος, ὑπέχετο τελέσειν ἑκάςῳ ὀβολȣ̀ς 4· ἀλλ' ἐνδέον αὐτῷ ὀβολῶν πρὸς τȣ̃το 8, ὑπέχετο 3· ϗ δὴ ἐκ ταύτης τῆς συνθήκης ἐπλεόνασαν αὐτῷ ὀβολοὶ 4· πόσȣς ȣ̃ν εἶχεν ὁ ςρατηγὸς ὀβολȣ̀ς, ϗ πόσȣς συνηγάγετο ςρατιώτας;

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω χ ὁ τῶν ὀβολῶν ἀριθμὸς, ϗ y ὁ τῶν ςρατιωτῶν, ϗ $8 = \alpha$, ϗ $4 = \beta$.

Τίθεται ȣ̃ν α. ὡς ὁ χ τῶν ὀβολῶν ἀριθμὸς αὐξηθεὶς τῷ 8, εἰτ' ȣ̃ν τῷ α, ἰσȣ̃ται τῷ τετραπλῷ ἀριθμῷ ςρατιωτῶν· ὅθεν ἡ ἐξίσωσις $\chi + \alpha = 4y$.

Δεύτερον ὅτι ὁ χ μειωθεὶς τῷ $4 = \beta$ ἰσȣ̃ται τῷ τριπλῷ y ἀριθμῷ τῶν ςρατιωτῶν· ȣ̓κȣ̃ν $\chi - \beta = 3y$.

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἔςι $\chi = 4y - \alpha$· ἀντικαταςάσει τοίνυν γενήσεται ἡ δευτέρα $4y - \alpha - \beta = 3y$· μεταθέσει, $4y - 3y = \alpha + \beta = 12$· ἐντεῦθεν ἀντικατάσει ἐπὶ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρεθήσεται $\chi = 40$.

445. ΣΧΟΛΙΟΝ. Διὰ δυεῖν ἐξισώσεων τὰ προβλήματα ἐπιλύεται ϗ ȣ̌τως.

Λάμβανε τὴν δύναμιν τῆς αὐτῆς ἀγνώςȣ ποσότητος, φέρ' εἰπεῖν, τῆς χ, ἐν ἑκατέρᾳ τῶν δύω ἐξισώσεων, ποιῶν αὐτὴν μόνην· διὰ δὲ τῶν δύω τῆς χ δυνάμεων ποίει ἐξίσωσιν μόνης τῆς y περιεκτικὴν, ἣν ἐπιλύσας γνώσῃ

τὴν τῆς y δύναμιν. ἀντὶ δὲ y τιθεὶς ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει τὴν ἐγνωσμένην αὐτῆς δύναμιν, ϗ ἐπιλύσας αὐτὴν, θηρεύσῃ ἤδη ϗ τὴν τῆς χ πραγματικὴν δύναμιν.

Ἐπὶ τȣ̃ τετάρτȣ φέρ᾽ εἰπεῖν προβλήματος (443) ἔνθα εἰσὶν ἐξισώσεις δύω $\chi = 5y$, ϗ $\chi + \alpha = 3y + 3\alpha$, ἐν τῇ πρώτῃ μὲν ἡ δύναμις τῆς χ ἐςὶ $5y$, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ, $\chi = 3y + 3\alpha - \alpha = 3y + 2\alpha$· ἐκ τȣ́των ȣ̃ν τῶν δύω τῆς χ δυνάμεων προκύπτει ἐξίσωσις $5y = 3y + 2\alpha$, ἔνθα μεταθέσει ϗ ἀναγωγῇ ϗ διαιρέσει $y = 10$. ἧς ἀντικαταςαθείσης ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει εὑρίσκεται $\chi = 50$

446. Καὶ ἄλλως δὲ τὰ τοιάδε ἐπιλυθήσεται προβλήματα, ἀφαιρέσει ἀμέλει μιᾶς ἐξισώσεως ἀπὸ τῆς ἑτέρας· τὸ γὰρ κατάλοιπον ἔςαι ἐξίσωσις μιᾶς μόνης ἀγνώςȣ περιεκτική.

Κείσθων γὰρ αἱ δύω προεκτεθεῖσαι ἐξισώςεις $\chi = 5y$, ϗ $\chi + \alpha = 3y + 3\alpha$, ἀφαιρῶ τοίνυν πρὸς τὸ δοκȣ̃ν τὴν δευτέραν ἀπὸ τῆς πρώτης, ϗ δὴ λειφθήσεται $-\alpha = 2y - 3\alpha$· μεταθέσει ϗ ἀναγωγῇ, $2\alpha = 2y$, ὅθεν $\alpha = y$, ὡς ϗ διὰ τῶν ἄλλων μεθόδων εὕρηται.

Κανὼν προβλημάτων ἐχόντων πλείȣς ἢ δύω ἐξισώσεις·

440. Θῶμεν ȣ̃ν πρῶτον πρόβλημά τι τριῶν ἐξισώσεων περιεκτικὸν, ϗ δὴ ϗ τριῶν ἀγνώςων ποσοτήτων τῶν χ, y, ω· θηρῶμαι τοιγαρȣ̃ν τὴν δύναμιν τῆς χ ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει μόνην αὐτὴν ἀποφαίνων, ϗ ἀντικαθίςημι ταύτην ἐπὶ τῆς δευτέρας· εἰσὶν ἄρα ἐν αὐτῇ μόναι ἄγνωςοι αἱ y, ω. λαμβάνω δὲ ϗ ἐπὶ ταύτης τῆς καινῆς ἐξισώσεως τὴν τῆς y δύναμιν, περιέχȣσαν ἄγνωςον ποσὸν μόνον τὸ ω, ϗ ἀντικαθίςημι ταύτην ἐν τῇ τρί-

τῃ ἐξισώσει, ϗ ἀντὶ χ τὴν ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει θηρευθεῖσαν αὐτῆς δύναμιν, ϗ ἐπεὶ ἐν ταύτῃ τῇ δυνάμει εὑρίσκεται υ, ἀντικαθίςημι ἀντὶ τούτου τὴν προευρημένην· οὕτως ἄρα ἐπὶ τῆς τρίτης ταύτης ἐξισώσεως οὐδεμιᾷ ἐντυγχάνω ἀγνώςῳ, ὅτι μὴ τῇ ω· λυθείσης τοίνυν ταύτης, εὑρεθήσεται ἡ τῆς ω δύναμις ἐν ποσοῖς ἐγνωσμένοις.

Ἀντίκαθίςημι οὖν ταύτην ἐπὶ τῆς πρὸ αὐτῆς ἐξισώσεως, περιεχούσης ἐν τῇ δυνάμει τῆς υ μόνην ἄγνωςον τὴν ω· ϗ τῇ ἐπιλύσει ταύτης εὑρήσω ἐν γνωςοῖς τὴν τῆς υ· ἀμφοτέρων δὲ τούτων ἀντικαταςαθεισῶν ἀντὶ ω, υ ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει, γνώσομαι τελευταῖον ἐκ ταύτης ϗ τὴν χ· δῆλα δὲ τὰ εἰρημένα γενήσεται ὑποδείγμασί τισιν ἐφαρμοσθέντα.

448. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Τρεῖς ἐντεθύμημαι ἀριθμοὺς, πατήρ τις ἔφη πρὸς τοὺς ἑαυτοῦ υἱοὺς, ἀποπειρώμενος τῆς ἐπὶ τὰ μαθήματα αὐτῶν ἐπιδόσεως· ὧν ὁ μὲν πρῶτος σὺν τῷ διπλῷ τοῦ δευτέρου, ϗ τῷ διπλῷ τοῦ τρίτου, ἀποτελεῖ 90· ὁ δὲ δεύτερος σὺν τῷ διπλῷ τοῦ πρώτου ϗ τοῦ τρίτου, 85· ὁ δὲ τρίτος σὺν διπλοῖς τοῖς ἄλλοις, ποιεῖ 75· τίνες ἄρα, παῖδες ἐμοὶ, εἰσὶν οὗτοι οἱ τρεῖς ἀριθμοί;

Κληθήτω ὁ μὲν πρῶτος ἀριθμὸς χ, ὁ δεύτερος υ, ὁ δὲ τρίτος ω, ϗ ἔςω $90=\alpha$, ϗ $85=$, ϗ $75=\gamma$· εὔδηλον ἄρα, ὅτι ἡ μὲν πρώτη θέσις ἐςὶ $\chi+2\upsilon+2\omega=\alpha$ ἡ δὲ δευτέρα, $\upsilon+2\chi+2\omega=\beta$, ἤδὲ γ΄. $\omega+2\chi+2\upsilon=\gamma$·

Α΄. Εἰλήφθω ἡ δύναμις τῆς χ ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει· $\chi=\alpha-2\upsilon-2\omega$ (Α), ϗ ἀντικαταςήτω ἀντὶ χ ἐν τῇ δευτέρᾳ, ἣ οὕτω γενήσεται $\upsilon+2\alpha-4\upsilon-4\omega+2\omega=\beta$·

ἀναγωγῇ $2\alpha - 3\upsilon - 2\omega\beta$· μεταθέσει, $2\alpha - \beta - 2\omega = 3\upsilon$· ἄρα $\upsilon = \frac{2\alpha - \beta - 2\omega}{3}$ (Β).

Β΄. Αὕτη ἡ δύναμις ἀντικατασήτω ἀντὶ υ ἐν τῇ τρίτῃ ἐξισώσει, ὡσαύτως ϗ ἡ τῆς χ δύναμις (Α)· ϗ δὴ ἔσαι $\omega + 2\alpha + \frac{-8\alpha + 4\beta + 8\omega}{3} - 4\omega + \frac{4\alpha - 2\beta - 4\omega}{3} = \gamma$· ἐν ᾗ τῶν δύω κλασμάτων κοινὸν ἐχόντων παρονομασὴν τὸν 3, ἀφαιρετέον τȣ̃ πρώτȣ τὸ δεύτερον· κατάλοιπον ȣ̃ν ἔσαι $-\frac{4\alpha + 2\beta + 4\omega}{3}$.

γενήσεται ἄρα ἡ ἐξίσωσις $\omega + 2\alpha - \frac{4\alpha + 2\beta + 4\omega}{3} - 4\omega = \gamma$· ἀπαλλαγῇ τῶν κλασμάτων, ἀναγωγῇ τε καὶ μεταθέσει, ἔσαι $5\omega = 2\alpha + 2\beta\, 3\gamma$· — ἄρα $\omega = \frac{2\alpha + 2\beta - 3\gamma}{5} = 25$.

Εἰσήχθω δὲ αὕτη ἡ δύναμις ἀντὶ ω ἐπὶ τῆς Β ἐξισώσεως, ἥτις ἐμφαίνει τὴν δύναμιν τῆς υ· ἐκȣ̃ν ἔσαι $\upsilon = \frac{2\alpha - \beta - 50}{3} = 15$.

Τέλος δὲ ἀντὶ ω ϗ υ εἰσαχθεισῶν τῶν κατ᾽ αὐτὰς ἀριθμητικῶν δυνάμεων ἐπὶ τῆς Α΄ ἐξισώσεως, ἔσαι $\chi = \alpha - 30 - 50 = 10$· ἐνεθυμήθη ἄρα ὁ πατὴρ τρεῖς ἀριθμȣ̀ς 10, 15, 25.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Τριῶν ἀγρῶν πωληθέντων συλλήφθην δὶ ἀργυρίων 120000, ὁ μὲν πρῶτος ϗ ὁ δεύτερος

τετίμηνται, ὅσε ὁ τρίτος· ὁ δὲ πρῶτος ϗ ὁ τρίτος δὶς τοσᾶτε, ὅσε ὁ δεύτερος· πόσε τετίμηται ἄρα ἕκαςος;

ΛΥΣΙΣ. Κληθείσης τῆς τε πρώτε τιμῆς χ, τῆς τε δευτέρε ψ, τῆς τε τρίτε ω, ϗ $\alpha = 120000$, ἡ μὲν πρώτη θέσις συνίςησι τὴν ἐξίσωσιν $\chi + \psi + \omega = \alpha$, ἡ δὲ δευτέρα, $\chi + \psi = \omega$, ἡ δὲ τρίτη $\chi + \omega = 2\psi$.

Ληφθείσης δὲ ἐπὶ τῆς πρώτης ἐξισώσεως τῆς κατὰ τὴν χ δυνάμεως $\chi = \alpha - \psi - \omega$ (Ρ), ϗ ἀντὶ χ ἀντικατασάσης ἐν τῇ δευτέρᾳ, ἔςαι $\alpha - \psi - \omega + \psi = \omega$· ἀναγωγῇ, ϗ μεταθέσει, $\alpha = 2\omega$, ϗ $\omega = \frac{\alpha}{2} = 60000$ ἀργυρίοις.

Ἀντικατασάσης δὲ ἐπὶ τῆς τρίτης ἐξισώσεως τῆς δυνάμεως τῆς χ, ϗ τῆς ω, οἷαι ἐνταῦθα ἐπορίσθησαν, ἔςαι $\alpha - \psi - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 2\psi$· ἄρα $3\psi = \alpha$· ἄρα $\psi = \frac{\alpha}{3} = 40000$ ἀργυρίοις.

Τέλος δὲ εὑρεθείσης ϗ τῆς κατὰ τὴν δευτέραν ἄγνωςον ψ δυνάμεως, διὰ τὴν ἰδιαιτέραν φύσιν τεδε τε προβλήματος, ἀντικατάςει ταύτης τε ϗ τῆς κατὰ τὴν ω, γενήσεται ἡ πρώτη ἐξίσωσις $\chi = 120000 - 40000 - 60000 = 20000$· εἰσὶν ἒν ἡ μὲν πρώτη τιμὴ 20000, ἡ δὲ δευτέρα 40000, ἡ δὲ τρίτη 60000.

449. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δυνατὸν δὲ τὰ ἐκ τριῶν ἐξισώσεων συνεςῶτα προβλήματα ἐπιλῦσαι ϗ διὰ τῆς δευτέρας τῶν ἀποδοθεισῶν μεθόδων εἰς λύσιν τῶν ἐκ δυοῖν (445) κατὰ τάδε· α΄. εἰλήφθω ἐν ἑκάςῃ τῶν τριῶν ἐξισώσεων ἡ δύναμις τῆς αὐτῆς ἀγνώςε ποσότητος τῆς χ, φέρ εἰπεῖν· β΄. γενέσθω μία μὲν ἐξίσωσις ἐκ τῆς πρώτης ϗ δευτέρας δυνάμεως· ἄλλη δὲ ἐκ τῆς δευτέρας ϗ τρίτης, αἵτινες περιέξεσιν ἑκάςη δύω μόνον ἀγνώςες· τὸ δὲ πρόβλημα ἐ-

πιλυθήσεται καθ' ἕνα τινὰ τῶν εἰς ἐπίλυσιν τῶν ἐκ δύω ἐξισώσεων κανόνων.

Ἐπὶ ἐν τῶν τριῶν τοῦ πρώτου προβλήματος ἐξισώσεων (448) εἰλήφθωσαν αἱ τρεῖς δυνάμεις τῆς χ· καὶ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης ἔσαι $\chi = \alpha - 2\upsilon - 2\omega$, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, $\chi = \frac{\beta - \upsilon - 2\omega}{2}$, ἐπὶ δὲ τῆς τρίτης, $\chi = \frac{\gamma - \omega - 2\upsilon}{2}$.

καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης καὶ δευτέρας δυνάμεως γενέσθω $\alpha - 2\upsilon - 2\omega = \frac{\beta - \upsilon - 2\omega}{2}$ (M) ἐκ δὲ τῆς δευτέρας καὶ τῆς τρίτης, $\frac{\beta - \upsilon - 2\omega}{2} = \frac{\gamma - \omega - 2\upsilon}{2}$ (N) ἢ $\beta - \upsilon - 2\omega = \gamma - \omega - 2\upsilon$.

Ἐν ταύταις οὖν ταῖς δυσὶν ἐξισώσεσι ζητηθήτωσαν αἱ δυνάμεις τῆς υ, καὶ ω ἐν ἐγνωσμέναις ποσότησι· εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς M ἐξισώσεως ἡ τῆς υ δύναμις, ἥτις εὑρεθήσεται $\upsilon = \frac{2\alpha - \beta - 2\omega}{3}$· ὡσαύτως εἰλήφθω τῆς αὐτῆς υ ἡ δύναμις κἀπὶ τῆς ἐξισώσεως (N) ἥτις εὑρεθήσεται $\upsilon = \gamma - \beta + \omega$ (Π).

Ἐκ δὲ τῶνδε τῶν δυεῖν τῆς υ δυνάμεων συνεσάσθω ἡ ἐξίσωσις $\frac{2\alpha - \beta - 2\omega}{3} = \gamma - \beta + \omega$, ἢ $2\alpha - \beta - 2\omega = 3\gamma - 3\beta + 3\omega$, μεταθέσει καὶ ἀναγωγῇ, $5\omega = 2\alpha + 2\beta - 3\gamma$· ἄρα $\omega = \frac{2\alpha + 2\beta - 3\gamma}{5} = 25$· αὕτη δὲ ἡ τοῦ ω δύναμις ἀντικατασήτω ἐν τῇ ἐξισώσει Π, ἥτις ἔσαι $\upsilon = \gamma - \beta + 25 = 15$· ἐκ τῶν δύω οὖν δυνάμεων 25, καὶ 15 διὰ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρεθήσεται $\chi = 10$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Τρεῖς ἔμποροι ἔχουσι συλλήβδην μνᾶς 30000· ἀλλὰ τὸ τρίτον τῆς μερίδος τοῦ πρώτου, καὶ τὸ ἔννατον τῆς τοῦ δευτέρου, ἴσουται τῷ πέμπτῳ μέρει τῆς τοῦ τρίτου· τὸ δὲ τρίτον τῆς τοῦ δευτέρου σὺν τῷ πεμπτημορίῳ τῆς τοῦ τρίτου ἴσουται τῇ μερίδι τοῦ πρώτου· Πόση ἄρ' ἐστιν ἡ ἑκάστου μερίς;

ΛΥΣΙΣ Α΄. Ἔστω $\alpha = 30000$· ἐκ τοίνυν τῆς πρώτης θέσεως συσταθήσεται ἡ ἐξίσωσις $\chi+\psi+\omega=\alpha$

ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $\frac{\chi}{3}+\frac{\psi}{9}+\frac{\omega}{5}$

ἐκ δὲ δὴ τῆς τρίτης $\frac{\psi}{3}+\frac{\omega}{5}=\chi$

Β΄. Ἐκ τῆς πρώτης οὖν ἐξισώσεως ἡ δύναμις τῆς $\chi=\alpha-\psi-\omega$ (Α) ἥτις ἀντὶ χ ἀντικαταστᾶσα ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀποτελεῖ $\frac{\alpha-\psi-\omega}{3}+\frac{\psi}{9}=\frac{\omega}{5}$· ἀπαλλαγῇ τῶν κλασμάτων $45\alpha-45\psi-45\omega+15\psi=27\omega$· μεταθέσει, $45\alpha=72\omega+30\psi$, καὶ $30\psi=45\alpha-72\omega$· ἄρα $\psi=\frac{45\alpha-72\omega}{30}$ (Β.)

Γ΄. Ἡ δὲ τρίτη ἐξίσωσις δι' ἀντικαταστάσεων τῶν κατὰ τὴν ψ καὶ τὴν χ δυνάμεων ἔσται $\frac{45\alpha-72\omega}{90}+\frac{\omega}{5}=\alpha-\frac{45\alpha+72\omega}{30}-\omega$· πολλαπλασιασμῷ, καὶ ἀναγωγῇ, καὶ μεταθέσει ἔσται $135\alpha=270\omega$· ἄρα $\omega=15000$.

Δ΄. Ἡ Β ἐξίσωσις ἀντικαταςάσει τῆς κατὰ τὴν ω δυνάμεως γενήσεται $\upsilon = \frac{45\alpha - 72 \times 15000}{30} = 9000.$

Τέλος δὲ ἀντικαταςάσει τῶν δυνάμεων τῆς υ ϗ τῆς ω ἐπὶ τῆς 4 ἐξισώσεως προκύψει $\chi = \alpha - 9000 - 15000 = 6000.$

450. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν ὑποτεθῶσιν ὁσαιδηποτῦν ἄγνωςοι, φ, χ, υ, ω κτ., τὴν ἤδη δεδειγμένην ϗ ἑξῆς βαδιῦμεν ὁδὸν, ἀντικαθιςῶντες ἐκ διαδοχῆς, ὡς εἴρηται, ἐν ταῖς ἐπομέναις ἐξισώσεσι τὰς δυνάμεις χ, υ κτ. τὰς ἐν ταῖς προτέραις ἐξισώσεσιν εὑρημένας· ἀεὶ γὰρ ἐφιξόμεθα εἰς ἐξίσωσιν μιᾶς μόνης ἀγνώςȣ περιεκτικὴν, ἧς ἐπιλυθείσης, ϗ τῆς ἐν ταύτῃ τῇ ἐχάτῃ ἀγνώςȣ γνωσθείσης, εὐχερῶς τῦ λοιπῦ ἀναποδίζοντες ἐπὶ τὰς ἄλλας ἐξισώσεις, ὡς ἤδη δέδεικται, γνωσόμεθα ϗ τὰς ἄλλας ἀγνώςȣς ποσότητας· Προβαλῦμεν ȣ̓͂ν εἰς ἐπίλυσιν ἓν ἔτι πρόβλημα ἐκ τεσσάρων συγκροτȣ́μενον ἐξισώσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Τέσσαρές τινες ἄγȣσιν ὁμῦ ἔτη 160· ἀλλ' ἡ μὲν ἡλικία τῦ πρώτȣ, συνάμα τῇ τῦ δευτέρȣ ϗ τῇ τῦ τρίτȣ, ἰσῦται τῇ τῦ τετάρτȣ· ἡ δὲ τῦ δευτέρȣ, μετὰ τῆς τῦ τρίτȣ ϗ τῦ τετάρτȣ, ἰσῦται τῷ δεκαπενταπλῷ τῆς τῦ πρώτȣ· τέλος δὲ τὸ τριπλῦν τῆς τῦ πρώτȣ σὺν τῇ τῦ τρίτȣ ϗ τῦ τετάρτȣ ἰσῦται τῷ πενταπλῷ τῆς τῦ δευτέρȣ· πόσα ἔςιν ἄρα τὰ ἑκάςȣ ἔτη;

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω $\alpha = 160$ ϗ υ, φ, χ, ψ αἱ τέσσαρες ζητȣ́μεναι ἡλικίαι· ἐκ τȣ́των ȣ̓͂ν συνίςανται τέσσαρες ἐξισώσεις αἱ ἐφεξῆς . . . $\upsilon + \varphi + \chi + \psi = \alpha$
χρῶμαι τοιγαρῦν τῇ (440) . . $\upsilon + \varphi + \chi = \psi$
δεδειγμένῃ μεθόδῳ $\varphi + \chi + \psi = 15\upsilon$
$3\upsilon + \chi + \psi = 5\varphi$

Α΄. Λαμβάνω ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως τὴν δύναμιν τῆς η, ἥτις ἐστὶν $\eta = \alpha - \varphi - \chi - \psi$, καὶ ἀντικαθίστημι ταύτην ἐν τῇ δευτέρᾳ, ἥτις γίνεται $\alpha - \varphi - \chi - \psi + \varphi + \chi = \psi$· μεταθέσει καὶ ἀναγωγῇ, $2\psi = \alpha$· ἄρα $\psi \frac{\alpha}{2}$.

Β΄. Ἀντικαθίστημι ἐν τῇ τρίτῃ ἐξισώσει τὰς δυνάμεις τῆς ψ καὶ η. καὶ δὴ ἔχω $\varphi + \chi + \frac{\alpha}{2} = 15\alpha - 15\varphi - 15\chi - 15\frac{\alpha}{2}$, μεταθέσει δὲ καὶ ἀναγωγῇ $16\varphi + 16\chi = 15\alpha - \frac{15\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 7\alpha$· ἄρα $\varphi = \frac{7\alpha - 16\chi}{16}$.

Γ΄. Ἀντικαθίστημι εἶτα ἐν τῇ ἐσχάτῃ ἐξισώσει τὰς εὑρημένας δυνάμεις τῆς η καὶ χ καὶ φ, καὶ δὴ ἔχω $3\alpha - \frac{21\alpha + 48\chi}{16} - 3\chi - \frac{3\alpha}{2} + \chi + \frac{\alpha}{2} = \frac{35\alpha - 80\chi}{16}$, ἀναγωγῇ δέ, $2\alpha - \frac{21\alpha + 48\chi}{16} - 2\chi = \frac{35\alpha - 80\chi}{16}$.

Πολλαπλασιασμῷ διὰ 16 (430), $32\alpha - 21\alpha + 48\chi - 32\chi = 35\alpha - 80\chi$· μεταθέσει καὶ ἀναγωγῇ $96\chi = 24\alpha$· ἄρα $\chi = \frac{24\alpha}{96} = 40$.

Δ΄. Ἀντικαταστάσει ἀντὶ χ τοῦ 40 ἐν $\eta = \frac{7\alpha - 16\chi}{16}$ γενήσεται $\eta = 30$.

Ε΄. Ἡ ἰδία φύσις τοῦδε τοῦ προβλήματος προαγαγοῦσα ἐν ἀρχῇ διὰ γνωστῆς ποσότητος τὴν δύναμιν τῆς ψ, ἥτις ἐστὶν $\frac{α}{2} = 80$, ἀντικαταστῆσαι παρακελεύεται τὰς τρεῖς δυνάμεις τῶν φ, καὶ χ καὶ ψ ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $η = α - φ - χ - ψ$· καὶ δὴ εὑρεθήσεται $χ = 10$.

Οὐκοῦν τοῦ μὲν πρώτου ἡ ἡλικία ἔστιν ἔτη 10, τοῦ δὲ δευτέρου 30, τοῦ δὲ τρίτου 40, τοῦ δὲ τετάρτου 80.

451. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἵν᾽ ἀριθμὸς δοθεὶς ἀριθμῷ δοθέντι ἰσωθῇ, εἰς πόσον βαθμὸν ὑψωθῆναι ὀφείλει;

Ἔστω ὁ πρῶτος $10 = α$, ὁ δὲ δεύτερος $= β$· ὁ δὲ ζητούμενος δείκτης $= υ$· οὐκοῦν ἡ θέσις φησὶν $α^υ = β$· ἐπεὶ δὲ οἱ ἀριθμοὶ ἴσοι, ἄρα καὶ οἱ αὐτῶν λογάριθμοι ἴσοι ἔσονται· οὐκοῦν $λα^υ = λβ$ καὶ δὴ $υ \cdot λα = λβ$· ἄρα $υ = \frac{λβ}{λα}$· ἐὰν οὖν ζητῆται πόσος ἐστὶν ὁ βαθμὸς εἰς ὃν ὑψωθεὶς ὁ 10 γένοιτ᾽ ἂν $= 10000$, ἔσται $υ = \frac{λ10000}{λ10} = \frac{4}{1} = 4$. οὐκοῦν $10^4 = 10000$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

452. Ἀξίωμα. „Ἡ ἐξίσωσις, ἢ ὁ λόγος τῆς ἰσότητος „μενεῖ, κἂν ἑκατέρωθεν ἡ αὐτὴ ἐξαχθῇ ῥίζα“ καὶ γὰρ ἰσαλλήλων ὄντων ἑκατέρων τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν (383) καὶ αἱ ῥίζαι αὐτῶν ἰσάλληλοι ἔσονται· ἐπείπερ ἐξαγαγεῖν ῥίζαν ἀπὸ ποσοῦ τινος κυρίως ἐστὶ διελεῖν

τόδε τὸ ποσὸν διὰ τῆς ῥίζης, ἵν' εὑρεθῇ πηλίκον ἡ αὐτοῖ ῥίζα (94)· ἐὰν ἄρα ἐκ δυοῖν μελῶν ἐξισώσεως ὁμώνυμος ἐξαχθῇ ῥίζα, ἡ τετραγωνικὴ φέρε, ταὐτὸν ἔσαι, ὡς εἰ καὶ διηρῦντο ἑκάτερα τὰ μέλη διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, ὅπερ ἐπιεικῶς ἥκιςα διαλυμαίνεται τὴν ἐξίσωσιν (393)· ὖκῦν ἐὰν ἡ $\chi^2 = 25$, ἔσαι ἄρα ϗ $\sqrt[2]{x^2} = \sqrt{25}$, ἢ $\chi = 5$, ϗ ἐὰν ᾖ $\chi^3 = 64$, ἐντεῦθεν ἔσαι ϗ $\chi = \sqrt[3]{64} = 4$· ἐρῦμεν ὖν πρῶτον περὶ τῶν ἐξισώσεων τῶν μηδένα τῆς ἀγνώςυ περιεχυσῶν βαθμὸν ἄλλον, ἢ τὸν τετράγωνον.

453. ΚΑΩΝ Α΄. Ποίει μόνην τὴν ἄγνωςον ἐπὶ θατέρυ τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν, μετατιθεὶς ἐπὶ θάτερον πάσας τὰς γνωςὰς, ϗ ἀπαλλάτων αὐτὴν παντὸς συνεργῦ, ἢ παρονομαςῦ, εἰ παρόντες τύχοιεν· ὕσης φέρ' εἰπεῖν $\frac{5\chi^2}{3} + \alpha = \beta$ (Α) α΄. μεταθέσει ποίει $\frac{5\chi^2}{3} = \beta - \alpha$ β΄. ἀπαλλαγῇ τῦ κλάσματος, $5\chi^2 = 3\beta - 3\alpha$· γ΄. $\chi^2 = \frac{3\beta - 3\alpha}{5}$.

454. ΚΑΝΩΝ Β΄. Ἐὰν τὸ ἀπὸ τῆς ἀγνώςυ τετράγωνον λειπτικὸν ᾖ μεταθέσει ἀναδεικτέον αὐτὸ ὑπαρκτικόν· ἐκ γὰρ λειπύσης ποσότητος ῥίζαν τετραγωνικὴν ἐξαγαγεῖν ὐκ ἔνι (175). ἐὰν ὖν ᾖ $\alpha - \chi^2 = \beta$, μεταθέσει πρακτέον $\chi^2 = \alpha - \beta$.

455. ΚΑΝΩΝ Γ΄. Μονωθέντος ὖν ὕτω τῦ τετραγώνυ, ἐξακτέον ἑκατέρωθεν τὴν τετράγωνον ῥίζαν (452). ὕτως ἐπὶ μὲν τῦ πρώτυ ὑποδείγματος τῆς Α ἐξισώσεως ἡκύσης εἰς τὴν $\chi^2 = \frac{3\beta - 3\alpha}{5}$ γραπτέον $\chi =$

$\sqrt[2]{\frac{3\beta - 3\alpha}{5}}$, ἐπὶ δὲ τȣ̃ δευτέρȣ ἐκ τῆς $\chi^2 = \alpha - \beta$ ἐξακτέον τὴν ῥίζαν, γράφοντας $\chi = \sqrt{\alpha - \beta}$.

456. ΚΑΝΩΝ Δ΄. Σύμβολα δὲ προτακτέον τῆς ῥίζης ἀδιαφόρως εἴτε +, εἴτε — · ϗ γὰρ τῆς $\chi^2 = 16$ ȣ̓χ᾽ ἧττον ἔςαι ῥίζα $\chi = 4$, ἢ $\chi = -4$ (127).

457. Ἐντεῦθεν ἄρα πρόδηλον ὅτι τὰ δευτεροβάθμια προβλήματα διττὴν ὑφίςανται λύσιν, τὴν μὲν ἐν ὑπαρκτικοῖς, διὰ λειπτικῶν δὲ ποσῶν τὴν ἑτέραν.

458. ΚΑΝΩΝ Ε΄. Ἅπαν δευτεροβάθμιον πρόβλημα εἰς ἀτοπίαν ἄγον, ἔςαι ἀδύνατον εἰς ἐπίλυσιν· ἐὰν γὰρ ἐπιλυθείσης τῆς ἐξισώσεως τατὰ τȣ̀ς τεθέντας κανόνας ἄγῃ τὸ πρόβλημα εἰς τὸ ἐξαγαγεῖν τετράγωνον ῥίζαν ἀπὸ ποσȣ̃ λείποντος τȣτȣ̃ ἀδυνάτως ἔχοντος (175) τὸ πρόβλημα ἔςαι ἀδύνατον.

459. ΚΑΝΩΝ ϛ΄. ὅταν πάντες οἱ ὅροι τῆς ἐξισώσεως περιέχωσι τὴν ἄγνωςον, διαιρετέον πάντας διὰ τῆς ἀγνώςȣ αὐτῆς· ϗ δὴ κάτεισιν ἡ ἐξίσωσις βαθμὸν ἕνα· ȣ̂σης γὰρ $\chi^3 = 25\chi$, ἑκάςȣ μέλȣς διὰ χ διαιρεθέντος, ἐκ τριτοβαθμίȣ ἕξομεν τὴν δευροβάθμιον ἐξίσωσιν $\chi^2 = 25$.

460. ΚΑΝΩΝ Ζ΄. Ὅταν ἡ δευτοβάθμιος ἐξίσωσις παρὰ τὸ τῆς ἀγνώςȣ τετράγωνον περιέχῃ ϗ τὸν πρῶτον βαθμὸν τῆς αὐτῆς ἀγνώςȣ συγκείμενον συνεργῷ ἢ παρονομαςῇ τινι, ἢ ϗ ἀμφοῖν ἅμα, ὡς ἐν $\frac{5\chi^2}{4} - \frac{3\chi}{4} = \alpha$, τηρητέον κανόνας τȣ̀ς ἐφεξῆς.

461. Α΄. Ἀπαλλακτέον τὸ ἀπὸ τῆς χ τετράγωνον παντὸς συνεργȣ̃ τε ϗ παρονομαςȣ̃, ὡς ἤδη δέδεικται· ȣ̃-

τως ἐν $\frac{5\chi^2}{3} - \frac{3\chi}{4} =$ ἀπαλλακτέον τὸ χ^2 τῦ παρονομαςῦ 3, ἐξ ῦ ἔςαι $20\chi^2 - 9\chi = 12\alpha$ (430). β΄. ϗ τῦ συνεργῦ 20, ὅθεν ἔςαι $\chi^2 - \frac{9\chi}{20} = \frac{12\alpha}{20}$.

462. Β΄. Ἐπεὶ παρὰ τὸ τετράγωνον ἔνεςι τῇ ἐξισώσει ϗ ὁ πρῶτος τῆς ἀγνώςυ βαθμὸς, εὔδηλον ὡς ὐκ ἂν ἄλλως τὸ πρόβλημα λυθείη, ὅτι μὴ ἐξαχθείσης τῆς τετραγώνυ ῥίζης ἀπὸ χ^3 συνάμα τῇ χ, εἴτ᾽ ῦν, ὡς φανερὸν παντὶ τῷ ϗ μικρὸν ἐπισήσαντι, ἀπὸ τετραγώνυ ἀτελῦς, ὅθεν ἡ ἐξαγωγὴ ἀμήχανος προαποδέδεικται.

463. Γ΄. Ἐξεταςέον ἄρα ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως, εἰ παρὰ τὸ ἀπὸ χ τετράγωνον, ϗ τὸν, ᾧ ἔνεςιν ὁ πρῶτος τῦ χ βαθμὸς, ὅρον, ὑπάρχει ϗ ἄλλος ὅρος, ὃς ἂν εἴη τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμισυνεργοῦ τῆς χ τετράγωνον· ἐὰν γὰρ τῦτο ὑπάρχῃ, ἐκ τύτυ τῦ ὅρυ ϗ τῶν δυοῖν ἄλλων, οἳ περιέχυσιν ὁ μὲν χ^2, ὁ δὲ χ, συγκροτητέον θάτερον τῶν μελῶν, μετατιθεμένυς ἐπὶ θάτερον πᾶσαν ἄλλην ποσότητα.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Οὔσης γὰρ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 + \alpha + 6\chi = \beta - 9$, παρατηρῶ, ὡς τὸ -9 μεταθέσει ἔςαι $+9$, εἴτ᾽ ῦν τετράγωνον ἀπὸ τῦ 3, ἡμίσεως τῦ 6 συνεργῦ τῆς ἀγνώςυ χ, ὃ δὴ καταγγέλει, ὡς ὁ 9 σὺν τῷ χ^2 ϗ 6 χ συνισῶσι τετράγωνον ἐντελές· μεταθετέον ἄρα τὸν -9 ἐπὶ τὰ δεξιὰ, τὸ δ᾽ α ἀπὶ τὰ ἀριςερὰ· ὅθεν ἔςαι $\chi^2 + 6\chi + 9 = \beta - \alpha$, ἧς τοῦ πρώτου μέλυς ῥίζα τετράγωνος ἔςι $\chi + 3$· ἔςι γὰρ ἐν αὐτῷ τὸ ἀπὸ τῦ πρώτυ ῥιζικῦ ὅρυ χ τετράγωνον χ^2, σὺν τῷ δὶς γινομένῳ ὑπὸ τῦ πρώτυ χ, ϗ τῦ δευτέρυ 3, εἴτ᾽ ῦν τῷ 6 χ, σὺν τῶ ἀπὸ τῦ δευτέρυ 3 τετραγώνῳ 9 (89).

464. Δ΄. Εἰδὲ τοῦτο μηθὲν παρείη. ά. τὸ χ^2, ϗ τὸν ὅρον, ᾧ ἔνεςι τὸ χ θετέον μόνα ἐπὶ θάτερα, μεταβιβάζοντας πᾶν ἄλλο ποσὸν ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως τὰ ἕτερα. β΄. ληπτέον τὸν τοῦ χ ἡμισυνεργὸν, ϗ τοῦτον τετραγωνίσαντας θετέον ἐν ἑκατέρῳ μέλει τῆς ἐξισώσεως.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Οὔσης ἐξισώσεως τῆς $\chi^2 + 3\chi = \beta$, ὁρῶμεν, ὡς οὐκ ἔςι τὸ πρῶτον μέλος τετράγωνον τελειον· ἔςι μὲν γὰρ ῥίζα τοῦ πρώτου ὅρου χ, τοῦ δὲ δευτέρου μὴ παρόντος ϗ τρίτου, εὑρεθήσεται οὐδεμία (89). τί οὖν ποιητέον; ἢ τὸν ἡμισυνεργὸν τῆς χ θεωρητέον ἀεὶ ὡς ὅρον ῥιζικὸν δεύτερον· ἀεὶ γὰρ ἐξέσαι ἐκλαμβάνειν τὸν, ᾧ ἔνεςιν τὸ χ ὅρον ὡς τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ διπλοῦ τοῦ πρώτου 2χ, ϗ τοῦ δευτέρου ῥιζικοῦ ὅρου, ταυτὸν εἰπεῖν ὑπὸ τοῦ χ, ϗ τοῦ διπλοῦ τοῦ δευτέρου· ἀναγκαίως ἄρα ἕξομεν τὸν δεύτερον ῥίζικὸν ὅρον λαβόντες τὸν ἡμισυνεργὸν τῆς χ· ἐπὶ οὖν τοῦ πρτεθέντος ὑποδείγματος, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ 3, εἶτ οὖν $\frac{3}{2}$, ϗ τὸ ἀπὸ τοῦδε τετράγωνον $\frac{9}{4}$ συνάπτομεν ἑκατέρῳ τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν· ὅθεν οὐδὲν ὅλως πείσεται ἡ ἐξίσωσις (393)· ϗ δὴ ἔςαι $\chi^2 + 3\chi + \frac{9}{4} = \beta + \frac{9}{4}$· καλείσθω δὲ ἡ πρᾶξις αὕτη τοῦ ἐλλειποῦς τετραγώνου συμπλήρωσις.

465. Ε΄. Συμπληρωθέντος οὖν οὕτω τοῦ τετραγώνου, ἑκατέρωθεν τῆς ἐξισώσεως ἐξακτέον τὴν τετραγώνειον ῥίζαν· ἀλλὰ τοῦ μὲν πρώτου ἤδη ἔγνωςαι· ἔςι γὰρ χ σὺν τῷ ἡμισυνεργῷ τῆς χ· τοῦ δὲ δευτέρου σημειωθήσεται· οὕτω τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως ῥίζα τετράγωνος ἔσεται $\chi + \frac{3}{2} = \sqrt{\beta + \frac{9}{4}}$.

466. ς΄. ἐξαχθείσης τῆς ῥίζης ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ συνιςῶντος τὸ δεύτερον μέλος, ἀναδεικτέον μόνην τὴν χ,

μετατιθέντας ἐπὶ θάτερα τὸν δεύτερον ῥιζικὸν ὅρον· ὅτως ἐπὶ τῆς ἐν χερσὶν ἐξισώσεως $\chi+\frac{3}{2}=\sqrt{\beta+\frac{9}{4}}$, ἐὰν ὑποτεθῇ ῥίζα τᾶ $\beta+\frac{9}{4}$ ὁ ἀριθμὸς 10, ποιητέον $\chi=10-\frac{3}{4}=8\frac{1}{2}$.

467. Ζ΄. Ὅσον δὲ περὶ τῶν συμβόλων τῆς ῥίζης, ἐὰν πάντες οἱ ὅροι τᾶ συμπληρωθέντος τετραγώνα ὦσιν ὑπαρκτικοὶ, οἷος ὁ τᾶ προτεθέντος τετραγώνα, ἐξέςαι ἐπίσης ὑποθεῖναι τὴν ῥίζαν, ἤτοι ὑπαρκτικὴν, ἢ λειπτικὴν ὅτω $\sqrt{\chi^2+3\chi+\frac{9}{4}}=\pm\sqrt{\beta+\frac{9}{4}}$· ἀποτελεῖται γὰρ ἐπίσης τὸ τετράγωνον $\chi^2+3\chi+\frac{3}{4}$ ἀπότε $\chi+\frac{3}{2}$, ϗ ἀπὸ $-\chi-\frac{3}{2}$ (128).

468. Ἐὰν μέντοι ὁ τῆς χ συνεργὸς λειπτικὸς ᾖ, ἐξέςαι ἀδιαφόρως ϗ τᾶτο, τὸν μὲν τῶν ὅρων λείποντα, τὸν δ' ὑπάρχοντα ἐκδέξαθαι, δεῖ μέντοι τῇ τᾶ δευτέρα μέλας ῥίζῃ προτάξαθαι τὸ πρὸ τᾶ ῥιζικᾶ ὅρα χ ὑποτεθὲν σύμβολον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κείσθω γὰρ ἐξίσωσις ἡ $\chi^2-4\chi+4=\alpha$· ἐνταῦθα τοίνυν τὴν ἑκατέρα μέλας ῥίζαν θηρωμένοις ἐξέςαι θεῖναι εἴτε $\chi-2=\sqrt{\alpha}$, ἢ $-\chi+2=\sqrt{\alpha}$· φημὶ δὴ προτακτέον εἶναι τᾶ δευτέρα μέλας τὸ πρὸ τᾶ χ ὅρα ὑποτεθὲν σύμβολον· ἵνα δὲ τᾶτο πιςωθῶμεν, τᾶ δευτέρα ῥιζικᾶ ὅρα ὄντος 2 ἐπὶ τᾶ προτεθέντος ὑποδείγματος, θῶμεν τὸν πρῶτον ὅρον $\chi=5$· τὸ ἄρα ἀπὸ $5-2$ τετράγωνον παρέξει τὴν ἐξίσωσιν $+25-20+4=9$· ἐξαγωγῇ ῥίζης, $5-2=\sqrt{9}=3$, μεταθέσει τᾶ -2, $5=3+2$· εὔδηλον ἄρα ὅτι τᾶ $\chi=5$ ὑπαρκτικᾶ ὑποτεθέντος, ἀπονεῖμαι δεῖ τῇ τᾶ δευτέρα μέλας ῥίζῃ τὸ $+$.

Θῶμεν νῦν τἀναντίον τὸν μὲν $\chi=5$ λειπτικὸν, ὑπαρκτικὸν δὲ τὸν 2· τὸ ἂν ἀπὸ $-5+2$ τετράγωνον, ὡς ϗ πρὸ τᾶ, ἀποδώσει τὴν ἐξίσωσιν $+25-20+4=9$

ὅθεν $-5+2=-\sqrt{9}=-3$· μεταθέσει τῦ $+2$, $-5=-3-2=-5$· σαφὲς ἄρα, ὡς ἐὰν ὑποτεθῇ ὁ χ ὅρος λειπτικὸς, προτάξασθαι δεῖ τῆς θατέρυ μέλυς ῥίζης τὸ $-$

469. Ἄρα ἐν γένει „τῦ ὅρυ, ᾧ ἐνυπάρχει ὁ πρῶ„τος τῆς χ βαθμὸς, λείποντος, προτακτέον τῆς ῥίζης τῦ „δευτέρυ μέλυς τὸ πρὸ τῦ χ ὑποτεθὲν σύμβολον.“

470. ΣΧΟΛΙΟΝ. Κἀντεῦθεν φανερὸν, ὡς πᾶσα δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις δυοῖν ἐςιν ἐπιλύσεων ἐπιδεκτικὴ, ἤντε ἡ ἄγνωςος μονάζῃ, ἤντε πρὸς ἑαυτῇ ϗ τὴν πρώτυ βαθμῦ ἄγνωςον προσκειμένην ἔχῃ, ϗ ταύτην εἴτε λείπυσαν, εἴτε ὑπάρχυσαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὗ τὰ τέσσαρα πεμπτημόρια τῦ κύβυ ἴσα εἶεν τῷ ἀπ᾽ αὐτῦ ὀκταπλῷ τετραγώνῳ.

ΛΥΣΙΣ. Κληθέντος χ τῦ ζητυμένυ ἀριθμῦ, ἔςαι $\frac{4}{5}\chi^3=8\chi^2$· διαιρέσει τῆς ἐξισώσεως διὰ χ, ἔςαι $\frac{4\chi^2}{5}=8\chi$ (134)· ἐπεὶ δὲ χ ἑκατέρωθι παρεςι, διαιρετέον ϗ ταύτην διὰ χ· ἐκῦν $\frac{4}{5}\chi=8$· ὅθεν $4\chi=40$· ἄρα $\chi=10$, ὁ ζητύμενος ἀριθμός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν ἀριθμὸν, ὗ ὁ τέταρτος βαθμὸς συναφθείς τετράκις τῷ ἀπ᾽ αὐτοῦ τετραγώνῳ ἀποτελοίη ἄθροισμα, ἰσύμενον τῷ αὐτῷ τετραγώνῳ, δεκατρὶς εἰλημμένῳ.

ΛΥΣΙΣ. $\chi^4+4\chi^2=13\chi^2$· διαιρέσει διὰ χ^2, $\chi^2+4=13$· ἄρα $\chi^2=13-4=9$· ἄρα $\chi=3$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὗ τετραγωνισθέντος, ἐὰν ἀπὸ τῶν δύω τριτημορίων τῦ τετραγώνυ ἀφαιρεθῶσι 12, καταλείπονται 12.

ΛΥΣΙΣ. $\frac{2\chi^2}{3} - \alpha = \alpha$· μεταθέσει (453) τȣ̃ $-\alpha$, $\frac{2\chi^2}{3} = 2\alpha$· πολλαπλασιασμῷ, $2\chi^2 = 6\alpha$, διαιρέσει, $\chi^2 = \frac{6\alpha}{2} = 3\alpha = 36$· ἄρα $\chi = \sqrt{36} = 6$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δʹ. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ἀφ᾽ ȣ̃ τῷ τετραγώνῳ ὀκτάκις τȣ̃ αὐτȣ̃ συναφθέντος ἀριθμȣ̃, ϗ ἔτι 16, ἀποτελεῖται ὁ 121.

ΛΥΣΙΣ. $\chi^2 + 8\chi + 16 = \alpha$, ἧς τὸ πρῶτον μέλος τετράγωνον περιέχει τέλειον, ἐςὶ γὰρ 16 τετράγωνος ἀπὸ 4 ἡμισυνεργȣ̃ τῆς χ. ἔςιν ȣ̃ν ἡ τετράγωνος τȣ̃ πρώτȣ μέλȣς ῥίζα $\chi + 4$ (465)· ἄρα $\chi + 4 = \sqrt{121} = 11$· ȣ̓κȣ̃ν $\chi = 11 - 4 = 7$, ἀριθμὸς ὁ ζητȣ́μενος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Εʹ. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ᾧτινι δεκαεξάκις εἰλημμένῳ συναφθέντος δὶς τȣ̃ ἀπ᾽ αὐτȣ̃ τετραγώνȣ ϗ ἔτι 20, ἀποτελεῖται ὁ 150.

ΛΥΣΙΣ. Κληθείτω ὁ ζητȣ́μενος ἀριθμὸς χ, ϗ $20 = \alpha$, ϗ $150 = \beta$· ϗ δὴ ἔςαι ἐξίσωσις $2\chi^2 + 16\chi + \alpha = \beta$.

Διαιρέσει δὲ διὰ 2, $\chi^2 + 8\chi + \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$

Ἐπεὶ δὲ αὕτη ἡ ἐξίσωσις ȣ̓δένα περιέχει ὅρον δυνάμενον 16, ὅς ἐςὶ τετράγωνος ἀπὸ 4 ἡμισυνεργȣ̃ τῆς χ· αʹ. μεταθετέον τὸν $\frac{\alpha}{2}$· ὅθεν $\chi^2 + 8\chi = \frac{\beta - \alpha}{2}$· βʹ. τὸ $\chi^2 + 8\chi$ ἔςι προφανῶς τετράγωνον ἀτελὲς, ᾧπερ ἐνδεῖ τȣ̃ ἀπὸ 4 ἡμισυνεργȣ̃ τῆς χ τετραγώνȣ 16· συναπτέον ἄρα τὸν 16 ἑκατέρῳ τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν, ϗ δὴ

ἔσεται $\chi^2 + 8\chi + 16 = \frac{\beta - \alpha}{2} + 16$· ἐξακτέον δὲ ἀπὸ τῦ πρώτυ μέλυς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἣν ἴσμεν ἦσαν $\chi + 4$· ἐξακτέον δὲ καὶ ἀπὸ τῦ δευτέρυ $\frac{\beta - \alpha}{2} + 16 = 81$· ὑκῦν $\chi + 4 + \sqrt{81} = 9$· ἄρα $\chi = 9 - 4 = 5$, ἀριθμὸς ὁ ζητύμενος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛʹ. Εὑρεῖν Ἀριθμὸν, ἀφ᾽ ὗ ὁ τετράγωνος ἀφαιρεθεὶς τῦ ἀπ᾽ αὐτῦ κύβυ καταλείπει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἑξαπλάσιον.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῆς θέσεως πρόεισιν ἥδε ἡ ἐξίσωσις $\chi^3 - \chi^2 = 6\chi$· διαιρέσει διὰ χ, $\chi^2 - \chi = 6$, ἐν ᾗ ὑπάρχει τετράγωνον ἀτελὲς τὸ $\chi^2 - \chi$, ὅπερ ἵνα συμπληρωθῇ, ληπτέον τὸ ἥμισυ τῦ 1 συνεργῦ τῆς χ, εἴτ᾽ ὖν $\frac{1}{2}$, ὗ τὸ τετράγωνον $\frac{1}{4}$ συναπτέον ἑκατέρωσε τῆς ἐξισώσεως· ὑκῦν ἔςαι $\chi^2 - \chi + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4}$· ἡ μὲν τῦ πρώτυ μέλυς ῥίζα ἔςι $+ \chi - \frac{1}{2}$· ἐπ᾽ ἐξαγωγῇ δὲ τῆς τῦ δευτέρυ, ἀνακτέον τὸν ὁλοχερῆ 6 εἰς τέταρτα, καὶ τρεπτέον τὸ δεύτερον μέλος εἰς $\frac{25}{4}$, ὗ ῥίζα τετραγώνειος $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$· ἄρα $\chi - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$· ἄρα (466) $\chi = 3$.

471. ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἴδομεν ἤδη ὡς ὑποτιθεμένης τῇ ποσότητι $\chi^2 - \chi + \frac{1}{4}$ ῥίζης τῆς $\chi - \frac{1}{2}$, ἐχρῆν τάξαι τῇ τῦ δευτέρυ μέλυς ῥίζῃ τῇ $\frac{5}{2}$ τὸ $+$ σύμβολον, ὃ προτέτακτο τῦ ὅρυ χ, ἀλλ᾽ ὐχ᾽ ὃ προετάγη τῦ $\frac{1}{2}$· εἶχε μέντοι ληφθῆναι τῦ αὐτῦ μέλυς ἡ δύναμις $-\chi + \frac{1}{2}$ ὡς ῥίζα, ὅτε δὴ, ἵν᾽ ἐπαληθεύσῃ τὸ πρόβλημα, ἐχρῆν προταχθῆναι τῆς ῥίζης τῦ δευτέρυ μέλυς τὸ $-$, ὅπερ προϋποτεθείη τῆς χ· ὑκῦν ἔςαι ὕτως $-\chi + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$, καὶ μεταθέσει τῦ $+\frac{1}{2}$, ἔςαι $-\chi = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = -3$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ΄. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὅπως ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπ᾽ αὐτοῦ τετραγώνου, καταλειφθῇ $\frac{6}{27}$.

ΛΥΣΙΣ. Κληθέντος $\frac{6}{27} = \alpha$, ἔσται $\chi - \chi^2 = \alpha$· μεταθέσει (454), $\chi = \alpha + \chi^2$· ὅθεν $\chi^2 - \chi = -\alpha$· συμπληρώσει τοῦ ἐλλειποῦς τετραγώνου, ὡς ἐν τῷ ἀνωτέρῳ ὑποδείγματι, $\chi^2 - \chi + \frac{1}{4} = -\alpha + \frac{1}{4}$· ἐξαγωγῇ ῥίζης ἑκατέρωθεν· $\chi - \frac{1}{2} = \sqrt{-\alpha + \frac{1}{4}} = \sqrt{-\frac{6}{27} + \frac{1}{4}} = \sqrt{-\frac{24}{108} + \frac{27}{108}} = \sqrt{\frac{3}{108}} = \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6}$· ἄρα $\chi - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$· ἄρα $\chi = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, ὅς ἐστὶν ἀριθμὸς ὁ ζητούμενος· τῷ ὄντι γὰρ ἐὰν ἀπὸ τοῦ $\frac{2}{3}$ ἀφαιρεθῇ τὸ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τετράγωνον $\frac{4}{9}$ εὑρεθήσεται κατάλοιπον $\frac{6}{27}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η΄. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὅπως προσθέντες αὐτῷ τὸ τριπλοῦν αὐτοῦ, ϗ ἔτι τὸ ἥμισυ λάβωμεν ἄθροισμα $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀπὸ τοῦδε τοῦ ἀριθμοῦ τετραγώνου.

ΛΥΣΙΣ. Κληθήτω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός· ἡ δ᾽ ἐξίσωσις ἔσται $\chi + 3\chi + \dfrac{\chi}{2} = \dfrac{3\chi^2}{4}$· ἀπαλλαγῇ τῶν κλασμάτων, $8\chi + 24\chi + 4\chi = 6\chi^2$, ἀναγωγῇ, $36\chi = 6\chi^2$· ἄρα $\chi = \frac{36}{6} = 6$.

472. Ἐὰν ἐν τοῖς δευτέρου βαθμοῦ προβλήμασιν ὦσι πλείους ἢ μία ἄγνωστος, ϗ δὴ ϗ ἐξισώσεις μιᾶς πλείους, βαδιστέον ἤδη τὴν αὐτὴν, ἣν κἀν τοῖς πρωτοβαθμίοις προβλήμασιν, ὅ ἐστι θηρευτέον τὴν μιᾶς τινὸς ἀγνώστου δύναμιν ἐν θατέρᾳ τῶν ἐξισώσεων, ϗ ἀντεισακτέον αὐτὴν ἐπὶ τῆς ἑτέρας· ἔστωσαν γὰρ ἐξισώσεις δύω $2\chi + 3y = \alpha$ ϗ $\chi^2 + y^2 = \beta$· οὗ εἰλήφθω ἐν τῇ πρώτῃ ἡ τῆς χ δύναμις, ἥτις ἐστὶν $\dfrac{\alpha - 3y}{2}$, ϗ ἀντικαταστήτω ἀντὶ χ^2 ἐν τῇ δευτέρᾳ, ἥτις γενήσεται $\dfrac{\alpha^2 - 6\alpha y + 9y^2}{4} + y^2 = \beta$·

ἀπαλλαγῇ τῦ κλάσματος, $\alpha^2 - 6\alpha\gamma + 9\gamma^2 + 4\gamma^2 + 4\gamma^2 = 4\beta$, ἢ $\alpha^2 - 6\alpha\gamma + 13\gamma^2 = 4\beta$· ὅθεν $13\gamma^2 - 6\alpha\gamma = 4\beta - \alpha^2$, ϗ διαιρέσει διὰ 13, $\gamma^2 - \frac{6\alpha\gamma}{13} = \frac{4\beta - \alpha^2}{13}$ (461)· τέλος δὲ συμπληρώσει τῦ ἐλλείποντος τετραγώνυ διὰ τῦ τετραγώνυ τῦ ἀπὸ τῦ ἡμισυνεργῦ $\frac{6\alpha}{13}$ τῆς γ, εἴτ' ὖν ἀπὸ τῦ $\frac{3\alpha}{13}$, ἐκπεραίνεται, ὡς ἔθος, τὰ τῆς πράξεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ συνθέτων ἐξισώσεων.

473. Ἔςω $\chi = 2$· ὖτος ὖν ὁ τύπος καλεῖται ἐξίσωσις ἁπλῆ, ἢ πρωτοβάθμιος ἐπεὶ χ ἐπὶ μηδὲν πεπολλαπλασίαςαι δείκτην ἔχυσα 1, ὅ ἐςιν, ὖσα πρωτοβάθμιος.

474. Ἐὰν μέντοι λάβωμεν δύω ἐξισώσεις $\chi = 2$, ϗ $\chi = 2$, ϗ ταύτας ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιάσωμεν, προκύψει καινὴ ἐξίσωσις ἡ $\chi^2 = 4$, ἢ καλεῖται ἐξίσωσις σύνθετος, βαθμῦ δευτέρυ· παράγεται γὰρ ὑπὸ δυεῖν ἁπλῶν ἐξισώσεων (287).

475. Ἐὰν δ' ἐπιπολλαπλασιαθῇ ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις $\chi^2 = 4$ ἐπὶ τὴν ἁπλῆν ἐξίσωσιν $\chi = 2$, ἡ προκύψυσα ἐξίσωσις $\chi^3 = 6$ ἔςαι σύνθετος βαθμῦ τρίτυ ὡς γινομένη ὑπὸ τριῶν ἁπλῶν ἐξισώσεων, ϗ ὕτως ἐφεξῆς· ἐπὶ τύτοις ά. δυνάμεθα ἀποδῦναι τῇ ἁπλῇ ποσό-

τητι χ τῇ ἐν συνθέτῳ τινὶ ἐγκειμένῃ, ποικίλας δυνάμεις ὑπαρκτικὰς, ἢ λειπτικὰς, ἢ καὶ ἀναμίξ· β΄. δυνάμεις κατ' ἐπίνοιαν, ἢ ἀνυπάρκτους, οἷαι αἱ $\sqrt[2]{-\alpha}$ (175) ἢ $\sqrt[4]{-\beta}$· κτλ.

Δῶμεν οὖν τῇ χ τὰς ἑξῆς δυνάμεις· $\chi=2$, $\chi=3$, $\chi=4$, καὶ διὰ τὸν αὐτίκα γνωσθησόμενον λόγον μεταθέσει τρέψωμεν αὐτὰς εἰς τὰς δὲ $\chi-2=0$, $\chi-3=0$, $\chi-4=0$· ἐὰν οὖν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπ' ἀλλήλας αἱ δύω πρότεραι ἐξισώσεις $\chi-2=0$, $\chi-3=0$, προκύψει ἐξίσωσις σύνθετος δευτεροβάθμιος ἡ $\chi^2-2\chi-3\chi+2\times 3=0$.

476. Ἵνα δὲ γενικώτερον προβαίνοι ἡ Μέθοδος, ἔστω $\pi=2$, $\varkappa=3$, $\rho=4$, καὶ ἑξῆς ὡσαύτως· ἔσονται οὖν αἱ ἐξισώσεις $\chi-\pi=0$, $\chi-\varkappa=0$, $\chi-\rho=0$, $\chi-\sigma=0$ κτλ. πολλαπλασιασθήτωσαν δὲ ἐπ' ἀλλήλας πρῶτον αἱ δύω πρότεραι ἐξισώσεις, ὅθεν προκύψει $\chi^2-\pi\chi-\varkappa\chi+\pi\varkappa=0$ (Β) ἐξίσωσις σύνθετος δευτεροβάθμιος, εἴγε ὁ μείζων τῶν ἐν αὐτῇ τῆς χ βαθμῶν ἐστι τετράγωνος (391)· εἶτα πολλαπλασιασθήτω αὕτη ἐπὶ τὴν τρίτην ἁπλῆν ἐξίσωσιν $\chi-\rho=0$· καὶ δὴ προκύψει $\chi^3-\pi\chi^2-\varkappa\chi^2-\rho\chi^2+\pi\varkappa\chi+\pi\rho\chi+\varkappa\rho\chi-\pi\varkappa\rho=0$ (Δ) ἐξίσωσις σύνθετος βαθμοῦ τρίτου· γίνεται γὰρ ὑπὸ τριῶν ἁπλῶν, ὅ,τε μείζων τῶν ἐν αὐτῇ τῆς χ βαθμῶν ἐστι κύβος.

477. Ἐντεῦθεν ἄρα ἐν γένει πᾶσα σύνθετος ἐξίσωσις ἔσται βαθμοῦ ἐκδηλουμένου ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἁπλῶν ἐξισώσεων, ὑφ' ὧν παράγεται, καὶ δὴ ἑπομένως ὑπὸ τῶν διαφόρων δυνάμεων τῆς ἀγνώστου χ, αἵτινες εἰσὶν αἱ διάφοροι ῥίζαι τῆς συνθέτου ἐξισώσεως.

478. Ἐξισώσεως συνθέτȣ ὅρος καλεῖται, τὸ συμπλήρωμα πάντων τῶν ὅρων, ἐν οἷς ἡ ἄγνωςος τὸν αὐτὸν ἔχει δείκτην· ὅτω τῆς προλαβέσης συνθέτȣ ἐξισώσεως Δ, εἷς μὲν ὅρος ἐςὶν ὁ $-\pi\chi^2 - \kappa\chi^2 - \rho\chi^2$ ἕτερος δὲ ὁ $+\pi\kappa\chi + \pi\rho\chi + \kappa\rho\chi$.

479. Εὐδιαθετεῖν ἐξίσωσιν ἐςὶ διατάττειν τὸς κατ' αὐτὴν ὅρȣς ὅτως, ὡς τὸς δείκτας αὐτῶν ἀλληλοδιαδόχως προϊέναι κατὰ τὴν σειρὰν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὡς ἐπὶ τῆς Δ ἐξισώσεως (476) ὁ μὲν τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ δείκτης ἐςὶ 3, ὁ δὲ τȣ̃ δευτέρȣ 2, ὁ δὲ τȣ̃ τρίτȣ 1.

Πᾶσα εὔτακτος ἐξίσωσις ἐςιν, ἤτοι πλήρης, εἴπερ μὴ διακόπτεται ἡ σειρὰ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἐν τοῖς δείκταις, ὡς ἐςιν ἡ Δ ἐξίσωσις, ἢ μὴ πλήρης, εἴπερ διακόπτοιτο, οἷα ἐςὶν ἡ ἐξίσωσις $\chi^3 - \pi\kappa\rho = 0$, ἧς ἄπεισιν ὅ,τε δεύτερος καὶ τρίτος ὅρος, εἴτ' οὖν χ^2, καὶ χ.

480. Ἐντεῦθεν ἄρα πᾶσα πλήρης ἐξίσωσις τοσȣ́των εὐμοιρεῖ ὅρων, ὅσων ϗ ῥιζῶν σὺν ἑνί· ἡ γὰρ προλαβȣ̃σα ἐξίσωσις Β (476) δευτέρȣ ȣ̃σα βαθμȣ̃, ὅ ἐςι δύω περιέχȣσα ῥίζας, ὅρων τριῶν ἐςι περιεκτική· ἡ δὲ Δ τριτόῤῥιζος ȣ̃σα, τέσσαρας περιέχει ὅρȣς, εἴγε $-\pi\kappa\rho = -\pi\kappa\rho\chi^0$ (59).

481. Ἁπάσης ἁπλῆς ἐξισώσεως, ἐξ ἧς τὸ δεύτερον μέλος ἐγενέτο $= 0$ διὰ μεταθέσεως, αἱ ῥίζαι, εἴτ' ȣ̃ν δυνάμεις τῆς ἀγνώσȣ, ὑπάρχȣσαι μὲν, τὸ $-$, λείπȣσαι δὲ τὸ $+$ προτεταγμένον ἑαυτῶν ἔχȣσιν· ἐντεῦθεν ἄρα.

482. Ἤτοι πᾶσαι αἱ ῥίζαι εἰσὶ λειπτικαὶ, ϗ δὴ οἱ ὅροι πάντες ἕξȣσι τὸ $+$, ἢ πᾶσαι ὑπαρκτικαὶ, ϗ τοῖς ὅροις προσκείσεται ἀμοιβαδὸν $+$, $-$

483. Ἐν γένει δὲ τοσάκις ἀφ᾽ ἑκάϛȣ ἐπὶ ἕκαϛον ὅρον ἀμειφθήσεται τὸ σύμβολον, ὅσαι εἰσὶν αἱ ὑπαρκτικαὶ ῥίζαι· τοσάκις δὲ ἀφ᾽ ἑκάϛȣ ἐφ᾽ ἕκαϛον τὸ αὐτὸ παρακολȣθήσει, ὅσαι αἱ λειπτικαί· ἐπὶ γὰρ τῆς ἐξισώσεως $\chi^3 - 3\chi^2 - 10\chi + 24 = 0$ (Z), ἧς δύω μὲν εἰσὶ ῥίζαι ὑπαρκτικαὶ αἱ $+2$, $+4$, μία δὲ λειπτικὴ ἡ -3, δύω μέν εἰσιν ἀμοιβαὶ τȣ̃ συμβόλȣ $+-$, $-+$, μία δὲ τȣ̃ αὐτȣ̃ παρακολȣ́θησις, $-$, $-$

484. Ἤτοι τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν, εἴτ᾽ ȣ̃ν αἱ ὑπαρκτικαὶ δυνάμεις ἐξισȣ̃νται τῷ ἀθροίσματι τῶν λειπτικῶν, καὶ δὴ τότε ἡ ἐξίσωσις τȣ̃ δευτέρȣ ὅρȣ ἐλλείπεται· ὡς δῆλον ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\chi^3 - 28\chi - 48 = 0$ ἥτις γίνεται ὑπὸ τῶν $\chi - 6 = 0$, καὶ $\chi + 2 = 0$, καὶ $\chi + 4 = 0$· ἢ τὸ τῶν ὑπαρκτικῶν τȣ̃ τῶν λειπτικῶν ὑπερέχει, ὅτε καὶ ὁ δεύτερος ὅρος λειπτικὸς γίνεται, ὡς πρόδηλον ἐκ τῆς Z ἐξισώσεως· ἢ ἔλαττον, ὅτε δὴ καὶ ὑπαρκτικὸς γίνεται ὁ δεύτερος ὅρος, ὡς ἰδεῖν ἔνεϛιν ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 + 2\chi - 24 = 0$ γινομένης ὑπὸ $\chi - 4 = 0$, $\chi + 6 = 0$.

Ἐκ δὴ τȣ́των τῶν παρατηρήσεων ὁδηγηθῆναι δυνησόμεθα εἰς τὴν τῶν ῥιζῶν, εἴτ᾽ ȣ̃ν τῶν ὑπαρκτικῶν, ἢ λειπτικῶν δυνάμεων τῆς ἀγνώϛȣ εὕρεσιν.

485. Πᾶσα ἐξίσωσις τȣ̃ ἐσχάτȣ ἀμοιρȣ̃σα ὅρȣ, εἴτ᾽ ȣ̃ν τȣ̃ γνωϛῶν μόνων ποσῶν περιεκτικȣ̃, ἐκληπτέα ἐϛὶν ὡς βαθμȣ̃ ὑποδεεϛέρȣ, ἢ τȣ̃ ὡρισμένȣ τῷ μεγίϛῳ τῆς ἀγνώϛȣ δείκτῃ· καὶ γὰρ τῆς ἀγνώϛȣ χ τὸ τηνικαῦτα πᾶσι τοῖς ὅροις ἀνυπαρκτȣ́σης, ἐὰν πάντες οἱ ὅροι διὰ χ διαιρεθῶσιν, ἡ ἐξίσωσις κάτεισι βαθμὸν ἕνα (459)· ȣ̃τως ἡ $\chi^4 - 28\chi^2 - 48\chi = 0$ ȣ̓κ ἔϛι τεταρτοβάθμιος ἐξίσω-

σις, εἴγε πάντας τὲς ὅρες διαιρεθεῖσα διὰ χ, γενήσεται $\chi^3 - 28\chi - 48 = 0$.

486. Συνεργὸς ὅρε καλεῖται τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γνωςῶν ποσοτήτων, ὑφ' ὧν ϗ τῆς ἀγνώςε πολλαπλασιαζομένης παράγεται ὁ καλέμενος ὅρος τῆς συνθέτε ἐξισώσεως (478)· ἔτω τῆς ἐξισώσεως Δ (476), — π — κ — ρ ἐςιν ὁ συνεργὸς τε δευτέρε ὅρε τῆς ἐξισώσεως, ϗ πκ + πρ + κρ ὁ συνεργὸς τε τρίτε.

487. Πᾶσα ἄρα εὔτακτος ϗ πλήρης ἐξίσωσις συνεργὸν τε μὲν δευτέρε αὐτῆς ὅρε ἔχει τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως, ἢ τῶν τῆς χ δυνάμεων· τε δὲ τρίτε, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων ὑπὸ τῶν αὐτῶν ῥιζῶν, ἀνὰ δύω λαμβανομένων· τε δὲ τετάρτε, τὸ γινόμενον ὑφ' ἁπασῶν ὁμε τῶν ῥιζῶν, εἴπερ ἡ ἐξίσωσις τρίτε εἴη βαθμε· ἔτω τῆς Δ ἐξισώσεως, ἧς ῥίζαι αἱ π, κ, ρ, συνεργὸς μὲν τε δευτέρε ὅρε ἐςὶ — π — κ — ρ, συνεργὸς δὲ τε τρίτε ἐςὶ πκ + πρ + κρ· τε δ' ἐσχάτε, — πκρ.

Ταὐτὰ δὲ κρατεῖ κἀπὶ τριτοβαθμίε ϗ εὐτάκτε ἐξισώσεως· ἐν αὐτῇ γὰρ τε τετάρτε ὅρε συνεργὸς ἂν εἴη τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων ὑπὸ πασῶν τῶν ῥιζῶν σὺν δύω λαμβανομένων, ϗ ἐφεξῆς ὡσαύτως.

Περὶ ἐπιλύσεως τῶν συνθέτων ἐξισώσεων.

488. Ἐπιλύειν ἐξίσωσιν σύνθετον εὑρίσκειν ἐςὶ τὰς διαφόρες δυνάμεις τῆς ἀγνώςε αἵτινες εἰσὶ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως· ἐπεὶ δὲ ὁ ἔσχατος ὅρος τὸ ὑφ' ἁπασῶν τῶν ῥιζῶν συνίςησι γινόμενον, εὑρετέον ἀμέσως ἅπαντας τέτε τὲς διαιρέτας κατὰ τόνδε τὸν τρόπον.

489. Ἵν' εὑρεθεῖεν ἅπαντες φερ' εἰπεῖν οἱ διαιρέται

τȢ 660 διῃρήσθω πρῶτον διὰ τȢ πρώτȢ ἀριθμȢ 2 (Ἀριθ. 80)· ϗ δὴ ἔςαι δίχα λειψάνȢ πηλίκον 330, ὃς πάλιν διῃρήσθω διὰ 2· τὸ δ' ἐντεῦθεν πηλίκον 165, μὴ δυνάμενον ἔτι διὰ 2 διαιρεθῆναι, διῃρήσθω διὰ 3· τὸ δ' ἐκ τȢτων πηλίκον 55, διὰ 3 ἀδιαίρετον ὂν, διῃρήσθω διὰ τȢ πρώτȢ ἀριθμȢ 5· ὅθεν πρόεισι πηλίκον 11, ὃς μὴ διαιρȢμενος δὶ ἄλλȢ παρὰ τὴν 1 ϗ αὐτὸν τȢτον τὸν 11, διῃρήσθω διὰ 11· πηλίκον δὲ ἔσεται 1.

Πρῶτοι ȣ̃ν ἀριθμοὶ διαιρέται τȢ 660 παρὰ τὴν πάντας τȢς ἀριθμȢς διαιρȢ̃σαν 1 (Ἀριθ. 78) εἰσὶν οἵδε 2, 2, 3, 5, 11.

Εἰς δὲ εὕρεσιν τῶν πολλαπλῶν ἀριθμῶν τῶν διαιρȢντων ϗ αὐτῶν τὸν 660, πεπολλαπλασιάσθων οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ διαιρέται εὑρεθέντες ȣ̃τως.

α'. Ἀνὰ δύω· $2\times2=4$· $2\times3=6$· $2\times5=10$· $2\times11=22$· β'. ἀνὰ τρεῖς· $2\times2\times3=12$, $2\times2\times5=20$· $2\times2\times11=44$· $2\times3\times5=30$· $2\times3\times11=66$· $2\times5\times11=110$· $3\times5\times11=165$· γ'. δὲ ἀνὰ τέσσαρας· $2\times2\times3\times5=60$· $2\times2\times3\times11=132$· $2\times2\times5\times11=220$· $2\times3\times5\times11=330$· τελευταῖον δὲ ἀνὰ πέντε· $2\times2\times3\times5\times11=660$· πάντες ἄρα οἱ διαιρέται τȢ 660 ἔσονται 1, 2, 3, 5, 11, 4, 6, 10, 22, 15, 33, 55, 12, 20, 44, 30, 66, 110, 165, 60, 132, 220, 330, 660.

Ὁ δὲ λόγος ταύτης τῆς πράξεως ἐςιν, ὅτι ὁ 660 γινόμενος ὑπὸ $1\times2\times2\times3\times5\times11$, ἐὰν ἐκ διαδοχῆς διαιρεθῇ διὰ 1, 2, 2, 3, 5, 11, ἀποβήσεται τελευτῶν 1· ὁ αὐτὸς δὲ ἀριθμὸς, πολλαπλȢ̃ς ὢν ϗ τȢ 2×2, ϗ $2\times2\times3$ κτλ. λειψάνȢ ἄτερ διαιρεθήσεται δὶ ἑκάςȢ τῶνδε τῶν γινομένων.

490. ά. Εὑρεθέντων ἐν ὅτω πάντων τῶν διαιρετῶν τὰ ἐσχάτε ὅρε τῆς ἐξισώσεως, ἀντικαταςήτωσαν, ἀρξαμένοις ἐκ τῶν ἐλαττόνων, ἕκαςος ἀντὶ χ ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως, νῦν μὲν ὡς ὑπαρκτικοὶ, νῦν δὲ ὡς λειπτικοὶ (475) ὃς δ' ἂν ἀντικαταςαθεὶς ἀντὶ χ ποιῇ τὴν ἐξίσωσιν ἴσην ο, ἔςαι ὅτος μία τις τῶν ἀληθῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως· ὡς ἐπιλύειν οἷατε ἔσα τὸ πρόβλημα.

β'. Ἐκ τῆς εὑρεθείσης δὲ ῥίζης συνεςάσθω ἐξίσωσις μετὰ τὰ συμβόλε +, ἢ —, ὅπως ἔχει δηλονότι λείψεως, ἢ ὑπάρξεως, ἡ εὑρεθεῖσα ῥίζα· ἐὰν γὰρ φέρε εὑρεθῇ ῥίζα + 3, γενέσθω ἐξίσωσις $\chi - 3 = 0$· ἐπεὶ δὲ ἡ σύνθετος ἐξίσωσις, πολλαπλῆ ἔσα ϗ ταύτης τῆς ἁπλῆς ἐξισώσεως, διαιρέσιμος ἂν εἴη δὶ αὐτῆς ταύτης· διῃρήσθω δὶ αὐτῆς· ϗ δὴ ὅτως ἡ σύνθετος ἐξίσωσις κατελεύσεται βαθμὸν ἕνα.

491. γ'. Ἐπὶ τῆς συνθέτε ἐξισώσεως, τῆς ὅτω βαθμὸν ἕνα κατελθέσης, ἀντικαταςαθήτωσαν αὖθις ἀντὶ χ πάντες οἱ εὑρεθέντες τὰ ἐσχάτε ὅρε διαιρέται, πλὴν τῶν ἀνοικείων φανέντων ἐπὶ τῆς πρώτης πράξεως, ὁ δ' ἀποτελῶν τὴν ἐξίσωσιν = ο, νέαν ϗ αὐτὸς συςήσας ἐξίσωσιν, διαιρείτω τὴν σύνθετον ἐξίσωσιν, ἤδη καταχθεῖσαν· ϗ δὴ ὅτω ϗ αὕτη κάτεισι βαθμὸν ἕνα.

δ'. Ἐπανειλήφθω ὡσαύτως τὰ τῆς πράξεως, ἐὰν ἡ ἐξίσωσις βαθμὰ τρίτε ὑπερτέρα ᾖ, ἕς ὃ τὸ πηλίκον ἐξίσωσις ὑπάρχοι δευτεροβάθμιος, ἥτις ἐπιλυθήτω κατὰ τὴν ἀποδοθεῖσαν μέθοδον (452 κτ).

έ. Διὰ τὰ γινομένε ὑπὸ τῶν εὑρεθεισῶν ῥιζῶν διῃρήσθω ὁ ἔσχατος τῆς συνθέτε ἐξισώσεως ὅρος· τὸ δὲ πηλίκον ἔσαι ἡ ἐσχάτη ζητεμένη ῥίζα· ἐπαισθητότερον δὲ ταῦτα πάντα φανήσεται δὶ ὑποδειγμάτων.

ϛ΄. Ἐν γένει μέντοι, ἐὰν ὁ μέγιϛος βαθμὸς τῆς ἀγνώϛȣ συνεργόντινα ἔχῃ, ἀπηλλάχθω τȣ́τȣ πρὶν τῶν διαιρετῶν λαβεῖν ἀπόπειραν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Εὑρεῖν Ἀριθμὸν, ἀφʼ ȣ̃ ὁ τετράγωνος ἑνδεκάκις ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ τȣ̃ κατʼ αὐτὸν κύβȣ, προςεθέντος τριακονταοκτάκις τȣ̃ αὐτȣ̃, καταλείπει 40.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ ἐξίσωσις ἐϛι $\chi^3 - 11\chi^2 + 38\chi = 40$· μεταθέσει· $\chi^3 - 11\chi^2 + 38\chi - 40 = 0$ (Α)· ά. εὑρεθήτωσαν οἱ τȣ̃ 40 διαιρέται (489) οἵτινές εἰσιν 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40. β΄. $+1$, -1 ἀντὶ χ εἰσαχθέντες ἥκιϛα ἄγȣσιν ἐπὶ 0 τὴν ἐξίσωσιν· ȣ̓κȣ̃ν ἀντικαταϛήτω ἀντὶ χ, $+2$· τοιγαρȣ̃ν $\chi^3 = +8$, καὶ $-11\chi^2 = -44$, ϗ $+38\chi = 76$· ἀντὶ ȣ̃ν τῆς Α ἐξισώσεως προκύπτει ȣ̃τως ἡ $8 - 44 + 76 - 40 = 0$· ȣ̓κȣ̃ν $+2$ ἐϛι μίατις τῶν ἀληθῶν ῥιζῶν τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως.

Παρατηρῶν δὲ, ὡς ἀντὶ χ ἀντικαταϛάντος τȣ̃ -2, γίνεται ἡ ἐξίσωσις $-8 - 44 - 76 - 40 = -168$ ἀντὶ $= 0$, συνάγω ὅτι -2 ȣ̓κ ἔϛι μία τῶν ῥιζῶν· β΄. γενέϛθω ἐκ τῆς εὑρεθείσης ῥίζης $+2$ ἡ ἐξίσωσις $\chi - 2 = 0$, ϗ δι αὐτῆς διῃρήϛθω ἡ Α ἐξίσωσις κατὰ τȣ̀ς ἐκτεθέντας τῆς συμβολικῆς διαιρέσεως κανόνας (63. ὑπόδ. Β΄.)· ϗ δὴ ἔϛαι πηλίκον $\chi^2 - 9\chi + 20 = 0$, ὃ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ὂν, ἐπιλελύϛθω κατὰ τȣ̀ς περὶ τῶν τοιȣ́των προαποδεδομένȣς κανόνας· ἵνα δὲ τȣ̃το γένηται, μετατεθείϛθω ὁ 20 ϗ μεινάτω ἡ ἐξίσωσις μόνη ȣ̃τω $\chi^2 - 9\chi = -20$, ἐφʼ ἧς συμπληρώσει τȣ̃ ἐλλειπȣ̃ς τετραγώνȣ, ϗ ῥίζης ἐξαγωγῇ, εὑρεθήσεται $\chi = 5$, ἡ δευτέρα ζητȣμένη ῥίζα.

Ἀλλὰ γὰρ ἡ Α ἐξίσωσις τριτοβάθμιος ȣ̃σα τρεῖς περιέχειν ὀφείλει ῥίζας (477)· ὁ δὲ τρίτος ὅρος 40 ἐϛι

τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν δύω εὑρεθεισῶν ῥιζῶν 2×5 ϗ τῆς ζητȣμένης τρίτης (487)· ἐκȣ̃ν διῃρήσθω ὁ 40 διὰ 10, τὸ δὲ πηλίκον 4 ἔςαι ἡ ζητȣμένη τρίτη ῥίζα.

Εὕρηνται ἄρα τρεῖς ἀριθμοὶ 2, 4, ϗ 5, ὧν ἕκαςος ἀποπληροῖ τὴν τȣ̃ προβλήματος θέσιν, ὡς ἑκάςῳ ἀποπειραθέντι τȣ́των συνιδεῖν ἔξεςι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Ἐπιλῦσαι τὴν ἐξίσωσιν $\chi^4 + 15\chi^3 + 71\chi^2 = -105\chi$, ταυτὸν εἰπεῖν τὴν $\chi^4 + 15\chi^3 + 71\chi^2 + 105\chi = 0$ (Ρ)

ΛΥΣΙΣ. α΄. διαιρέσει διὰ χ κατήχθω ἡ Ρ ἐξίσωσις ἐπὶ βαθμὸν τρίτον· $\chi^3 + 15\chi^2 + 71\chi + 105 = 0$· β΄. πάντων τῶν κατ᾽ αὐτὴν ὅρων ὑπαρκτικῶν ὄντων, πάσας τὰς ῥίζας αὐτῆς λειπτικὰς χρεὼν εἶναι (482)· εὑρεθέντων ȣ̃ν τῶν διαιρετῶν ἁπάντων τȣ̃ 105, τῇ αὐτῇ μεθόδῳ, ὡς ἀνωτέρω, χρησάμενοι, εὑρήσομεν τρεῖς ῥίζας -3, -5, -7, ὧν ἑκάςη ἀποπληροῖ τὴν θέσιν τȣ̃ προβλήματος· ϗ γὰρ -3 φέρ᾽ εἰπεῖν ἀντὶ χ εἰσαχθεὶς ποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν $+81 - 405 + 639 - 315 = 0$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Ἀριθμὸν εὑρεῖν ὅπως ὁ διπλȣ̃ς αὐτȣ̃ κύβος σὺν τῷ γινομένῳ ὑπ᾽ αὐτȣ̃ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ καὶ τȣ̃ 234 ἀποτελῇ 648.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ ἐξίσωσις ἐςὶ $2\chi^3 - 234\chi = 648$, ἢ $2\chi^3 - 234\chi - 648 = 0$· α΄. ἀπαλλακτέον τȣ̃ 2 συνεργȣ̃ τὸν $2\chi^3$ διαιρέσει ἁπάσης τῆς ἐξισώσεως διὰ 2· ἔςιν ȣ̃ν $\chi^3 - 117\chi - 324 = 0$ (Ζ). β΄. ἐξ ἁπάντων τῶν τȣ̃ 324 διαιρετῶν ὁ -3 ἀποτελεῖ τὴν ἐξίσωσιν $= 0$, ἄρα $\chi + 3 = 0$ διαιρείτω τὴν Ζ ἐξίσωσιν· ὅθεν ἔςαι πηλίκον $\chi^2 - 3\chi - 108 = 0$ (63, ὑπόδειγ. Γ΄.).

Αὕτη δὲ ἐπιλελύσθω κατὰ τὰ δευτοβάθμια τῶν προ-

ϐλημάτων $\chi^2 - 3\chi = 108$

συμπληρώσει· $\chi^2 - 3\chi + \frac{9}{4} = 108 + \frac{2}{4}$

ἐξαγωγῇ ῥίζης $\chi - \frac{3}{2} = \sqrt{108 + \frac{4}{9}}$

$\chi - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{432}{4} + \frac{2}{4}}$

$\chi - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{441}{4}} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$

οὐκοῦν $\chi - \frac{8}{2} = 10\frac{1}{2}$· ἄρα $\chi = 10\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 12$.

Ἐπεὶ δὲ ἐλλείπει ὁ δεύτερος ὅρος τῆς ἐξισώσεως Ζ (479) ἡ ζητουμένη τρίτη ῥίζα ὀφείλει εἶναι λειπτικὴ (484) καὶ συναπτομμένη τῇ πρώτῃ ῥίζῃ — 3 ἐξισοῦσθαι τῷ ἀθροίσματι τῶν ὑπαρκτικῶν ῥιζῶν, ἢ τῇ δευτέρᾳ ὑπαρκττικῇ ῥίζῃ 12· ἔϛαι ἄρα αὕτη ὁ — 9.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δʹ. Ἀριθμὸν εὑρεῖν ὅπως εἰ ἀπὸ τοῦ τρὶς εἰλημμένου αὐτοῦ πέμπτου βαθμοῦ σὺν τῷ ἑξαπλῷ αὐτοῦ κύϐῳ ἀφαιρεθείη δωδεκάκις ὁ τέταρτος αὐτοῦ βαθμὸς, τὸ κατάλοιπον ἐξισῶται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου, καὶ τοῦ 24.

ΛΥΣΙΣ. Ἔϛιν ἐκ τούτων ἡ ἐξίσωσις $3\chi^5 - 12\chi^4 + 6\chi^3 = 24\chi^2$· διαιρέσει πάντων τῶν ὅρων διὰ χ^2, $3\chi^3 - 12\chi^2 + 6\chi = 24$, ἐξίσωσις τριτοϐάθμιος, ἥτις μεταθέσει γίνεται $3\chi^3 - 12\chi^2 + 6\chi - 24 = 0$ (Μ). ἀπαλλαγῇ τοῦ συνεργοῦ 3, $\chi^3 - 4\chi^2 + 2\chi - 8 = 0$ (Α) ἀντικαταϛάσει οὖν τοῦ $+4$ ἑνὸς τῶν τοῦ 8 διαιρετῶν, ἡ ἐξίσωσις ἐπὶ τὸ μηδὲν οἰχομένη ἀποδέχεται ὡς ἑαυτῆς ῥίζαν τὸν $+4$.

Διαιρεθείσης οὖν τῆς Α ἐξισώσεως διὰ $\chi - 4 = 0$, πηλίκον προκύψει ἐξίσωσις δευτεροβάθμιος ἡ $\chi^2 + 2 = 0$· ἄρα $\chi^2 = -2$· ἄρα $\chi = +\sqrt{-2}$, καὶ $-\sqrt{-2}$, ποσότητες ἀνύπαρκτοι, αἵτινες εἰσὶν αἱ δύω λοιπαὶ ζητούμεναι ῥίζαι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ Μεταχηματισμȣ̃ τῶν ἐξισώσεων, καὶ τῆς διὰ γενικῶν τύπων αὐτῶν ἐπιλύσεως.

492. Ἵνα δὲ ςοιχειώδεις ϗ γενικȣ̀ς τύπȣς τȣ̃ πᾶσαν ἐξίσωσιν ἐπιλύειν ἐξενέγκωμεν, ἀνάγκη διὰ βραχέων ἀποδȣ̃ναι τὰ περὶ τῶν καλȣμένων μεταχηματισμῶν τῶν ἐξισώσεων.

493. Α΄. οὖν εἰς πλείω εὐμάρειαν οἱ πολυώνυμοι ϗ πολυγράμματοι συνεργοὶ τῶν ἐξισώσεων λαμβάνονται μονώνυμοι τε ϗ μονογράμματοι· κείσθω γὰρ ἐξίσωσις τριτοβάθμιος ἡ

$$\begin{aligned} \upsilon^3 &+\alpha\upsilon &&+\alpha\beta\upsilon &&+\alpha\beta\gamma=0, \\ &+\beta &&+\alpha\gamma && \\ &\gamma &&+\beta\gamma && \end{aligned}$$

ἐὰν ȣ̃ν ὑποτεθῇ $\alpha+\beta+\gamma=\kappa$, ϗ $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\pi$, ϗ $\alpha\beta\gamma=\rho$, ὁ γενικὸς τύπος τῆς τριτοβαθμίȣ ἐξισώσεως ἔςαι $\upsilon^3+\kappa\upsilon^2+\pi\upsilon+\rho=0$.

494. Β΄. Ἵνα ἐξίσωσιν, ἧς πάντες οἱ ὅροι πλὴν τȣ̃ πρώτȣ κλασματικοὶ εἶεν, τῶν κατὰ τὰ κλάσματα παρονομαςῶν ἀπαλλάξωμεν, μηδένα προθέμενοι συνεργὸν τῷ πρώτῳ αὐτῆς ὅρῳ, εἰλήφθω ἀντὶ τῆς ἀγνώςȣ ἑτέρα ἄγνωςος διῃρημένη τῷ γινομένῳ ὑπὸ πάντων τῶν παρονομαςῶν ἐπ' ἀλλήλȣς πολλαπλασιασθέντων, ϗ πᾶσα ἡ ἐξίσωσις πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸν παρονομαςὴν τοῦ πρώτȣ ὅρȣ.

Ἔςω ἐξίσωσις ἡ $\upsilon^3 - \frac{\alpha\upsilon^2}{\beta} + \frac{\alpha\alpha\upsilon}{\gamma} + \frac{\alpha^3}{\delta} = 0$ ὑποτε-θείσθω τοίνυν $\upsilon = \frac{\chi}{\beta\gamma\delta}$, ϗ ἀντὶ υ ἀντικαταςάσης ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς ποσότητος $\frac{\chi}{\beta\gamma\delta}$, ἔςαι $\frac{\chi^3}{\beta^3\gamma^3\delta^3} - \frac{\alpha\chi^2}{\beta^3\gamma^2\delta^2} + \frac{\alpha\alpha\chi}{\beta\gamma\gamma\delta} + \frac{\alpha^3}{\delta} = 0$· ἕκαςος δὲ τῶν ὅρων ταύτης τῆς ἐξισώσεως πολλαπλασιαθήτω ἐπὶ $\beta^3\gamma^3\delta^3$ παρονομαςὴν τοῦ πρώτου ὅρου, ϗ δὴ γενήσεται $\chi^3 - \alpha\gamma\delta\chi^2 + \alpha^2\beta^2\gamma\delta^2\chi + \alpha^3\beta^3\gamma^3\delta^2 = 0$.

Ἐὰν δὲ ᾖ $\beta = \gamma = \delta$, ἀπόχρη μόνον λαβεῖν $\upsilon = \frac{\chi}{\beta}$. ἔςω γὰρ ἐξίσωσις, ἡ $\upsilon^3 - \frac{3\upsilon^2}{2} + \frac{11}{2} = 0$, ϗ εἰλήφθω $\upsilon = \frac{\chi}{2}$· τοιγαροῦν ἀντικαταςάσει τῆς $\frac{\chi}{2}$ ἀντὶ υ, γενήσεται ἐξίσωσις $\frac{\chi^3}{8} - \frac{3\chi^2}{2.2} + \frac{6\chi}{2.2} + \frac{11}{2} = 0$, ἥτις πολλαπλασιαθεῖσα ἐπὶ 8 γενήσεται· $\frac{8\chi^3}{8} + \frac{24\chi^2}{4} + \frac{48\chi}{4} + \frac{88}{2} = 0$· ἀναγωγῇ τῶν κλασμάτων ἐφ' ἁπλουςέραν ἔκθεσιν, $\chi^3 - 6\chi^2 + 12\chi + 44 = 0$.

465. Γ. Ἵνα ἐξισώσεως ὁ δεύτερος ὅρος ἐξαφανισθῇ, εἰλήφθω ἄγνωςος καινὴ τῇ ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως ἰσουμένη, ἐὰν προσλάβῃ μετ' ἐναντίου συμβόλου τὸν συνεργὸν τοῦ δευτέρου ὅρου διαιρεθέντα διὰ τοῦ δείκτου τοῦ πρώτου

ὅρϐ· ἔςω ἐξίσωσις $υ^2+6υ-16=0$· εἰλήφθω ϐ̃ν $υ=χ-\frac{6}{2}=χ-3$, ϰ̀ ἀντὶ υ ἀντικαταςήτω ἐν τῇ προτεθείσῃ ἐξισώσει· ϐ̓κϐ̃ν ἔςαι

$$\begin{array}{rl} υ^2 & =χ^2-6χ+9 \\ +6υ & = \quad +6χ-18 \\ -16 & = \qquad -16 \\ \hline χ^2 & * \quad -25=0 \end{array}$$

ἐξίσωσις τϐ̃ δευτέρου ὅρου ἐλλείπϐσα, εἰδ' ὁ δεύτερος ὅρος ἑκάτερον ἔχει τὸ σύμβολον + ϰ̀ −, ὡς ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $υ^2-αυ+βυ-αβ=0$· εἰλήφθω ὡσαύτως ὁ συνεργὸς $-α×β$, ϰ̀ διῃρήσθω διὰ 2, $-\frac{1}{2}α+\frac{1}{2}β$, ϰ̀ ἄγνωςος ποσότης τὸ πηλίκον τϐτὶ μετ' ἐναντίων συμβόλων προσλαϐϐ̃σα ἰσϐ́σθω τῇ ἐπὶ τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως ἀγνώςῳ· εἶτ' ϐ̃ν γενέσθω $υ×χ+\frac{1}{2}α-\frac{1}{2}β$, ϰ̀ τῆς ἀντικαταςάσεως γενομένης προκύψει ἐξίσωσις ἡ ἐφεξῆς

$$\begin{array}{r|l} υ^2 & =χ^2+αχ-βχ+\frac{1}{4}α^2-\frac{1}{2}αβ+\frac{1}{4}β^2 \\ \left.\begin{array}{r}-α\\+β\end{array}\right\}.υ & = \quad -αχ+βχ-\frac{1}{2}α^2-αβ-\frac{1}{2}β^2 \\ -αβ & = \qquad\qquad -αβ \\ \hline χ^2 & * \quad -\frac{1}{4}α^2-\frac{1}{2}αβ-\frac{1}{4}β^2=0 \end{array}$$

496. Δ'. Ἵνα δὲ ἐξίσωσιν ῥιζικῶν ἀπαλλάξωμεν ποσοτήτων, ϐ̓ καθ' ἕνα τρόπον ἀεὶ τϐ́τϐ ἐν ἐπιτεύξει γινόμεθα· δὶ ὃ πλείω παραληφθήσεται ὑποδείγματα πρὸς διασάφησιν τῶν διαφόρων τρόπων.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Προκειμένης ϐ̃ν ἐξισώσεως τῆς $υ^3-5υ+\sqrt{2}=0$ ἵν' αὐτὴν τϐ̃ $\sqrt{2}$ ἀπαλλάξωμεν εἰ-

λήφθω $\chi\sqrt{2}=\upsilon$, ἢ τῆς δυνάμεως ταύτης ἀντὶ υ ἀντικατασαθείσης ἔσαι

$$\begin{aligned} \upsilon^3 &= 2\chi^3\sqrt{2} \\ -5\upsilon &= -5\chi\sqrt{2} \\ +\sqrt{2} &= +\sqrt{2} \\ \hline & 2\chi^3\sqrt{2}-5\chi\sqrt{2}+\sqrt{2} \end{aligned}$$

διαιρεθέντων δὲ ἁπάντων τῶν ὅρων διὰ $\sqrt{2}$ προκύψει ἐξίσωσις ῥιζικῶν ἀπηλλαγμένη ἡ $2\chi^3-5\chi\times 1=0$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἔσιν ὅτε πρόοδος γεωμετρικὴ συνίσαται ἐκ τῶν ῥιζικῶν, ἐφ ἣν πολλαπλασιασθεῖσα ἡ ἐξίσωσις τῶν ἀλόγων ποσῶν ἀπαλλάττεται· ὕτως

$$\begin{array}{ccccc} \upsilon^4+2\alpha\upsilon^3\sqrt{2}+5\alpha\beta\upsilon^2 & -\alpha^3\upsilon\sqrt{8} & -2\alpha^2\beta^2=0 \\ 1 \quad \sqrt{2} \quad 2 & \sqrt{8} & 4 \\ \hline \chi^4+4\alpha\chi^3+10\alpha\beta\chi^2 & -8\alpha^3\chi & -8\alpha^2\beta^2=0 \end{array}$$

ταύτης δὲ τῆς ἐξισώσεως τὰς ῥίζας διελεῖν ἀνάγκη διὰ τῦ $\sqrt{2}$, ἵν᾽ ἀπολάβωμεν τὰς τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, εἴγε $\chi=\upsilon\sqrt{2}$ (ἐξ ὑποθέσεως).

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Πολλάκις δὲ ὅλη ἡ ἐξίσωσις τῇ τῶν ῥιζικῶν ποσῶν γεωμετρικῇ προόδῳ διαιρέσιμος ὑπάρχει· οἷον

$$\begin{array}{cccc} \upsilon^3 & -\alpha\upsilon^2\sqrt[3]{2} & +\alpha\beta\upsilon\sqrt[3]{32} & -\alpha^2\beta=0 \\ 1 & \sqrt[3]{2} & \sqrt[3]{4} & 2 \\ \hline \chi^3 & -\alpha\chi^2 & +2\alpha\beta\chi & -\tfrac{1}{2}\alpha^2\beta=0 \end{array}$$

ἔσι δὲ ἐπὶ ταύτης τῆς ἐξισώσεως $\chi=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ΄. Ἔξεσι δ᾽ ἀπαλλάξαι ἐξίσωσιν τῶν ῥιζικῶν ὑποτιθέντας τὺς ῥιζικὺς ὅρυς ἴσυς γράμμασι·

τέτων δὲ ἕκασον θατέρῳ τῆς ἐξισώσεως μέλει τιθέντας, ϗ πᾶσαν τὴν ἐξίσωσιν ἐπὶ βαθμὸν ἐξαίροντας τὸν ἐμφαινόμενον ὑπὸ τῦ ἐπισήμυ· κειμένης ὖν ἐξισώσεως τῆς

$$\upsilon^3 - \upsilon\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 0$$

ὑποτεθείσθω $\sqrt{\alpha} = \kappa$, ϗ $\sqrt{\beta} = \pi$, ϗ δὴ ἡ ἐξίσωσις τραπήσεται ἐπὶ τήνδε $\upsilon^3 - \kappa\upsilon + \pi =$· μετατεθείσθω τοίνυν τὸ $\kappa\upsilon$, εἴτ' ὖν γενέσθω $\kappa\upsilon = \upsilon^3 + \pi$, ϗ ἐπεὶ $\sqrt{\alpha} = \kappa$ ἅπασα ἡ ἐξίσωσις ἤρθω εἰς δεύτερον βαθμὸν $\kappa^2\upsilon^2 = \upsilon^6 + 2\pi\upsilon^3 + \pi^2$· ϗ μετατεθείσθω ϗ τὸ $2\pi\upsilon^3$, $2\pi\upsilon^3 = \kappa^2\upsilon^2 - \upsilon^6 - \pi^2$· καὶ ὅλη πάλιν ἡ ἐξίσωσις τετραγωνισθήσω· ὐκῦν ἔσαι

$$4\pi^2\upsilon^6 = \kappa^4\upsilon^4 - 2\kappa^2\upsilon^8 + \upsilon^{12} - 2\kappa^2\pi^2\upsilon^2 + 2\pi^2\upsilon^6 + \pi^4,$$

εἴτ' ὖν

$$\upsilon^{12} - 2\kappa^2\upsilon^8 - 2\pi^2\upsilon^6 + \kappa^4\upsilon^4 - 2\kappa^2\pi^2\upsilon^2 + \pi^4 = 0$$

τέλος δὲ ἡ τὸν ἐλάχισον ἐν τῇ ἐξισώσει δείκτην ἔχυσα υ^2 γενέσθω $= \chi$, καὶ δὴ κάτεισιν ἡ ἐξίσωσις εἰς βαθμὸν ἕκτον

$$\chi^6 - 2\kappa^2\chi^4 + 2\pi^2\chi^3 + \kappa^4\chi^2 - 2\kappa^2\pi^2\chi + \pi^4 = 0$$

ἀντικατασαθεισῶν δὲ ἐν ταύτῃ τῇ ἐξισώσει τῶν δυνάμεων α, α^2, β, β^2 ἀντὶ κ^2, κ^4, π^2, π^4 προκύψει ἐξίσωσις ῥιζικῶν ἀπηλλαγμένη ἡ

$$\chi^6 - 2\alpha\chi^4 + 2\beta\chi^3 + \alpha^2\chi^2 - 2\alpha\beta\chi + \beta^2 = 0$$

δῆλον δὲ, ὡς ἐὰν ὦσι τὰ ῥιζικὰ κυβικὰ, τὰ τῆς ἐξισώσεως μέλη ἐξαρτέον ἐπὶ τρίτον βαθμόν.

497. Ε΄. Ἵνα δὲ τὰς τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ῥίζας ἐπὶ ποσὸν δοθὲν πολλαπλασιάσωμεν, εἴτ' ὖν τὰς τῆς $\upsilon^3 - \alpha\upsilon^2 - \beta^2\upsilon + \alpha\alpha\beta = 0$ ἐπὶ τὸ γ, εἰλήφθω $\gamma\upsilon = \chi$, εἴτ' ὖν $\upsilon = \frac{\chi}{\gamma}$, ἀντὶ ὖν υ ἀντικατασαθέντος τῦ $\frac{\chi}{\gamma}$, προ-

κύψει καινὴ ἐξίσωσις ἡ $\frac{\chi^3}{\gamma^3} - \frac{\alpha\chi^2}{\gamma^2} - \frac{\beta^2\chi}{\gamma} + \alpha\beta\beta = 0$, ἥτις πολλαπλασιαθεῖσα ἐπὶ γ^3, ἀναγωγῇ γενήσεται $\chi^3 - \alpha\gamma\chi^2 - \beta\beta\gamma^2\chi + \alpha\beta\beta\gamma^3 = 0$, ἧς περ ῥίζαι αἱ $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, $-\beta\gamma$. Ἔςω αὖθις ἐξίσωσις ἡ $\upsilon^3 - 6\upsilon^3 + 11\upsilon - 6 =$, ἧς τὰς ῥίζας $+1$, $+2$, $+3$ πολλαπλασιάσαι πρόκειται ἐπὶ 2· γενέσθω τοίνυν $\upsilon = \frac{\chi}{2}$, καὶ ἀντὶ υ ἀντικαταςαθέντος τοῦ $\frac{\chi}{2}$ προκύψει ἐξίσωσις ἡ $\frac{\chi^3}{8} - \frac{6\chi^2}{4} + \frac{11\chi}{2} - 6 = 0$, ἣ πολλαπλασιωθεῖσα ἐπὶ 8, ἀναγωγῇ γενήσεται $\chi^3 - 12\chi^2 + 44\chi - 48 = 0$, ἧς ῥίζαι $+2$, $+4$, $+6$.

Δῆλον οὖν ἐκ τούτων, ὡς ἵν᾽ ἐξίσωσις πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ποσότητα τὴν δοθεῖσαν, ἀποχρήσει ταύτην πολλαπλασιάσαι ἐπὶ γεωμετρικὴν πρόοδον, ἧς πρῶτος μὲν ὅρος 1. πηλίκον δὲ τοῦ λόγου ἡ δεδομένη ποσότης· οὕτω τῶν ἐκτεθέντων ἤδη ὑποδειγμάτων ληφθείσης ἀγνώςου τῆς χ, τὸ μὲν πρῶτον ἔςαι

$$\begin{array}{l} \chi^3 - \alpha\chi^2 - \beta^2\chi + \alpha\beta\beta = 0 \\ \div 1 : \gamma : \gamma^2 : \gamma^3 \\ \hline \chi^3 - \alpha\gamma\chi^2 - \beta^2\gamma^2\chi + \alpha\beta\beta\gamma\gamma\gamma = 0 \end{array}$$

τὸ δὲ δεύτερον,

$$\begin{array}{l} \chi^3 - 6\chi^2 + 11\chi - 6 = 0 \\ \div 1 : 2 : 4 : 8 \\ \hline \chi^3 \quad 12\chi^2 + 44\chi - 48 = 0 \end{array}$$

498. ς΄. Ἵνα δὲ τὰς τῆς δοθείσης ἐξισώσεως $\upsilon^3 - \alpha\upsilon^2 - \beta^2\upsilon + \alpha\beta\beta = 0$ ῥίζας $+\alpha$, $+\beta$, $-\beta$ ποσό-

τητι δοθείσῃ τῇ $+\gamma$ διέλωμεν, γεγονέτω $\frac{\upsilon}{\gamma}=\chi$, εἶτ' ἦν $\upsilon=\gamma\chi$, καὶ δι' ἀντικαταστάσεως ἔσαι $\gamma^3\chi^3 - \alpha\gamma^2\chi^2 - \beta^2\gamma\chi + \alpha\beta\beta = 0$· ἑκάςȣ δὲ τῶν ταύτης ὅρων διαιρεθέντος διὰ γ^3 προκύψει ἐξίσωσις ἡ $\chi^3 - \frac{\alpha\chi^2}{\gamma} - \frac{\beta^2\chi}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta\beta}{\gamma^3} = 0$, ἧς ῥίζαι αἱ $+\frac{\alpha}{\gamma}$, $+\frac{\beta}{\gamma}$ $-\frac{\beta}{\gamma}$. κατάδηλον τοίνυν, ὡς ἵν' ἐξισώσεως αἱ ῥίζαι διὰ ποσότητος δεδομένης διαιρεθῶσιν, ἀπόχρη μόνον εἰ πᾶσα διαιρεθείη διὰ προόδȣ γεωμετρικῆς, ἧς ὁ μὲν πρῶτος ὅρος εἴη μονὰς, πηλίκον δὲ ἡ δοθεῖσα ποσότης· ἐὰν γὰρ ἑτέρα ἄγνωςος ἡ χ ληφθῇ, ἡ πρόοδος γεωμετρικὴ $\div\!\!\div 1 : \gamma : \gamma^2 : \gamma^3$ κτλ, ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις προκύψει διὰ διαιρέσεως

$$\begin{array}{l} \chi^3 - \alpha\chi^2 - \beta^2\chi + \alpha\beta\beta = 0 \\ \div\!\!\div 1 \;:\; \gamma \;:\; \gamma^2 \;:\; \gamma^3 \\ \hline \chi^3 - \frac{\alpha\gamma\chi^2}{\gamma} - \frac{\beta^2\gamma^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta\beta}{\gamma^2} = 0 \end{array}$$

Τούτων οὕτω προδιατεθέντων, φέρε πρῶτον τὸν γενικὸν τύπον τῆς τῶν τριτοβαθμίων (ἐφ' ὧν ϗ μόνων ἐντελῶς ἐφαρμόζεται) προβλημάτων ἐπιλύσεως ἐξενέγκωμεν.

499. Ἔςω ȣ̂ν ἐξίσωσις τριτοβάθμιος κλασμάτων, ϗ ποσῶν ῥιζικῶν, ϗ δὴ ϗ τȣ̂ δευτέρȣ ὅρȣ, ἀπηλλαγμένη (494, 495, 496) ἡ $\chi^3 - 3\alpha\chi - \beta = 0$· ϗ ὑποτεθείσθω $\chi=\mu+\nu$· ἄρα $\chi^3=\mu^3+3\mu\nu\,(\mu+\nu)+\nu^3$· ἀντὶ δὲ $\mu+\nu$ τεθέντος χ, ἔσαι $\chi^3=\mu^3+3\mu\nu\chi+\nu^3$, ϗ μεταθέσει, $\chi^3-3\mu\nu\chi-\mu^3-\nu^3=0$· ταύτης δὲ

τῆς ἐξισώσεως τῇ προτεθείσῃ παραβαλλομένης ὅρον πρὸς ὅρον εὑρίσκεται $\mu\nu = \alpha$, καὶ $\mu^3 + \nu^3 = \beta$· ἀλλ' ἐκ $\mu\nu = \alpha$, πρόεισι $\nu^3 = \frac{\alpha^3}{\mu^3}$· ἄρα $\mu^3 + \frac{\alpha^3}{\mu^3} = \beta$, ἣ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ μ^3 γίνεται $\mu^6 + \alpha^3 = \mu^3\beta$, καὶ μεταθέσει, $\mu^6 - \beta\mu^3 = -\alpha^3$, ἥτις ἐπιλυθῆναι δύναται κατὰ τὰς δευτεροβαθμίους τῶν ἐξισώσεων οὕτω.

$$\mu^6 - \beta\mu^3 = -\alpha^3$$

συμπληρ. $$\tfrac{1}{4}\beta\beta = \tfrac{1}{4}\beta\beta$$

$$\mu^6 - \beta\mu^3 + \tfrac{1}{4}\beta\beta = \tfrac{1}{4}\beta\beta - \alpha^3$$

$$\mu^3 - \tfrac{1}{2}\beta = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}\beta\beta - \alpha^3}$$

$$\mu^3 = \tfrac{1}{2}\beta \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\beta\beta - \alpha^3}$$

$$\mu = \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2}\beta \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\beta\beta - \alpha^3}\right)}$$

ἐὰν δὲ ἐν τῇ ἐξισώσει $\mu^3 + \nu^3 = \beta$ ἀντὶ τῆς δυνάμεως τοῦ ν ἀντικατασταθῇ ἡ τοῦ μ, λαμβανομένη ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\mu\nu = \alpha$, εὑρίσκεται $\nu = \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2}\beta \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}\beta\beta - \alpha^3}\right)}$· ἄρα $\chi = \mu + \nu = \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2}\beta + \sqrt{\tfrac{1}{4}\beta\beta - \alpha^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{4}\beta - \sqrt{\tfrac{1}{4}\beta\beta - \alpha^3}\right)}$· ἀπονέμεται δὲ τῇ μὲν τῶν τετραγωνικῶν ποσοτήτων τὸ $+$, θατέρᾳ δὲ τὸ $-$, διὰ τοῦτο· ἐπεὶ γὰρ $\mu^3 \times \nu^3 = \alpha^3$, ὡς ἀνωτέρω καταφαίνεται, εἰκὸς εἶναι καὶ $\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta}{4} - \alpha^3} \times \frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta}{4} - \alpha^3} = \alpha^3$· τοῦτὶ οὖν ἀληθεύει μὲν ἐναντίως ἐχόντων τῶν πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ συμβόλου συμβόλων· ψευδὲς δ' ἐξελέγχεται ὁμοίων ὄντων· ἐκεῖνο μὲν γὰρ ἐκ τῆς πράξεως αὐτίκα δῆλον καθίσταται.

$$\frac{\frac{\beta}{2}+\sqrt{\frac{\beta^2}{4}-\alpha^3}}{\frac{\beta}{2}-\sqrt{\frac{\beta^2}{4}-\alpha^3}}$$

$$\frac{\beta^2}{4}+\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\beta}{4}-\alpha^3}$$

$$-\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\beta}{4}-\alpha^3}-\frac{\beta^2}{4}+\alpha^3$$

$$\frac{\beta^2}{4}-\frac{\beta^2}{4}+\alpha^3=\alpha^3.$$

ἐὰν δ' ὁμοίως ἐχόντων τῶν συμβόλων τὰ τῆς πράξεως διαπερανθῇ, ἐδέ ποτε τὸ γινόμενον ἰσοδυναμήσει τῷ α^3· κατὰ τἕτον τοίνυν τὸν τύπον κείσθω ἐπιλῦσαι τὰ ἐφεξῆς προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Εὑρεῖν ἀριθμὸν, ὅπως ἑξάκις λαμβανόμενος σὺν ἐννέα ἰσῶται τῷ ἀφ' αὑτἕ κύβῳ.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ φύσις τἕ προβλήματος δίδωσι $\chi^3 = 6\chi+9$, εἴτ' ἕν $\chi^3-6\chi-9=0$· παρατιθεμένης ἕν ταύτης τῆς ἐξισώσεως πρὸς τὴν $\chi^3-3\alpha\chi-\beta=0$, ἔςι $3\alpha=6$, ϗ $\alpha=2$, ϗ $\beta=9$· ἀντικαταςαθεισῶν ἕν τἕτων τῶν δυνάμεων ἐν τῷ τύπῳ $\chi=\sqrt[3]{(\frac{1}{2}\beta+\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2-\alpha^3})}$ $+\sqrt[3]{(-\beta+\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2-\alpha^3})}$, προκύψει $\chi=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{81}{4}-8}}+\sqrt[3]{(\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{81}{4}-8})}=\sqrt[3]{(\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{81-32}{4}})}$ $+\sqrt[3]{(\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{81-32}{4}})}=\sqrt[3]{(\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}})}+\sqrt[3]{(\frac{9}{2}-}$

$\sqrt{\frac{49}{4}}) = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2}} =$
$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$, ὅς ἐςὶν ἀριθμὸς ὁ ζητέμενος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Ἀριθμὸν εὑρεῖν ὅπως ἡ τε ἀπ᾽ αὐτε κύβε πρὸς τὸ αὐτε τριπλεν διαφορὰ ᾖ $= 2$.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ θέσις τε προβλήματος δίδωσι $\chi^3 - 3\chi = 2$, εἴτ᾽ ἐν $\chi^3 - 3\chi - 2 = 0$· παραβαλλομένης δὲ ταύτης τῆς ἐξισώσεως πρὸς τὴν γενικὴν $\chi^3 - 3\alpha\chi - \beta = 0$, εὑρίσκεται $3\alpha = 3$, εἴτ᾽ ἐν $\alpha = 1$, ϗ $\beta = 2$· ἐκεν ὁ γενικὸς τύπος $\chi = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{\beta^2}{4}} - \alpha^3)} + \sqrt[3]{(\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{\beta^2}{4}} - \alpha^3)}$ γενήσεται $\chi = \sqrt[3]{(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{4}{4}} - 1)} + \sqrt[3]{(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{4}{4}} - 1)} = \sqrt[3]{\frac{2+0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2-0}{2}} = 1 + 1 = 2$ ὁ ζητέμενος ἀριθμός.

Οὐκεν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις τῇ ἐξευρημένῃ ῥίζῃ διαιρεθεῖσα κάτεισι βαθμὸν ἕνα γινομένη δευτεροβάθμιος, ἧς τὰς ῥίζας ἐξέςαι μὲν λαβεῖν ϗ κατὰ τὰ εἰρημένα (452 κτ)· ἐξέςαι δὲ ϗ ἄλλως ταύτας εὑρεῖν ἐφαρμόζοντας τὰ γνωςὰ γράμματα τῆς τριτοβαθμίε τῷ γενικῷ τύπῳ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὰς κυβικὰς ῥίζας τῆς μονάδος· τετὶ δὲ ἵνα γένηται, εὑρητέον πρῶτον τὰς τῆς μονάδος κυβικὰς ῥίζας κατὰ τὰ ἐφεξῆς.

Ἔςω $\chi^3 - 1 = 0$, ἧς διαιρεμένης ἀκριβῶς διὰ $\chi - 1 = 0$, ϗ πηλίκε προϊόντος $\chi^2 + \chi + 1 = 0$, ἐκ ταύτης λαβεῖν δυνάμεθα τὰς δύω τετραγωνίες ῥίζας κατὰ τὰ εἰρημένα (452, κτ.)· ἐπεὶ γὰρ $\chi^2 + \chi + 1 = 0$· ἐκεν $\chi^2 + \chi = -1$. ϗ συμπληρώσει τε ἐλλειπες τετραγώνε, $\chi^2 + \chi + \frac{1}{4} = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$.

Ἐξαγωγῇ ῥίζης $\chi + \frac{1}{2} = \sqrt{-\frac{3}{4}}$· ἔςι δὲ $\sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ (167) ἐκεῖν $\chi + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, ϗ $\chi = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$· ἐπεὶ δὲ ἡ ἑτέρα τετραγωνικὴ ῥίζα ἔςι λειπτικὴ, ἔςαι $\chi = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ὥςε αἱ τρεῖς κυβικαὶ ῥίζαι τῆς μονάδος εἰσὶν αἵδε, 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$· ἐὰν ἂν ἐπὶ ταύτας τὰς ῥίζας πολλαπλασιαϑῇ ἡ ἐξισώσεώς τινος τριτοβαθμίȣ μία ῥίζα, προκύψεσιν αἱ τρεῖς αὐτῆς ῥίζαι, ὥσπερ ἀμέλει τȣ̃ α^2 ἡ ῥίζα α ἐὰν πολλαπλασιαϑῇ ἑξῆς ἐπὶ $+1$, -1 ῥίζας τετραγωνικὰς τῆς μονάδος, προκύψȣσι $+\alpha$, $-\alpha$ ῥίζαι τετραγωνικαὶ τȣ̃ α^2· ταῦτ' ἄρα ἐὰν ὁ γενικὸς τύπος πολλαπλασιαϑῇ ἐπὶ τὰς τρεῖς κυβικὰς τῆς μονάδος ῥίζας, ποιήσει τρεῖς καθολικȣ̀ς τύπȣς, ἀποχρῶντας πρὸς ἐπίλυσιν παντὸς τριτοβαθμίȣ προβλήματος· ϗ ἂν ἔσονται

$$\chi = 1 \times \sqrt[3]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^3}\right)} + 1 \times \sqrt[3]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^3}\right)} \cdot \chi = \sqrt[3]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^3}\right)} \times \frac{(-1+\sqrt{-3})}{2} + \sqrt[3]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^3}\right)} \times \frac{(-1+\sqrt{-3})}{2} : \chi = \sqrt[3]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^3}\right)} \times \frac{(-1-\sqrt{-3})}{2} + \sqrt[3]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^3}\right)} \times \frac{(-1+\sqrt{-3})}{2}$$

· τȣ̃ ἂν δευτέρȣ, φέρε, προβλήματος

ἐπιλυομένε· διὰ μὲν τε͂ πρώτε τύπε ἔξεισι ῥίζα $\chi = 2$, διὰ δὲ τε͂ δευτέρε, $\chi = -1$, διὰ δὲ τε͂ τρίτε αὖθις $\chi = -1$· ἐὰν ἒν γένηται $\chi - 2 = 0$, ϗ $\chi + 1 = 0$, ϗ $\chi + 1 = 0$· τὸ ἐκ τέτων γινόμενον ἀποδώσει τὴν προτεθεῖσαν ἐξίσωσιν $\chi^3 - 3\chi - 2 = 0$· εὑρεθήσονται δὲ αἱ αὐταὶ ῥίζαι, ϗ εἰ, εὑρεθείσης ἅπαξ μιᾶς τῶν ῥιζῶν διὰ τε͂ τύπε, τῆς $\chi = 2$, διαιρεθῇ διὰ τῆς εὑρημένης ῥίζης $\chi - 2 = 0$ ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις· ἔτω γὰρ γενήσεται $\chi^2 + 2\chi + 1$, ἧς εὑρεθήσεται ῥίζα $\chi = -1$ κατὰ τὰ εἰρημένα (452 κτ.) διὰ δὲ $\chi + 1 = 0$ διαιρεθείσης τῆς $\chi^2 + 2\chi + 1 = 0$, προκύψει πηλίκον $\chi + 1 = 0$· εὑρίσκονται ἄρα αἱ αὐταὶ ῥίζαι διά τε τῶν γενικῶν τύπων, ϗ διὰ τῆς ἐπιλύσεως τῆς δευτεροβαθμίε ἐξισώσεως.

500. Ἐπεὶ δὲ πολλάκις ἐξισώσεως τριτοβαθμίε λυομένης διὰ τε͂ γενικε͂ τύπε ἐν ἀριθμοῖς πρόεισι ῥίζα ἀπαιτε͂σα τὴν ἐξωγὴν ῥίζης κυβικῆς, ὥσπερ τῆς $\chi^3 - 15\chi - 4 = 0$, ῥίζα εὑρίσκεται ἐκ τε͂ γενικε͂ τύπε ἡ $\chi = \sqrt[3]{(2+\sqrt{-121})} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{-121})}$, φέρε εἴπωμεν ϗ ὅπως ἂν τύχωμεν ταύτης τῆς ῥίζης.

501. Κείσθω ἐν γένει εὑρεῖν τὴν ῥίζαν τε͂ κυβικε͂ δυωνύμε $\kappa + \vartheta\sqrt{\alpha}$· κείσθω ἒν τῆς ζητεμένης ῥίζης τὸ μὲν λογικὸν μέρος εἶναι $= \chi$, τὸ δ' ἄλογον $= \sqrt{\alpha}$, ὅλη ἒν ἡ ζητεμένη ῥίζα ἔςαι $\chi + \sqrt{\alpha}$· τοιγαρε͂ν

$$\overline{\chi+\sqrt{\alpha}}^3 = \chi^3 + 3\chi^2\sqrt{\alpha} + 3\alpha\chi + \alpha\sqrt{\alpha}$$

ὥςε $\chi^3 + 3\alpha\chi = \kappa$

ϗ $3\chi^2\sqrt{\alpha} + \alpha\sqrt{\alpha} = \vartheta\sqrt{\alpha}$, διαιρέσει δὲ διὰ $\sqrt{\alpha}$

$3\chi^2 + \alpha = \vartheta$ μεταθέσει τε͂ α

$3\chi^2 = \vartheta - \alpha$ διαιρέσει διὰ 3

$\chi^2 = \frac{\vartheta - \alpha}{3}$ ἐξαγωγῇ ῥίζης τετραγωνείϐ

$\chi = \sqrt{\frac{\vartheta - \alpha}{3}}$ ἔνθεντοι.

ά. „Παντὸς δυωνύμϐ κύϐϐ τὸ λογικὸν μέρος τῆς „ῥίζης ἴσον ἐςὶ τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τϐ̃ συνεργϐ̃ τῆς ἀ„λόγϐ πλὴν τῆς ὑποῤῥίζϐ, διαιρεθείσῃ διὰ 3, οἷον $\chi =$ „$\sqrt{\frac{\vartheta - \alpha}{3}}$."

β΄. „Ἁπάσης δυωνύμϐ ῥίζης τὸν μὲν τῶν ὅρων ἐ„χϐ́σης λογικὸν, τὸν δ᾽ ἕτερον ἄλογον, εἰς κύϐον ἀρθεί„σης, τὸ μὲν λογικὸν αὐτϐ̃ μέρος ἴσον ἐςὶ τῷ κύϐῳ τῷ „ἐκ τϐ̃ λογικϐ̃ τῆς ῥίζης μέρϐς προσλαμϐάνοντι τὸ γινό„μενον ὑπὸ τϐ̃ τριπλϐ̃ τετραγώνϐ τῆς ἀλόγϐ ποσότη„τος, ϗ αὐτϐ̃ τϐ̃ λογικϐ̃ αὐτῆς μέρϐς· ὁ δὲ συνεργὸς „τῆς ἀλόγϐ ἴσος ἐςὶ τῷ ἀπὸ τϐ̃ λογικϐ̃ τῆς ῥίζης μέρϐς „τριπλῷ τετραγώνῳ σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ἀλόγϐ ποσότητος „τετραγώνῳ, οἷον $\kappa = \chi^3 + 3\alpha\chi$, ϗ $\vartheta = 3\chi^2 + \alpha$."

502. Κείσθω ἐξαγαγεῖν τὴν κυϐικὴν ῥίζαν τϐ̃ δυωνύμϐ $-135 + \sqrt{18252}$, εἴτ᾽ ϐ̃ν (ἀναγωγῇ ἐφ᾽ ἁπλϐσέραν ἔκθεσιν) τϐ̃ $-135 + 78\sqrt{3}$· δεδόσθω ϐ̃ν εἶναι τὴν ζητϐμένην ῥίζαν $-\alpha + \mu\sqrt{\gamma}$ (εἴτ᾽ ϐ̃ν $-135 = -\alpha$ ϗ $78\sqrt{3} = \mu\sqrt{\gamma}$), ἥτις κυϐισθεῖσα γενήσεται $\mu^3\gamma\sqrt{\gamma} - 3\mu^2\alpha\gamma + 3\alpha^2\mu\sqrt{\gamma} - \alpha^3$· ἐπεὶ ϐ̃ν ἐςι $\sqrt{3} = \sqrt{\gamma}$, ἔςαι τὸ ἄλογον τϐ́τϐ τϐ̃ κύϐϐ μέρος $\mu^3\gamma\sqrt{\gamma} + 3\alpha^2\mu\sqrt{3} = 3\mu^3\sqrt{3} + 3\alpha^2\mu\sqrt{3} = 78\sqrt{3}$· ἐὰν ϐ̃ν τεθῇ $\mu = 1$, διαιρεθὲν διὰ $\sqrt{3}$, ἔςαι $3 + 3\alpha^2 = 78$, ϗ $3\alpha^2 = 75$, ϗ $\alpha^2 = 25$, ϗ $\alpha = 5$· τεθέντος δὲ ἀντὶ α τϐ̃ 5 ἐν τῷ λογικῷ μέρει τϐ̃ κύϐϐ ἔςαι.

$-\alpha^3 - 3\mu^2\alpha\gamma = -125 - 45 = -170$, ὅτινος ἀπάδοντος τῇ περιπτώσει (προσῆκε γὰρ εἶναι -135) δῆλον τὸ μ ἔλασσον εἰλῆφθαι ἢ ὅσον ἔδει· ὀκοῦν τεθήτω $\mu = 2$· ἄρα $\mu\sqrt{\gamma} = 2\sqrt{3}$, ϗ $\mu^3\gamma\sqrt{\gamma} + 3\alpha^2\mu\sqrt{\gamma} = 24\sqrt{3} + 6\alpha^2\sqrt{3} = 78\sqrt{3}$· διαιρέσει διὰ $\sqrt{3}$ γίνεται $24 + 6\alpha^2 = 78$, ϗ $6\alpha^2 = 54$, καὶ $\alpha^2 = 9$, ϗ $\alpha = 3$, ὅτινος ἐν τῷ λογικῷ μέρει τοῦ κύβου ἀντικατασαθέντος, γίνεται $-\alpha^3 - 3\mu^2\alpha\gamma = -27 - 108 = -135$, ὅτινος τῇ περιπτώσει συνᾴδοντος συμπεραίνεται τὴν κυβικὴν ῥίζαν εἶναι $\mu\sqrt{\gamma} - \alpha = 2\sqrt{3} - 3$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἔσω εὑρεῖν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ δυωνύμου $3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}$, εἴτ᾽ οὖν (ἀναγωγῇ ἐφ᾽ ἁπλουσέραν ἔκθεσιν) τοῦ $3 + \frac{5}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}}$· ἔσω οὖν $\alpha + \mu\sqrt{\gamma} = 3 + \frac{5}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}}$· ϗ εἰλήφθω ὁ ἀπὸ $\alpha + \mu\sqrt{\gamma}$ κύβος $\alpha^3 + 3\alpha^2\mu\sqrt{\gamma} + 3\alpha\mu^2\gamma + \mu^3\gamma\sqrt{\gamma}$· ἐπειδὲ $\sqrt{\gamma} = \sqrt{-\frac{4}{3}}$, τὸ ἄλογον μέρος ἔσαι $3\alpha^2\mu\sqrt{\gamma} + \mu^3\gamma\sqrt{\gamma} = 3\alpha^2\mu\sqrt{-\frac{4}{3}} + \mu^3 \times -\frac{4}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}}$· ἐὰν οὖν ληφθῇ $\mu = 1$, ϗ γένηται διαίρεσις διὰ $\sqrt{-\frac{4}{3}}$, ἔσαι $3\alpha^2 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$, ϗ $3\alpha^2 = \frac{9}{3}$, ϗ $\alpha^2 = \frac{9}{9}$, ϗ $\alpha = \pm 1$, ὅπερ ἀντικατασαθέντος ἐν τῷ λογικῷ τοῦ κύβου μέρει, ἔσαι $\alpha^3 + 3\mu^2\alpha\gamma = -1 + 4 = 3$, ὅτινος τῇ περιπτώσει συνᾴδοντος, ἔσαι ἡ ζητουμένη ῥίζα $\alpha + \mu\sqrt{\gamma} = -1 + \sqrt{-\frac{4}{3}}$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἔσω ἐξαγαγεῖν ῥίζαν κυβικὴν ἀπὸ δυωνύμου ποσότητος, ἑκάτερον μέρος ἄλογον ἐχούσης τῆς $\sqrt{243} + \sqrt{242}$, εἴτ᾽ οὖν (ἀναγωγῇ ἐφ᾽ ἁπλουσέραν ἔκθεσιν) τῆς $9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$· τεθήτω δὴ τὸ μὲν πρῶτον μέρος τῆς ῥίζης $\sqrt[3]{9\sqrt{3}} = \mu\sqrt{\gamma}$, τὸ δὲ

δεύτερον $\sqrt[3]{11\sqrt{2}} = \nu\sqrt{\varepsilon}$· ὅλη δὲ ἡ ῥίζα $\mu\sqrt{\gamma} + \nu\sqrt{\varepsilon}$· ὁ δ' ἀπ' αὐτῆς κύβος $\mu^3\nu\sqrt{\gamma} + 3\mu^2\nu\gamma\sqrt{\varepsilon} + \mu\nu^2\varepsilon\sqrt{\gamma} + \nu^3\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$, ϗ ἐπεὶ $\mu\sqrt{\gamma} = 9\sqrt{3}$, ἔσται θάτερον μέρος τῆς ῥίζης, $\mu^3\gamma\sqrt{\gamma} + 3\mu\nu^2\varepsilon\sqrt{\gamma} = 3\mu^3\sqrt{3} + 6\mu\nu^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$· τεθέντος δὲ $\mu = 1$, ϗ γενομένης διαιρέσεως διὰ $\sqrt{3}$, γίνεται $3 + 6\nu^2 = 9$, ϗ $6\nu^2 = 6$, ϗ $\nu = 1$, ἧς ἀντὶ ν ἀντικατασταθείσῃ, ἐν θατέρῳ μέρει τοῦ κύβου, ἔσται $3\mu^2\nu\gamma\sqrt{\varepsilon} + \nu^3\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\, 9\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$, οὗτινος τῇ περιπτώσει ὁμολογοῦντος, ἔσται ἡ ζητουμένη κυβικὴ ῥίζα $\mu\sqrt{\gamma} + \nu\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{3} = \sqrt{2}$.

503. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ἐὰν μὲν ἀντικαταστάσει τῆς εὑρισκομένης δυνάμεως, προκύπτῃ ἀριθμὸς μείζων τοῦ λογικοῦ ἀριθμοῦ, σαφὲς τὴν δύναμιν τοῦ μ ἐλάσσω εἰλῆφθαι, ἢ ὅσην ἔδει, ἐὰν δὲ ἐλάσσων, μείζω· διὸ εἰ ἐν μὲν τῇ α΄. περιπτώσει εἴληπται $\mu = 1$, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ $\mu = 2$, τιθέναι προσήκει $\mu = 1\frac{1}{2}$· τούτου δὲ γενομένου, ἐὰν ἀκριβῶς οὐκ ἐξέρχηται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, δῆλον ὡς τοῦ προκειμένου δυωνύμου ῥίζαν κυβικὴν ἐξενεχθῆναι ἀμήχανον.

504. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Εἰς δὲ βάσανον τῆς εὑρημένης ῥίζης, εἰ ἄρα ἀσφαλῶς εὕρηται, ἐξεταστέον μόνον τὸ λογικὸν αὐτῆς μέρος· ἔστω τῆς δυωνύμου ποσότητος $78\sqrt{3} - 135$ ῥίζα εὕρηται ἡ $2\sqrt{3} - 3$· ἐὰν οὖν συναφθῇ ὁ ἀπὸ τοῦ λογικοῦ αὐτῆς μέρους -3 κύβος -27 τῇ αὐτῇ ῥίζῃ τρὶς ληφθείσῃ -9, πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὸ ἀπὸ θατέρου μέρους τετράγωνον 12, εἴτ' οὖν ἐὰν συναφθῇ τῷ -108, ἐπεὶ τὸ ἄθροισμα -135 σύμφωνόν ἐστι τῷ λογικῷ μέρει τῆς δοθείσης δυωνύμου ποσότητος, δῆλον ὅτι εἴληπται ἀσφαλῶς ῥίζα αὐτῆς ἡ $2\sqrt{3} - 3$ (101).

505. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ΄. Ἄλις δὲ ἔχει τάτε περὶ τȣ̃ γενικȣ̃ κανόνος τῆς ἐπιλύσεως τῶν τριτοβαθμίων προβλημάτων, ϗ δὴ ϗ τὰ περὶ ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀπὸ ποσȣ̃ δυωνύμȣ· τοῖς δέ γε δαψιλέςερον τȣ́των ἀπολαῦσαι ἐπιθυμȣ̃σιν ἐξέςαι ἀναγνῶναι τȣ̀ς τάτε περὶ τῆς τῶν τριτοβαθμίων προβλημάτων ἐπιλύσεως πλατύτερον πραγματευσαμένȣς, ϗ τύπȣς ἐκδεδωκότας παντοίȣς, ϗ τὰ περὶ τῆς ἀπὸ δυωνύμȣ ποσȣ̃ ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν καθολικώτερον ἑρμηνεύσαντας, οἷς ἀμέλει πρόθεσις αὕτη ὑπῆρξε τὰ τῆς ἀναλύσεως μόνα ἐκθέσθαι, βίβλȣς πολυτόμȣς εἰς τȣ̃το συγγραψαμένȣς· ἡμῖν δὲ ἀποχρήσει τὰ πρȣγιάιτατα ὑποςρωννῦσι, ϗ ὧν ἡ γνῶσις πρὸς πᾶν τοιȣ̃τῶδες σύγγραμμα εὐχερῶς τȣ̀ς μετιόντας ποδηγετήσει, εἰπεῖν ἐν βραχέσι ϗ περὶ τῆς γενικῆς ἐπιλύσεως τῶν καθυπερτέρων βαθμῶν, ϗ τέλος ἐπιθεῖναι τῷ περὶ τῶν ἐξισώσεων λόγῳ.

506. Ἔςω ἤδη ἐξίσωσις τεταρτοβάθμιος, ἀπηλλαγμένη τȣ̃ δευτέρȣ αὐτῆς ὅρȣ κατὰ τὰ εἰρημένα (495), ἐν γένει πᾶσαν ἐμφαίνȣσα τεταρτοβάθμιον ἐξίσωσιν, ἡ $\upsilon^4 + \alpha\upsilon^2 + \beta\upsilon + \gamma = 0$, ϗ ὑποτεθείσθω γινομένη ἐκ δύω ἐξισώσεων δευτεροβαθμίων τῶν $\upsilon^2 + \chi\upsilon + \pi$, $\upsilon^2 - \chi\upsilon + \kappa = 0$· ϗ ἐξ αὐτῶν ἴση τῇ δοθείσῃ γενέσθω ἐξίσωσις ἡ $\upsilon^4 + \kappa\upsilon^2 + \kappa\chi\upsilon + \pi\kappa = 0$, ἧς παραβαλλομένης

$$\begin{array}{ll} -\chi^2 & -\pi\chi \\ +\pi & \end{array}$$

τῇ δοθείσῃ, ἔσονται ἐξισώσεις $\kappa + \pi - \chi^2 = \alpha$, ϗ $\kappa\chi - \pi\chi = \beta$, ϗ $\pi\kappa = \gamma$· πολλαπλασιασθείσης δὲ τῆς πρώτης ἐπὶ χ, ϗ συναφθείσης τῇ δευτέρᾳ, γενήσεται $2\kappa\chi - \chi^3 = \alpha\chi + \beta$, ἢ $2\kappa\chi = \alpha\chi + \chi^3 + \beta$, ϗ

$\varkappa = \frac{\alpha\chi + \chi^3 + \beta}{2\chi}$· ταύτης δὲ τῆς δυνάμεως τȣ̃ $\varkappa$ ἀντικαταςαθείσης ἐν τῇ ἐξισώσει $\pi\varkappa = \gamma$, ἔςαι $\pi \times \frac{\alpha\chi + \chi^3 + \beta}{2\chi} = \gamma$, ϗ $\pi = \frac{2\gamma\chi}{\alpha\chi + \chi^3 + \beta}$· ἐν ἕν τῇ ἐξισώσει $\varkappa\chi - \pi\chi = \beta$ ἀντικαταςαθεισῶν ἀντὶ $\varkappa$ ϗ π τῶν ἤδη εὑρημένων δυνάμεων, προκύπτει ἐξίσωσις ἡ $\frac{\alpha\chi + \chi^3 + \beta}{2} - \frac{2\gamma\chi^2}{\alpha\chi + \chi^3 + \beta} = \beta$, ἥτις, ἄρσει τῶν κλασμάτων, μεταθέσει τε ϗ ἀναγωγῇ, γίνεται $\chi^6 + 2\alpha\chi^4 + \begin{matrix}\alpha^2\\ -4\gamma\end{matrix}\chi^2 - \beta^2 = 0$, ἥτις, ἐπεὶ πάντες οἱ δεῖκται διαιρέσιμοι ὑπάρχȣσι διὰ 2, ἐπιλυθῆναι δύναται κατὰ τὰς τριτοβαθμίȣς· ἐὰν γὰρ τεθῇ $\varphi = \chi^2$, ἔςαι $\varphi^3 + 2\alpha\varphi^2 + \begin{matrix}\alpha^2\\ -4\gamma\end{matrix}\varphi - \beta^2 = 0$· καλεῖται δὲ αὕτη ἐξίσωσις κυβικὴ ἐ ξ η μ μ έ ν η τῆς τεταρτοβαθμίȣ· ἁπάσης τε εἰδικωτέρας τεταρτοβαθμίȣ εὑρεῖν δυνάμεθα τὴν αὐτῆς ἐξημμένην κυβικήν· ἔςω γὰρ ἐξίσωσις ἡ $\upsilon^4 - 4\upsilon^2 - 8\upsilon + 35 = 0$· ἔςαι τοίνυν $\alpha = -4$, ϗ $\beta = -8$, ϗ $\gamma = 35$· τȣ́των δὲ τῶν δυνάμεων ἀντικαταςαθεισῶν ἐν τῇ γενικῇ ἐξημμένῃ πρόεισι μερικὴ ἡ $\chi^6 - 8\chi^4 - 124\chi^2 - 64 = 0$.

507. Ἐὰν ἐν ταῖς δυσὶ παρακτικαῖς ἐξισώσεσιν $\upsilon^2 + \chi\upsilon + \pi = 0$, $\upsilon^2 - \chi\upsilon + \varkappa = 0$, ἀντὶ π ϗ $\varkappa$ τεθῶσιν αἱ ἄρτι εὑρημέναι αὐτῶν δυνάμεις, προκύψȣσιν αἱ ἑξῆς ἐξισώσεις $\upsilon^2 + \chi\upsilon + \frac{2\gamma}{\chi^2 + \alpha + \frac{\beta}{\chi}} = 0$, $\upsilon^2 - \chi\upsilon + \frac{1}{2}\chi^2 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{\beta}{2\chi} = 0$, αἵτινες, τȣ̃ χ ἐν ἀ-

ριθμοῖς γνωσθέντος, ϗ αὐταὶ γνωςαίτε ϗ ὡρισμέναι καθίςανται.

508. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν δὲ ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει ὑπάρχῃ $+ \alpha$, ἑκατέρα τῶν δυεῖν παρακτικῶν πρὸ τȣ̃ α ἔχει τὸ $+$· ἐὰν δ' ἐκείνη ἔχῃ $- \alpha$, ϗ τȣ́των ἑκατέρα τὸ α ἔςαι μετὰ τȣ̃ $-$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἐξίσωσιν τεταρτοβάθμιον ἐπιλύειν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἐξίσωσις ἡ $\upsilon^4 - 17\upsilon^2 - 20\upsilon - 6 = 0$, ἧς παραβαλλομένης πρὸς τὴν γενικὴν $\upsilon^4 + \alpha\upsilon^2 + \beta\upsilon + \gamma = 0$, ἔςιν $\alpha = -17$, ϗ $\beta = -20$, ϗ $\gamma = -6$· δι' ὃ δὴ ἡ αὐτῆς ἐξημμένη κυβικὴ ἔςαι $\chi^6 - 34\chi^4 + 313\chi^2 - 400 + 0$, ἧς ἐπιλυομένης κατὰ τὰ εἰρημένα εὑρίσκεται $\chi = 4$· ταύτης δὲ τῆς δυνάμεως σὺν ταῖς τῶν α ϗ β ἀντικαταςαθεισῶν ἐν ταῖς $\upsilon^2 + \chi\upsilon + \frac{2\gamma}{\chi^2 + \alpha + \frac{\beta}{\chi}} = 0$, $\upsilon^2 - \chi\upsilon + \frac{1}{2}\chi^2 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{\beta}{2\chi} = 0$, ἔσονται ἡ μὲν $\upsilon^2 + 4\upsilon + \frac{-12}{16 - 17 + \frac{-20}{+4}} = \upsilon^2 + 4\upsilon + \frac{-12}{16 - 17 - 5} = \upsilon^2 + 4\upsilon + \frac{-12}{-6} = \upsilon^2 + 4\upsilon + 2 = 0$, ἡ δ' ἑτέρα $\upsilon^2 - 4\upsilon + 8 - 8\frac{1}{2} + \frac{-20}{8} = 0$, εἴτ' ȣ̃ν $\upsilon^2 - 4\upsilon - \frac{1}{2} - 2 - \frac{4}{8} = 0$, τȣτέςιν $\upsilon^2 - 4\upsilon - 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, ὅ ἐςιν $\upsilon^2 - 4\upsilon - 3 = 0$· τȣ́των τοίνυν τῶν ἐξισώσεων, ἀμέλει $\upsilon^2 + 4\upsilon + 2 = 0$, ϗ $\upsilon^2 - 4\upsilon - 3 = 0$, κατὰ τὰ δευτεροβάθμια τῶν προβλημάτων ἐπιλυθεισῶν (452, κτ.)

ἀποφέρονται ἐκ μὲν τῆς πρώτης ῥίζαι $-2+\sqrt{2}$, ϗ $-2-\sqrt{2}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $2+\sqrt{7}$, ϗ $2-\sqrt{7}$, αἵτινές εἰσιν αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς προτεθείσης τεταρτοβαθμίȣ ἐξισώσεως· ἀλλὰ ϗ μεθόδῳ ἄλλῃ αἱ τεταρτοβάθμιοι τῶν ἐξισώσεων ἐπιλύονται, ἣν τοῖς πρωτοπείροις χαριζόμενοι παραθήσομεν ἐνταῦθα, ἵνα ϗ ταύτην μὴ ἀγνοῶσι.

Ὑποτεθείσθω ἡ τεταρτοβαθμίȣ ἐξισώσεως ῥίζα $\chi=\sqrt{\pi}+\sqrt{\kappa}+\sqrt{\rho}$· π δὲ ϗ κ ϗ ρ ἔςωσαν ποσότητες ἐμφαίνȣσαι τὰς ῥίζας τῆς τριτοβαθμίȣ ἐξισώσεως $\tau^3-\varphi\tau^2+\vartheta\tau-\eta=0$, ὥςε εἶναι $\pi+\kappa+\rho=\varphi$, ϗ $\pi\kappa+\pi\rho+\kappa\rho=\vartheta$, ϗ $\pi\kappa\rho=\eta$· τȣ́τȣ δὲ τεθέντος τετραγωνισθήτω ὁ τύπος $\chi=\sqrt{\pi}+\sqrt{\kappa}+\sqrt{\rho}$, ἵνα γένηται $\chi^2=\pi+\kappa+\rho+2\sqrt{\pi\kappa}+2\sqrt{\pi\rho}+2\sqrt{\kappa\rho}$· ἀλλὰ $\pi+\kappa+\rho=\varphi$ ἀντικαταςάσει ἄρα ϗ μεταθέσει, εὑρεθήσεται $\chi^2-\varphi=2\sqrt{\pi\kappa}+2\sqrt{\pi\rho}+2\sqrt{\kappa\rho}$, ἥτις τετραγωνισθεῖσα πάλιν γενήσεται $\chi^4-2\chi^2\varphi+\varphi\varphi=4\pi\kappa+4\pi\rho+4\kappa\rho+8\sqrt{\pi\pi\kappa\rho}+8\sqrt{\pi\kappa\rho\rho}$· ἀλλὰ $\vartheta=\pi\kappa+\pi\rho+\kappa\rho$, ἄρα (ἀντικαταςάσει ϗ μεταθέσει) $\chi^4-2\varphi\chi\chi+\varphi\varphi-4\vartheta=8\sqrt{\pi\kappa\rho}\cdot(\sqrt{\pi}+\sqrt{\kappa}+\sqrt{\rho})$ (A)· ἀλλὰ $\pi\kappa\rho=\eta$, ϗ $\sqrt{\pi\kappa\rho}=\sqrt{\eta}$ ἐκ τȣ̃ ἀκολȣ́θȣ, ϗ $\sqrt{\pi}+\sqrt{\kappa}+\sqrt{\rho}=\chi$· ἄρα $\chi^4-2\varphi\chi\chi-8\chi\times\sqrt{\eta}+\varphi\varphi-4\vartheta=0$, ἧς μία τῶν ῥιζῶν ἐςὶ $\chi=\sqrt{\pi}+\sqrt{\kappa}+\sqrt{\rho}$, τῶν π, κ, ρ, ῥιζῶν ἐσῶν τῆς τριτοβαθμίȣ ἐξισώσεως $\tau^3-\varphi\tau^2+\vartheta\tau-\eta=0$· ἡ τοίνυν τεταρτοβάθμιος ἐξίσωσις, εἰς ἣν ἀφικόμεθα, ἐκληφθῆναι δύναται ὡς καθολικὴ, ἐξὸν ἁπάσης τεταρτοβαθμίȣ ἐξισώσεως τὸν δεύτερον ὅρον ἐξελεῖν (495)· φέρ' ἴδωμεν οὖν ὅπως ἂν ἐξαχθείησαν αἱ ῥίζαι ταύτης τῆς ἐξισώσεως.

Ἔςω ἐξίσωσις ἡ $\chi^4 - \alpha\chi^2 - \beta\chi - \gamma = 0$ (Β) ἧς ζητοῦνται αἱ ῥίζαι· παραβαλλομένης οὖν ταύτης πρὸς τὴν Α, εὑρίσκεται ά. $2\varphi = \alpha$, ἢ $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. β΄. $8\sqrt{\eta} = \beta$. ἄρα $64\eta = \beta\beta$, καὶ $\eta = \frac{\beta\beta}{64}$. γ΄. $\varphi\varphi - 4\vartheta = -\gamma$, ἢ $\frac{\alpha\alpha}{4} - 4\vartheta + \gamma = 0$, ἢ $\gamma + \frac{\alpha\alpha}{4} = 4\vartheta$, καὶ $\vartheta = \frac{\gamma}{4} + \frac{\alpha\alpha}{16}$· τῶν δὴ δυνάμεων τῶν φ, η, ϑ τῶν ἤδη εὑρημένων, ἀντικαταςαθεισῶν ἐν τῇ τριτοβαθμίῳ ἐξισώσει $\tau^3 - \varphi\tau\tau + \vartheta\tau - \eta = 0$, καὶ ταύτης ἐπιλυθείσης κατὰ τὰ τεταρτοβάθμια τῶν προβλημάτων, καὶ ῥίζας ἔχειν εὑρεθείσης ἐξ ὑποθέσεως τὰς π, κ, ρ, μίατις τῶν ῥιζῶν τῆς ἡμετέρας τεταρτοβαθμίου ἐξισώσεως ἔςαι $\chi = \sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho}$.

Οὗτος δὲ ὁ τύπος περιέχει τὰς τέσσαρας ῥίζας τῆς προτεθείσης τεταρτοβαθμίου ἐξισώσεως διὰ τὰ παντοῖα σύμβολα, ἃ ἂν προταχθείη τῶν ῥιζικῶν, καὶ ταῦτα δοκῶν ὀκτὼ δυνάμεις περιέχειν τῆς χ· ἰςέον μέντοι ὅτι $\sqrt{\pi\kappa\rho}$ ὀφείλει εἶναι $= \sqrt{\eta} = \frac{\beta}{8}$· ἐὰν μὲν ἄρα $\frac{\beta}{8}$ ποσότης ᾖ ὑπαρκτική, καὶ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν ποσοτήτων $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{\kappa}$, $\sqrt{\rho}$, ἐπάναγκες εἶναι ὑπαρκτικόν· ἵνα δὲ τοῦτο γένηται, ἐξ ἀνάγκης ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει αἱ δυνάμεις τῆς χ ἕξουσι τὰ σύμβολα οὕτω

$$\chi = \sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho}$$
$$\chi = \sqrt{\pi} - \sqrt{\kappa} - \sqrt{\rho}$$
$$\chi = -\sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} - \sqrt{\rho}$$

$$\chi = -\sqrt{\pi} - \sqrt{\kappa} + \sqrt{\varrho}$$

ἐὰν δὲ $\frac{\beta}{8}$ ποσότης ᾖ ὑπαρκτική, δυνάμεις τῆς χ ἔσονται αἱ ἐφεξῆς

$$\chi = \sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} - \sqrt{\varrho}$$
$$\chi = \sqrt{\pi} - \sqrt{\kappa} + \sqrt{\varrho}$$
$$\chi = -\sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} + \sqrt{\varrho}$$
$$\chi = -\sqrt{\pi} - \sqrt{\kappa} - \sqrt{\varrho}$$

509. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** Κατὰ τὸν ἤδη ἐκτεθέντα κανόνα τεταρτοβάθμιον ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου ὅρου ἄμοιρον ἐπιλύσαι.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ἐξίσωσις ἡ $\chi^4 - 25\chi\chi + 60\chi - 36 = 0$. ταύτης οὖν παραβαλλομένης πρὸς τὴν Β εὑρίσκεται $\alpha = 25$, καὶ $\beta = -60$, καὶ $\gamma = 36$· ἀντικατασταθήτωσαν δὲ αὗται αἱ δυνάμεις ἀντὶ α καὶ β καὶ γ ἐν ταῖς τῶν φ, ϑ, η, καὶ δὴ ἔσαι $\varphi = \frac{25}{2}$, καὶ $\vartheta = \frac{625}{16} + 9 = \frac{769}{16}$, καὶ $\eta = \frac{225}{4}$· καὶ δὴ ἡ τριτοβάθμιος ἐξίσωσις γενήσεται οὕτω $\tau^3 - \frac{25}{2} \cdot \tau^2 + \frac{769}{16}\tau - \frac{225}{4} = 0$. ἵνα δὲ αὕτη ἡ ἐξίσωσις τῶν κλασμάτων ἀπαλλαγῇ, γενέσθω $\tau = \frac{\psi}{4}$, καὶ κατὰ τὰ εἰρημένα (494)· ἔσαι $\psi^3 - 50\psi^2 + 769\psi - 3600 = 0$, ταύτης οὖν ἐπιλυθείσης (483, 499) εὑρίσκεται πρῶτον $\psi = 9$· τῆς δ' ἐξισώσεως διαιρεθείσης διὰ $\psi - 9 = 0$, καὶ πηλίκου προκύπτοντος $\psi\psi - 41\psi + 400 = 0$, ἢ $\psi\psi - 41\psi = -400$, καὶ ταύτης ἐπιλυθείσης κατὰ τῶν προβλημάτων τὰ δευτεροβάθμια προΐασι $\psi = 16$, καὶ $\psi = 25$· τοιγαροῦν αἱ τρεῖς ῥίζαι τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως εἰσὶ $\psi = 9$, καὶ $\psi = 16$, καὶ $\psi = 25$· ἄρα $\tau = \frac{9}{4}$, καὶ $\tau = 4$, καὶ $\tau = \frac{25}{4}$· οὕτως ἄρα ἔχομεν $\pi = \frac{9}{4}$, καὶ $= 4$, καὶ $\varrho = \frac{25}{4}$· ἀλλὰ $\sqrt{\pi\kappa\varrho} = \sqrt{\eta}$

$= -\frac{1}{2}{}^{5} = \frac{\beta}{8}$, τηρητέον ἄρα ἐν τοῖς ῥιζικοῖς $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{\kappa}$, $\sqrt{\rho}$ τὰ περὶ τῶν συμβόλων ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει εἰρημένα· ϗ ἐπεὶ $\sqrt{\pi} = \frac{3}{2}$, ϗ $\sqrt{\kappa} = 2$, ϗ $\sqrt{\rho} = \frac{5}{2}$, αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως ἔσονται

$$\chi = \tfrac{3}{2} + 2 - \tfrac{5}{2} = 1$$
$$\chi = \tfrac{3}{2} - 2 + \tfrac{5}{2} = 2$$
$$\chi = -\tfrac{3}{2} = 2 + \tfrac{5}{2} = 3$$
$$\chi = -\tfrac{3}{2} - 2 - \tfrac{5}{2} = -6$$

Περὶ ἐξισώσεων τῶν καθυπερτέρων βαθμῶν.

510. Ἐνταῦθα ἀποχρήσει ἡμῖν ἐκθέσθαι τὴν μέθοδον, δι' ἧς μία γοῦν τῶν ῥιζῶν τῶν ἐν τοῖς καθυπερτέροις βαθμοῖς δύναται παρίςασθαι διὰ τύπȣ παρεμφεροῦς τῷ ἀποδοθέντι περὶ τῶν τριτοβαθμιίων ἐξισώσεων (499)· ϗ γὰρ ȣ̓δεμία ἔς γε ϗ νῦν ἔγνωςαι μέθοδος, οἵα ἐπιλύειν ἐν ἁπάσῃ περιπτώσει τὰς καθυπερτέρων βαθμῶν ἐξισώσεις. σκεψώμεθα οὖν πρῶτον τίνες ἂν εἶεν τεταρτοβάθμιοι ἐξισώσεις αἱ ταύτῃ τῇ περιπτώσει καθυπαγόμεναι.

Ἔςω $\chi = \mu + \nu$· ἄρα $\chi^4 = \mu^4 + 4\mu^3\nu + 6\mu^2\nu^2 + 4\mu\nu^3 + \nu^4$, εἴτ' οὖν $\chi^4 = \mu^4 = 4\mu\nu \times (\mu+\nu)^2 + \nu^4$·
$$- 2\mu^2\nu^2$$
ἀντὶ δὲ $(\mu+\nu)^2$ ἀντικαταςαθήτω χ^2 ϗ μετατεθήτωσαν πάντες οἱ ὅροι ἐπὶ θάτερα· ϗ δὴ ἔςαι $\chi^4 - 4\mu\nu\chi^2 + 2\mu^2\nu^2 - \mu^4 - \nu^4 = 0$ ἐξίσωσις, ἧς μία τῶν ῥιζῶν ἐςὶ $\chi = \mu + \nu$· ἐν ταύτῃ δὲ τῇ ἐξισώσει ȣ̓κ ἀναγκαίως ἀπαιτεῖται, ἵνα μηδεὶς τῆς χ δείκτης ᾖ περιττός.

Ὑποτεθείσθω αὖθις $\chi = \mu + \nu$· ϗ δὴ ἕξομεν $\chi^5 =$

$\mu^5 + 5\mu^4\nu + 10\mu^3\nu^2 + 10\mu^2\nu^3 + 5\mu\nu^4 + \nu^5$, εἶτ' ἓν $\chi^5 = \mu^5 + 5\mu\nu\,(\mu+\nu)^3 + \nu^5$· ἀντὶ δὲ $\mu+\nu$ ἀντικαταςαθείσης τῆς χ, ϗ γενομένης μεταθέσεως προκύψει ἐξίσωσις $\chi^5 - 5\mu\nu\chi^3 + 5\mu^2\nu^2\chi - \mu^5 - \nu^5 = 0$, ἐξίσωσις, ἧς μία τῶν ῥιζῶν ἐςὶ $\chi = \mu + \nu$· δύω δὲ ταῦτα ἔνεισι ταύτῃ τῇ ἐξισώσει· ἐδεὶς γὰρ δείκτης τῆς χ ἐςὶν ἄρτιος, ϗ ὁ συνεργὸς τῆς χ πεμπτημόριόν ἐςι τε τετραγώνε τε ἀπὸ τε συνεργε τῆς χ^3.

Κείσθω πάλιν $\chi = \mu = \nu$· οὐκοῦν ἔςαι $\chi^6 = \mu^6 + 6\mu^5\nu + 15\mu^4\nu^2 + 20\mu^3\nu^3 + 15\mu^2\nu^4 + 6\mu\nu^5 + \nu^6$, διατεθείσθω δὲ καὶ ἄυτη ἡ ἐξίσωσις οὕτω $\chi^6 = \mu^6 + 6\mu\nu\,(\mu+\nu)^4 + \nu^6$, ἥτις ἀντικαταςαθέντος τοῦ χ

$$\begin{matrix} -\,9\mu^2\nu^2\,(\mu+\nu)^2 \\ +\,2\mu^3\nu^2 \end{matrix}$$

ἀντὶ $\mu+\nu$, ϗ μεταθέσεως γενομένης μεταβάλλει εἰς $\chi^6 - 6\mu\nu\chi^4 + 9\mu^2\nu^2\chi^2 - 2\mu^3\nu^3 - \mu^6 - \nu^6 = 0$, ἐξίσωσις, ἧς μία τῶν ῥιζῶν ἐςὶ $\chi = \mu + \nu$· ἐν ταύτῃ δὲ τῇ ἐξισώσει ἐδεὶς μὲν δείκτης τῆς χ ἐςὶ περιττὸς, ὁ δὲ συνεργὸς τε χ^2 τεταρτημόριόν ἐςι τε τετραγώνε τε ἀπὸ τε συνεργε τε χ^4.

Ἐὰν δὲ ζητῆται περὶ τῆς ἑβδόμε βαθμε ἐξισώσεως, εἰρεθήσεται, $\chi^7 = \mu^7 + 7\mu\nu\,(\mu+\nu)^5 + \nu^7$, ἥτις,

$$\begin{matrix} -\,14\mu^2\nu^2\,(\mu+\nu)^3 \\ +\,7\mu^3\nu^3(\mu+\nu) \end{matrix}$$

ἀντικαταςχθέντος τε χ ἀντὶ $\mu+\nu$, ϗ μεταθέσεως πραχθείσης γίνεται $\chi^7 - 7\mu\nu\chi^5 + 14\mu^2\nu^2\chi^3 - 7\mu^3\nu^3\chi - \mu^7 - \nu^7 = 0$· ἐξίσωσις, ἧς μία τῶν ῥιζῶν ὑπάρχει $\chi = \mu + \nu$· ἐν ταύτῃ δὲ, ἐδεὶς μὲν τῶν τῆς χ δεικτῶν ὀφείλει εἶναι ἄρτιος, τὸ δὲ ἑπτημόριον τε τῆς χ^5 συνεργε

τετραγωνισθὲν, ϗ ἐπὶ 14 πολλαπλασιασθὲν, δίδωσι τὸν συνεργὸν τȣ̃ χ^3, αὐτὸ δὲ τȣ̃το τὸ ἑπτημόριον κυϐισθὲν ϗ ἐπὶ 7 πολλαπλασιασθὲν δίδωσι τὸν συνεργὸν τῆς χ.

Ὑψώσθω μ+ν εἰς ὄγδοον βαθμὸν, ϗ διατεθείσθω ὡς ἀνωτέρω ἡ ἐξίσωσις· ȣ̓κȣ̃ν ἔςαι $\chi^8 = \mu^8$

$+ 8\mu\nu\ (\mu+\nu)^6 \times \nu^8$ · ἀντικαταςαθέντος δὲ τȣ̃ μ+ν

$-20\mu^2\nu^2\ (\mu+\nu)^4$

$+ 16\mu^3\nu^3\ (\mu+\nu)^2$

$- 2\mu^4\nu^4$

ἀντὶ χ ϗ πάντων τῶν ὅρων μετατεθέντων ἐν θατέρῳ μέλει τῆς ἐξισώσεως τῷ πρώτῳ, προελεύσεται ἡ ἐξίσωσις

$$\chi^8 - 8\mu\nu\chi^6 + 20\mu^2\nu^2\chi^4 - 16\mu^3\nu^3\chi^2 + 2\mu^4\nu^4 = 0 \cdot$$
$$- \mu^8$$
$$- \nu^8$$

ταύτης τῆς ἐξισώσεως ἀπεῖναι χρεὼν πάντας τȣ̀ς περιτταρίθμȣς βαθμȣ̀ς τῆς χ· τὸ δὲ $\frac{1}{8}$ τȣ̃ συνεργȣ̃ τῆς χ^6 τετραγωνισθὲν μὲν ϗ ἐπὶ 20 ἀχθὲν ἀποδιδόναι τὸν συνεργὸν τῆς χ^4, κυϐισθὲν δὲ ϗ ἐπὶ 16 πολλαπλασιασθὲν, τὸν τȣ̃ χ^2.

Τῇ αὐτῇ μεθόδῳ εὑρεθήσεται ἐξίσωσις βαθμȣ̃ ἐννάτȣ, ἧς μία τῶν ῥιζῶν ἔςαι $\chi=\mu+\nu$· ἰδȣ̀ δὴ ἡ ἐξίσωσις αὕτη

$$\chi^9 - 9\mu\nu\chi^7 + 27\mu^2\nu^2\chi^5 - 30\mu^3\nu^3\chi^3 + 9\mu^4\nu^4\chi - \mu^9 - \nu^9 = 0 \cdot$$

πᾶσαι δὲ αἱ διαληφθεῖσαι ἐξισώσεις ἔχȣσι μίαν τῶν καθ' ἑαυτὰς ῥιζῶν $\chi=\mu+\nu$.

Προφανῶς δὲ καθορᾶται ὡς ταῖς περιτταρίθμοις τῶν ἐξισώσεων πάντες οἱ τῆς χ ἀρτιάριθμοι βαθμοὶ ἄπεισι· τȣ̓ναντίον δὲ, ἐκ τῶν ἀρτιαρίθμων ἐξαφανίζονται πάντες οἱ περιττάριθμοι· ἐὰν δὲ π ἐμφαίνῃ τὸν τῆς ἐξισώσεως

βαθμὸν, $-\mu^{\pi}-\nu^{\pi}$, ἔςαι ἔσχατος ὅρος κοινὸς ἁπάσαις ταῖς ἐξισώσεσιν· ἐν δὲ ταῖς ἀρτιαρίθμοις τῶν ἐξισώσεων ὁ ἔσχατος ὅρος περιέξει ἔτι καὶ τὴν ποσότητα $2\mu^{\frac{\pi}{2}}\nu^{\frac{\pi}{2}}$· οἱ δὲ ὅροι παρὰ τὰς μ^{π}, ν^{π}, οἷς ἀεὶ πρόσεσι τὸ $-$ σύμβολον, ἔχουσιν ἀμοιβαδὸν τὰ σύμβολα $+$, $-$· διὰ ταῦτα δὴ ἐν ταῖς ἀρτιαρίθμοις ἐξισώσεσιν ὁ ὅρος $2\mu^{\frac{\pi}{2}}\nu^{\frac{\pi}{2}}$ ὀφείλει ἔχειν τὸ μὲν $+$ (ἐκληπτέον δὲ ταύτην τὴν ποσότητα ὡς συνεργὸν τῆς χ^{0}), εἰ π ἀριθμὸς εἴη ἀρτιάκις ἄρτιος, εἴτ' οὖν φύσεως τοιᾶσδε 4, 8, 12, 16 κτ· τὸ δὲ $-$, εἰ π εἴη περισσάκις ἄρτιος, ταυτὸν εἰπεῖν οὕτως ἔχων φύσεως 2, 6, 10, 14, 18 κτ· ἐν δὲ τοῖς συνεργοῖς ἀεὶ εὑρίσκονται κατὰ τὸ ἐφεξῆς $\mu\nu$, $\mu^2\nu^2$, $\mu^3\nu^3$ κτ· $\mu\nu$ πολλαπλασιάζεται ἀεὶ ἐπὶ τὸν δείκτην π· ἵνα δὲ εὑρεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ, ἐφ' οὓς πολλαπλασιάζονται $\mu^2\nu^2$, $\mu^3\nu^3$ κτ., ὁ ποτεθείσθω $\chi=\mu+\nu$· οὐκοῦν $\chi^2 - 2\mu\nu - \mu^2 = 0$,

$$- \nu^2$$

ἧς ἡ μὲν τῶν ῥιζῶν ἐςι $=\mu+\nu$, ἑτέρα δὲ $=-\mu-\nu$· ὑποσυναπτομένης δὲ καὶ τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως συςαθήσεται ὁ ἐφεξῆς πίναξ

	$\mu\nu$	$\mu^2\nu^2$	$\mu^3\nu^3$	$\mu^4\nu^4$	$\mu^5\nu^5$	$\mu^6\nu^6$	$\mu^7\nu^7$
Β	2						
Γ	3						
Δ	4	2					
Ε	5	5	2				
ς	6	9					
Ζ	7	14	7				
Η	8	20	16	2			
Θ	9	27	30	9			

Ι	10	35	50	25	2		
ΙΑ	11	44	77	55	11		
ΙΒ	12	54	112	105	36	2	
ΙΓ	13	65	156	182	91	13	
ΙΔ	14	77	210	294	196	49	2

ἐν μὲν οὖν τῷ πρώτῳ ὁριζοντίῳ χώρῳ ἐτέθησαν $\mu\nu$, $\mu^2\nu^2$, $\mu^3\nu^3$ κτ. ἐν δὲ τῇ πρώτῃ ὁριζοντίῳ στήλῃ ἑλληνικὰ γράμματα, ἐκδηλοῦντα τὸν βαθμὸν τῆς ἐξισώσεως· οἱ δὲ ἀριθμοὶ οἱ ὑποκείμενοι τοῖς $\mu\nu$, $\mu^2\nu^2$, $\mu^3\nu^3$ κτ. εἰσὶν οἱ ζητούμενοι πολλαπλασιασταί· σαφὲς οὖν ὡς ἡ στήλη ἡ ἀντίστοιχος τοῖς $\mu\nu$ πρόοδός ἐστιν ἀριθμητικὴ ἧς διαφορὰ ἡ 1, ἣν προάγειν δυνάμεθα ἐς ὃ βουλόμεθα· ἕκαστος δὲ ἀριθμὸς τῆς στήλης $\mu^2\nu^2$ τὸ ἄθροισμά ἐστι τῶν ὅρων τῆς πρὸς δεξιὰν αὐτῆς στήλης τῶν ἐνὶ χώρῳ αὐτοῦ καθυπερτέρων· ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων στηλῶν· διὰ δὲ τουτοῦ τοῦ πίνακος τοῦ ὅσον ἂν τις βούλοιτο προαχθέντος ἄν, εὑρεθήσεται ἐξίσωσις παντὸς βαθμοῦ περιέχουσαν μίαν ῥίζαν $\chi = \mu + \nu$· καλῶ δὲ ταύτην ἐ π ι λ ύ σ ι μ ο ν.

511. ΘΕΩΡΗΜΑ. Πᾶσα ἐξίσωσις, ᾗ ἐνδεῖ τῶν ὅρων τῶν ἀρτίου χώρου, καὶ ἧς τῶν ὅρων οἱ συνεργοὶ ἀνάλογόν εἰσι ταῖς ποσότησι $\mu\nu$, $\mu^2\nu^2$ κτ. πολλαπλασιαζόμενοι ἐπὶ τοὺς τοῦ ἤδη ἐκτεθέντος πίνακος ἀριθμούς, ἕξει μίαν ῥίζαν ὁμοίαν τῷ τύπῳ. (499).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστω γὰρ τεταρτοβάθμιος ἐξίσωσις ἡ $\chi^4 \pm 4\alpha\chi^2 + 2\alpha^2 - \beta = 0$, καὶ παραβεβλήσθω πρὸς τὴν ἐπιλύσιμον· καὶ δὴ ἔσται $\mu\nu = \mp \alpha$, καὶ $\mu^4 + \nu^4 = \beta$, ἐν ᾗ ἀντικατασταθείσης τῆς τοῦ ν δυνάμεως λαμβανομένης ἐκ τῆς προτέρας ἐξισώσεως (ἐπεὶ γὰρ $\mu\nu = \mp \alpha$· ἄρα $\nu = \frac{\mp\alpha}{\mu}$, καὶ $\nu^4 = \frac{\alpha^4}{\mu^4}$) προκύψει $\mu^4 + \frac{\alpha^4}{\mu^4}$

$= \beta$, ἥτις πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ μ^4 γίνεται $\mu^8 + \alpha^4 = \mu^4\beta$, ϗ μεταθέσει $\mu^8 - \mu^4\beta = - \alpha^4$, ἐξίσωσις ἥτις ἐπιλυθεῖσα κατὰ τὴν μέθοδον τῶν δευτεροβαθμίων προβλημάτων δίδωσι $\mu^4 = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}$, καὶ $\mu = \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)}$. ἐν δὲ ταῖς ἀνωτέραις δυσὶν ἐξισώσεσιν, ἐὰν ἀντὶ τῆς δυνάμεως τȣ̃ ν ληφθῇ ἡ δύναμις τȣ̃ μ εὑρεθήσεται $\nu = \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)}$. ἄρα $\mu + \nu = \chi = \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)} + \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)}$. τὰ δὲ περὶ τȣ̃ ἐν τῷ δευτέρῳ μέρει συμβόλȣ — κρατεῖ τὰ αὐτὰ, ἃ εἴρηται κἀπὶ τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων.

Ἐὰν δὲ αἱ δυνάμεις τȣ̃ μ καὶ ν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὰς μοναδικὰς ῥίζας τȣ̃ τετάρτȣ βαθμȣ̃, ληφθήσονται αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς προκειμένης ἐξισώσεως· αἱ δὲ μοναδικαὶ ῥίζαι τῆς τετάρτης δυνάμεως εὑρίσκονται ὅτω· κείσθω $\chi^4 - 1 = 0$, ἥτις διαιρεθεῖσα διὰ $\chi^2 - 1 = 0$ δίδωσι πηλίκον $\chi^2 + 1 = 0$· ἡ ἄρα $\chi^4 - 1 = 0$ γινόμενόν ἐςιν ἐκ τῶν δύω ἐξισώσεων $\chi^2 - 1 = 0$, ϗ $\chi^2 + 1 = 0$, ἐπεὶ δὲ τῆς μὲν ῥίζαι εἰσὶ $1, -1$ τῆς δὲ $+\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$· ἄρα αἱ $1, -1, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$ εἰσὶν αἱ μοναδικαὶ ῥίζαι τῆς τετάρτης δυνάμεως.

Ἐπὶ ταύτας πολλαπλασιαςέον τὰς εὑρεθείσας δυνάμεις τȣ̃ μ καὶ ν· τοιγαρȣ̃ν τῆς μὲν ἐξισώσεως $\chi^4 - 4\alpha\chi^2 + 2\alpha^2 - \beta = 0$ ῥίζαι εἰσὶ

$$\chi = + \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)} + \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)}$$

$$\chi = - \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)} - \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)}$$

$$\chi = +\sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)} \times (\sqrt{-1}) -$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)} \times (\sqrt{-1})$$

$$\chi = -\sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)} \times (\sqrt{-1}) -$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)} \times (\sqrt{-1})$$

Τῆς δὲ ἐξισώσεως $\chi^4 + 4\alpha\chi\chi + 2\alpha\alpha - \beta = 0$ ῥίζαι αἵδε.

$$\chi = +\sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)} - \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)}$$

$$\chi = -\sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)} + \sqrt[4]{\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}}$$

$$\chi = +\sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)} \times (\sqrt{-1}) +$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)} \times (\sqrt{-1})$$

$$\chi = -\sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)} \times (\sqrt{-1}) -$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)} \times (\sqrt{-1})$$

512. Ἔστω ἤδη ἐξίσωσις πεμτοβάθμιος ἡ $\chi^5 - 5\alpha\chi^3 + 5\alpha^2\chi - \beta = 0$, ἥτις τῇ ἐπιλυσίμῳ παραβαλλομένη δίδωσι $\mu\nu = \alpha$, καὶ $\mu^5 + \nu^5 = \beta$, καὶ ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει ἐκ διαδοχῆς ἀντικαθισαμένων τῶν δυνάμεων τῆς μ καὶ ν, αἳ εὑρίσκονται ἐν τῇ προτέρᾳ, ποριωθήσεται

$$\mu = \sqrt[5]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta}{4} - \alpha^4}\right)} \text{ καὶ } \nu = \sqrt[5]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta}{4} - \alpha^4}\right)}.$$

εἰσὶ δὲ ῥίζαι μοναδικαὶ τῆς πέμπτης δυνάμεως αἱ 1,

$$\frac{-\sqrt{5} - 1 \pm \sqrt{-10 + \sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{+\sqrt{5} - 1 \pm \sqrt{-10 - \sqrt{5}}}{4},$$ αἳ εὑρίσκονται

λυομένης τῆς ἐξισώσεως $\chi^5 - 1 = 0$ (*). ἄρα πολλαπλασιαζομένων τῶν εὑρεθεισῶν δυνάμεων τῆς μ καὶ ν ἐπὶ ταύτας τὰς ῥίζας, καὶ τιθεμένων τῆς μὲν τοῦ μ δυνάμεως $= A$, τῆς δὲ τοῦ $\nu = B$ πορισθήσονται αἱ ἐφεξῆς ἐξισώσεις· $\chi = A + B$

$$\chi = \frac{A(-\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}})}{4} + \frac{B(-\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}})}{4}$$

$$\chi = \frac{A(-\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}})}{4} + \frac{B(-\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}})}{4}$$

(*) Ἔςω ἐξίσωσις ἡ $\chi^5 - 1 = 0$· αὕτη ἐν διαιρεθεῖσα διὰ $\chi - 1 = 0$, πηλίκον δίδωσι $\chi^4 + \chi^3 + \chi^2 + \chi + 1 = 0$, ἥτις ἐπιλυομένη κατὰ τοὺς ἐκδεδομένους κανόνας (506) προβαλεῖ ῥίζας τὰς ἤδη ἐκτεθειμένας. ἀλλὰ περὶ εὑρέσεως τῶν μοναδικῶν ῥιζῶν ἑκάςου τε ἰδίᾳ, καὶ καθολικώτερον παντὸς βαθμοῦ, καὶ ἄλλοις διείληπται, καὶ δὴ καὶ τῷ ἀειμνήςῳ Νικηφόρῳ τῷ Θεοτόκῃ, τόμῳ Γ τοῦ ἀρτίως ἐκδοθέντος αὐτοῦ Μαθηματικοῦ συντάγματος §. 136 μέχρι §. 142, ὃν μετιέτω ὁ τῆς τούτων εὑρέσεως ἐφιέμενος· ἡμῖν δὲ ἀξυντελῆ ταῦτα ἐν τῇ ἀνὰ χεῖρας πραγματείᾳ, καὶ οὐδ' ἂν περὶ τούτων εἴπομεν οὐδὲν, εἰ μὴ τῶν περὶ ἐπιλύσεως τῶν ἐξισώσεων καθολικωτέρας ἀκροθιγῶς καθαπτόμενοι ἐκ τῶν τοῦ Ἀββᾶ Σαυρίου (Sauri) παρετιθέμεθα ἐνταῦθα, ἃ δὴ καὶ παρεθέμεθα.

$$\chi = \frac{A(\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}})}{4} + \frac{B(\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}})}{4}$$

$$\chi = \frac{A(\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}})}{4} + \frac{B(\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}})}{4}$$

ἐν γένει δὲ ἐὰν ᾖ ἐξίσωσις περισσοβάθμιος ἡ $\chi^{\pi} - \pi\alpha\chi^{\pi-2}$ κτλ. $-\beta = o$, εὑρεθήσεται ἀεὶ μία ῥίζα $\chi = \sqrt[\pi]{(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^{\pi}})} + \sqrt[\pi]{(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^{\pi}})}$, ἧς τὰ ῥιζικὰ σύμβολα ἐμφαίνεσιν αἱ σύςοιχοι μοναδικαὶ ῥίζαι. τῶν δὲ ἀρτιοβαθμίων ἐξισώσεων, ὧν λειπτικὸς ὁ δεύτερος ὅρος, ὡς $\chi^{\pi} - \pi\alpha\chi^{\pi-2}$ κτλ. $-\beta = o$, ἔσονται δύω ῥίζαι αἱ $\chi = \pm \sqrt[\pi]{(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^{\pi}})} \pm \sqrt[\pi]{(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^{\pi}})}$· ἐὰν δὲ ὁ δεύτερος ὅρος ἔχῃ τὸ σύμβολον $+$, ἔσονται ῥίζαι δύω αὗται $\chi = \pm \sqrt[\pi]{(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^{\pi}})} \mp \sqrt[\pi]{(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^{\pi}})}$.

Σημειωτέον δὲ, ὅτι π ἀρτίε ὄντος, $-\alpha\pi$ ἀεί ἐςι ποσὸν λειπτικόν· περισσε͂ δὲ ὄντος τε͂ π, λειπτικὸν μὲν ἔςαι, εἰ α εἴη ὑπαρκτικὸν, ὑπαρκτικὸν δὲ, εἴπερ α εἴη λειπτικόν· ἵνα δὲ γνωσθῶσιν αἱ ἄλλαι ῥίζαι, εὑρετέον τὰς μοναδικὰς ῥίζας τε͂ βαθμε͂ π, εἶτ' οὖν ἐπιλυτέον τὴν ἐξίσωσιν $\chi^{\pi} - 1 = o$, καὶ ἐφ' ἑκάςην αὐτῶν πολλαπλασιαςέον τὰ ποσὰ $\sqrt[\pi]{(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^{\pi}})}$, $\sqrt[\pi]{(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^{\pi}})}$.

Μέθοδος, καθ' ἣν ἐν ἀριθμοῖς ἐπὶ τῶν ἀλόγους ῥίζας περιεχουσῶν ἐξισώσεων, ὅτι ἔγγιστα τῶν ἀληθῶν γινόμεθα.

513. α'. Εὑρεθήτωσαν πάντες οἱ διαιρέται τοῦ ἐσχάτου ὅρου (489) τῆς δεδομένης φέρ' εἰπεῖν ἐξισώσεως $\chi^3 - 5\chi + 6 = 0$ ὑπαρκτικοί τε καὶ λειπτικοὶ, εἴτ' οὖν 1, 2, 3, 6, — 1, — 2, — 3, — 6. β'. ἀντικατασταθήτωσαν κατὰ τὸ ἐφεξῆς ἕκαστος τούτων ἀντὶ χ, ἔστ' ἂν μεταλλαγῇ τὸ σύμβολον τοῦ συμποσώματος τῆς ἐξισώσεως· ἡ δὲ ῥίζα ἔσται ποσότης μεταξὺ κειμένη τῆς τε, καθ' ἣν τὸ σύμβολον μετήλλακται, καὶ τῆς προτέρας· οὐκοῦν ἐν τῷ προκειμένῳ ὑποδείγματι ἔσται

+ 1 . . .	1	— 5	+ 6	= +	3
+ 2 . . .	8	— 10	+ 6	= +	4
+ 3 . . .	27	— 15	+ 6	= +	18
+ 6 . . .	216	— 30	+ 6	= +	192
— 1 . . .	— 1	+ 5	+ 6	= +	10
— 2 . . .	— 8	+ 10	+ 6	= +	8
— 3 . . .	— 27	+ 15	+ 6	= —	6

ἐπεὶ τοίνυν ἀντικαταστάσει τοῦ — 3 ἡ ἐξίσωσις ἐξ ὑπαρχούσης ἀπέλιπε, δῆλον ὅτι ἡ ἀληθὴς ῥίζα μεταξὺ κεῖται — 2 καὶ — 3· εἰλήφθω οὖν ῥίζα τῆς ἐξισώσεως ἡ — 2, 5, ἧς ἀντικατασταθείσης ἀντὶ χ εὑρίσκεται συμπόσωμα + 2, 875, ποσότης ἀμέλει ὑπαρκτική· οὐκοῦν ἡ ἀληθὴς ῥίζα κείσεται μεταξὺ — 2, 5 καὶ — 3· εἰλήφθω οὖν ἡ — 2, 7, ἧς τῇ ἀντικαταστάσει ἡ ἐξίσωσις γίνεται — 0, 183, τουτέστι ποσότης λειπτική· ἐπεὶ τοίνυν ἡ μὲν — 2, 5 δίδωσι ποσὸν ὑπαρκτικὸν, ἡ δὲ — 2, 7 ποσὸν λειπτικὸν, ἡ δύναμις τῆς χ κείσεται πάντως μετα-

ξὺ — 2, 5 ϗ — 2, 7· ἔςω ἒν ἡ — 2, 6, ἧς ἀντι-κατασαθείσης γίνεται ἡ ἐξίσωσις + 0, 424· ἐπεὶ δὲ τἒτο ὑπάρχει δῆλον, ὅτι ἡ ἀληθὴς ῥίζα ἐνυποκρύπτεται μεταξὺ — 2, 6 ϗ — 2, 7, εἴτ' ἒν ἔςι — 2, 6 μετά τινος κλάσματος, ἥττονος ἢ δεκατημόριον ταύτης τῆς ποσότητος, ἦ δῆλον· κληθήτω δὲ τἒτο τὸ κλάσμα ξ· ϗ δὴ ἔςαι $\chi = -2,6 - \xi$· ἐπεὶ δὲ $\xi < \frac{1}{10}$· ἄρα ξ^2 πολὺ $< \frac{1}{100}$, ϗ ξ^3 πολὺ ἔτι $< \frac{1}{1000}$· διὸ αἱ δυνάμεις τἒ ξ^2 ϗ ξ^3 παροφθῆναι ἔχἒσι πρός γε τὸ ὅλον ποσόν· ἀντικατασαθεισῶν τοιγαρἒν ἀντὶ χ^3 τῶν δυνάμεων τῶν ἀπὸ — 2, 6 — ξ ἐν τῇ ἐξισώσει, προκύψει ἥδε ἡ ἐξίσωσις·

$\chi^3 = (-2,6+\xi)^3 = (-2,6)^3 + 3(-2,6)^2\xi$

$-5\chi = -5(-2,6+\xi) = -5(-2,6)$

$-5\xi + 6 = 0$· τὸ δὲ ἐκ μόνης τῆς ἀντικατασάσεως συμπόσωμα ἔςαι· $(-2,6)^3 + 3(-2,6)^2\xi - 5(-2,6) - 5\xi + 6 = 0$

$$\begin{array}{lcrr}
\text{εἴτ' ἒν } (-2,6)^3 & = & -17,566 & \\
+3(-2,6)^2\xi & = & & +20,28\xi \\
-5(-2,6) & = & +13,000 & \\
-5\xi \ \ldots & = & & -5\xi \\
+6 \ \ldots & = & \ldots\ldots\ldots & +6=0 \\
\hline
\end{array}$$

τὸ δ' ὅλον συμπόσωμα $= -4,566 + 15,28\xi + 6 = 0$; ὅπερ ἀναγωγῇ γίνεται $= + 15,28\xi + 1,424 = 0$,

εἴτ' ἒν $15,28\xi = -1,424$, ϗ $\xi = -\dfrac{1,424}{15,28}$,

ὅ ἐςιν ἐν δεκαδικοῖς $\xi = -0,09$· ἐκἒν ἡ δύναμις τῆς χ, εἴτ' ἒν $\chi = -2,6 + \xi$ γίνεται $\chi = -2,6 - 0,09$, ὅ ἐςι $\chi = -2,69$.

Βἐλομένοις δὲ ἐντελεςέραν εὑρεῖν τὴν τῆς χ δύναμιν, θετέον $\chi = -2,69 + \tau$· τοιγαρἒν ἔςαι

$$\chi^3 = (-2,69)^3 + 3(-2,69)^2 . \tau$$
$$-5\chi = -5(-2,69) - 5\tau$$
$$+6 = +6$$

τῶν δὲ πράξεων, ὡς ἀνωτέρω ἐκπερανθεισῶν, $-0,015109 + 16,7083\tau = 0$· ὅθεν ἀποισόμεθα $\tau = \frac{0,015109}{16,7083}$, τ8τέςι $\tau = 0,000904$· ἡ τοίνυν δύναμις τῆς χ, εἴτ' ἐν $\chi = -2,69 + \tau$ γίνεται $\chi = -2,69 + 0,000904 = -2,689096$.

Εἰ δέ τις βέλοιτο ἔτι ἐγγυτέρω τῆς ἀληθείας πελάσαι, λαβέτω $\chi = -2,689096 + \upsilon$, καὶ ἐπαναλαβέτω τὰς πράξεις ὡς ἀνωτέρω. Τὰ αὐτὰ δὲ πραχθήσεται ϗ ἐπὶ ἐξισώσεων καθυπερτέρων, ἐὰν β8λομένοις ἡμῖν ᾖ διὰ ταύτης τῆς Μεθόδ8 τὴν ὡς ἔγγιςα τῆς ἀληθ8ς ἀριθμητικὴν ῥίζαν εὑρίσκειν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ Αὀρίςων Προβλημάτων.

514. Προβλήματα ἀόριςα καλεῖται, ὧν πλεί8ς αἱ ἄγνωςοι ποσότητες, ἤπερ αἱ Θέσεις (438), ϗ ἅπερ ἀεὶ μὲν πολλὰς, τὰ πολλὰ δ' ἀπείρ8ς ἐπιλύσεις ὑφίςαται· ἐκ ἂν ἐν λογιζόμενοι τῷ τὴν ἐξίσωσιν ἐπιλύσαι τὴν ἰδίαν τῆς ἀγνώς8 προσδιορίσαιμεν δύναμιν.

515. Ταύτη ἄρα φύσεως ἔχ8σι πάντα τὰ δευτεροβάθμια προβλήματα· κἂν γὰρ μία μὲν αὐτῶν ἡ ἐξίσωσις, μία δὲ ϗ ἡ Θέσις, ἀεὶ μέντοι δύω αὐτῶν αἱ ἄγνωςοι ἡ μὲν ὑπαρκτικὴ, λειπτικὴ δὲ ἡ ἑτέρα (457)· ϗ

δὴ ὁ τὸ πρόβλημα ἐπιλύσας ἐκ ἂν ὁρίσειεν ὁποτέραν τῶν δύω ὁ προτείνας ὑπέθετο· ταυτὸν δὲ γενικῶς ῥητέον ϗ περὶ τῶν ὑπερτέρων μὲν, ἀρτιάριθμον δὲ δείκτην ἐχȣσῶν, ἐξισώσεων (127).

516. Ἀλλὰ ϗ πᾶσα ἐν γένει ἐξίσωσις σύνθετος θεωρηθείη ἂν ὡς Ἀόριστον πρόβλημα· τοσαχῶς γὰρ αὐτῶν ἑκάστη ἐπιλυθήσεται διαφόρως, ὅσων μονάδων ἐστὶ περιεκτικὸς ὁ τὸν βαθμὸν αὐτῶν παριστὰς ἀριθμός.

517. Οὐ μὴν ἀλλὰ ϗ τὰ τῇ καλȣμένῃ τῆς συγκράσεως μεθόδῳ ἐμπεριεχόμενα προβλήματα ὁμοφυῆ τȣτοις ὄντα κατείδομεν (Ἀριθ. 285)· ϗ τῆς κράσεως γὰρ γινομένης, ϗ δυνατὸν ὂν τὰς διαφόρȣς ἐξ ὧν αὕτη ὕλας ὁρίσασθαι, ἀδύνατον μέντοι ὁρίσασθαι ἥτις πραγματικῶς ἔχε χώραν· ϗ ταῦτα τοίνυν ἔσεται Ἀόριστα προβλήματα.

518. Τελευταῖον δὲ, τῶν ἁπλῶν, ἢ πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, ἀόριστα ὑπάρχει, ὧν αἱ ἄγνωστοι πλείȣς τῶν θέσεων, ϗ δὴ ϗ τῶν ἐξισώσεων, ϗ ἀπείρȣς ἐπιλύσεις ὑφίσαται.

Εἴρηται ἤδη (438) ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\chi + y = 15$ ἀπειραχῶς ἂν ἐπιλυθείη, ἐν γένει ἀλλ' ȣ̓ν ἐκληφθεῖσα, ϗ περιορισμῶν ἄτερ· τῷ μέντοι ζητȣ̃ντι μόνας ποσότητας ὑπαρκτικὰς ἄπειροι ἐπιλύσεως ἐξαιρȣ̃νται τρόποι· ἄπειροι δὲ ϗ τῷ θέλοντι μόνον ὁλοχερεῖς· ϗ ȣ̔́τω περιγραφήσεται ἡ ἐπίλυσις τρόποις μόνον τέσσαρσι ϗ δέκα, $1 + 14$, $2 + 13$ κτλ.· ἐπιεικῶς γὰρ εἰ κόμματι ἀνθρώπων 15, ἐξ ἀνδρῶν ἅμα ϗ γυναικῶν συμπληρῷτο ἀορίστως, καί τις ὅσοι μὲν ἐκεῖνοι, ὅσαι δ' αὗται εἴησαν πύθοιτο, ȣ̓δένα κλασματώδη ἀριθμὸν τὸ πρόβλημα ὑποστήσεται· ȣ̓ γὰρ ἐξέσαι εἰπεῖν ὡς ἦν ἥμισυς ἀνὴρ, ϗ $14\frac{1}{2}$ γυναῖκες.

519. Παρὰ τοίνυν τὰ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ εἰρημένα

ἐπὶ τῆς μεθόδου τῆς συγκράσεως, καὶ τὰ ἐνταῦθα ἐπὶ τῶν ἄλλων ἀορίστων προβλημάτων, ἀποδώσομεν ἔτι περὶ τούτων τὴν ἐφεξῆς γενικὴν Μέθοδον.

520. α΄. Μίαν τινὰ τῶν ἀγνώστων ἀναδεικτέον μόνην ἐπὶ θατέρου τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν.

521. β΄. Πρὸς τὸ δοκοῦν ἀφοσιωτέον τῇ ἐπὶ θάτερα ἀγνώστῳ δύναμίν τινα μὴ ἀντιπίπτουσαν τῷ προβλήματι· καὶ ἐκ τούτου ἕψεται ἡ τῆς μόνης ἐπὶ θάτερα ἀγνώστου δύναμις· ἐντεῦθεν δὲ ποριοθήσεται καὶ ἡ τῆς τρίτης· ἰδοὺ δὴ μία τις λύσις τοῦ προβλήματος.

522. γ΄. Ἀποδοτέον ἔτι τῇ μὴ μόνῃ ἀγνώστῳ ποσότητι ἄλλην τινὰ δύναμιν, οἵαν μὴ ἀντιπίπτειν τῷ προβλήματι· κἀκ τούτου συναχθήσεται ἄλλη τῆς μόνης ἀγνώστου δύναμις· δευτέρα αὕτη τοῦ προβλήματος λύσις.

523. Καὶ ἐφεξῆς πρακτέον ὡσαύτως, ἐς ὃ ἀφικώμεθα ἐπ' ἀριθμὸν μέγιστον, ἢ ἐλάχιστον, ἔνθ' ἂν ἴδοιμεν, ὡς ἅπασα τοῦ προβλήματος λύσις ἄλλη ὑπάρχει ἀδύνατος.

524. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ἄνθρωποι 20 ἐμισθώσαντο ναῦν ἀργυρίων 58· καὶ οἱ μὲν ἄνδρες αὐτῶν ἐτέλεσαν 4 ἕκαστος· ἑκάστη δὲ τῶν γυναικῶν, 3· τῶν δὲ παιδίων, 1· πόσοι ἄρ' ἦσαν οἱ ἄνδρες, πόσαι αἱ γυναῖκες, καὶ παιδία πόσα;

ΛΥΣΙΣ. Δύω εἰσὶ δήπου ἐνταῦθα αἱ θέσεις· καὶ ἡ μὲν πρώτη τίθησιν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν χ, καὶ τῶν γυναικῶν ψ, καὶ τῶν παιδίων ω, ἐξισοῦσαι τῷ 20, ὅ ἐστιν $\chi + \psi + \omega = 20$· ἡ δευτέρα, ὅτι ὁ τετράκις εἰλημμένος ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν, καὶ ὁ τρὶς τῶν γυναικῶν, καὶ ὁ ἅπαξ τῶν παιδίων, συμπληροῦσιν ἀργύρια 58, ὅ ἐστι $4\chi + 3\psi + \omega = 58$.

Τοιγαροῦν ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἡ δύναμις τῆς

χ ἐςὶ $\chi = 20 - \psi - \omega$, ἥτις ἀντὶ χ ἀντικαταςᾶσα ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀποτελεῖ αὐτὴν $80 - 4\psi - 4\omega + 3\psi + \omega = 58$, ἀναγωγῇ δὲ $80 - \psi - 3\omega = 58$· μεταθέσει δὲ ϗ ἀναγωγῇ $22 - \psi = 3\omega$· ἄρα $\omega = \frac{22 - \psi}{3}$

Φυλακτέον δὲ μὴ ἀποδῶμεν τῇ ψ δύναμίν τινα, ἥτις ἀφαιρεθεῖσα ἀπὸ 22 καταλείπει τι, ὃ διαιρεθὲν διὰ 3 δίδωσι δύναμιν τῆς ω κλασματικὴν (518)· ὑποτεθέντος ἓν $\psi = 1$, τὸ κατάλοιπον $\frac{21}{3} = 7$ ἀναδίδωσι τὴν τῆς ω δύναμιν.

Αὗται δὲ αἱ δυνάμεις τῆς ψ ϗ ω εἰσαχθεῖσαι ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi + \psi + \omega = 20$, ἀναδιδόασι 12 δύναμιν τῆς χ· ἐκεῖν ἦσαν ἐπὶ τῆς νηὸς 12 μὲν ἄνδρες, 1 δὲ γυνή, ϗ παιδία 7· εἴγε $1 \times 3 + 7 \times 1 + 12 \times 4 = 58$· πρώτη λύσις τοῦ προβλήματος.

Τιθεμένης δὲ $\psi = 2$, ἢ $= 3$, τὸ κατάλοιπον τοῦ 22, διαιρεθὲν διὰ 3, ἀπεργάζεται κλάσμα· τιθεμένης μέντοι $\psi = 4$, τὸ κατάλοιπον 18 διαιρέμενον διὰ 3 δίδωσιν $6 = \omega$, ϗ δὴ $\chi = 10$· ἦσαν ἄρα οὕτως ἄνδρες μὲν 10 γυναῖκες δὲ 4, ϗ παιδία 6· ϗ ἐξ αὐτῶν γένοιτ' ἂν $4 \times 3 + 6 \times 1 + 10 \times 4 = 58$· δευτέρα ἐπίλυσις.

Αἱ δυνάμεις 5 ϗ 6 ἀνοίκειοι εὑρίσκονται τῇ ψ· τιθεμένης μέντοι $\psi = 7$, ἡ δύναμις τῆς ω ἔςαι $\frac{15}{3} = 5$, ἡ δὲ $\chi = 8$· ἦσαν ἄρα 8 μὲν ἄνδρες, 7 δὲ γυναῖκες, παιδία δὲ 5. τρίτη ἐπίλυσις.

Αἱ δυνάμεις 8 ϗ 9 ἀποδοκιμαςέαι ὑπὲρ τῆς ψ· ἀλλὰ 10 ἐφαρμόττων τῇ ψ δίδωσιν $6 = \chi$ ϗ $4 = \omega$· τετάρτη δὴ αὕτη λύσις.

Ἐὰν τεθῇ 13 = ψ, ἔςαι 3 = ω, ϗ 4 = χ· πέμπτη ἐπίλυσις.

Ἐὰν τεθῇ 16 = ψ, ἔςαι 2 = ω, ϗ 2 = χ· ἕκτη ϗ ἐχάτη ἐπίλυσις· ἐκ γὰρ 17 ϗ 18 κλασματικαὶ προέρχονται δυνάμεις, ἐκ δὲ 19, πρόεισιν 1 = ω, ϗ 0 = χ

ΣΧΟΛΙΟΝ. Εὐχερῶς κατανοεῖται, ὡς τὸ προτεθὲν πρόβλημα ὁμοφυὲς ὑπάρχει τοῖς τῆς καλȣμένης μεθόδȣ τῆς συγκράσεως (Ἀριθ. 283. ϗ ἑξῆς)· ἡ ἄρα προηγȣμένη μέθοδος γενικῶς ἐφαρμοσθῆναι δυνήσεται τοῖς τοιοῖσδε τὴν φύσιν προβλήμασι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Τρεῖς ἀριθμȣς εὑρεῖν, ὧν τὸ μὲν ἄθροισμα εἴη 174, μεταξὺ δ' ἀλλήλων ἡ αὐτὴ διαφορά.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςωσαν χ, ψ, ω οἱ τρεῖς ἄγνωςοι ἀριθμοὶ, ϗ 174 = α.

Ἡ μὲν ȣ̃ν πρώτη θέσις ἐςὶ χ + ψ + ω = α, ἡ δὲ δευτέρα χ — ψ = ψ — ω.

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως μεταθέσει γενομένης χ = α — ψ — ω, εἰσαχθείσης τῆς κατὰ τὴν χ δυνάμεως ἐν τῇ δευτέρᾳ, ἔςαι α — ψ — ω — ψ = ψ — ω· ἄρα α = 3ψ ϗ ψ = $\frac{\alpha}{3}$ = 58.

Ἀντικαταςήτω ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει ἡ τῆς ψ δύναμις, ϗ δὴ ἔςαι χ + $\frac{\alpha}{3}$ + ω = α· ἄρα χ = α — $\frac{\alpha}{3}$ — ω, ἢ χ = 116 — ω.

Ὠκειώσθω πρὸς τὸ δοκȣ̃ν δύναμις τῇ ω, ἐλάττων μέντοι ἢ ἡ 58 δύναμις τῆς ψ, ὑποτιθεμένοις μείζω μὲν τὴν χ, μέσην δὲ τὴν ψ, ἐλάττω δὲ πασῶν τὴν ω· ταύτης δὲ ἀπὸ 116 ἀφαιρεθείσης, καταλειφθήσεται ἀεὶ ἡ τῆς χ δύναμις· ἐὰν γὰρ ἡ ω = 1 ἔςαι χ = 115· ϗ

δὴ α΄. $115 + 58 + 1 = 174$· β΄. $115 - 58 = 57$, ϗ $58 - 1 = 57$.

Τὸ δὲ πρόβλημα ἐπιλυθήσεται ϗ ἂν ὑποτεθῇ $\omega = \frac{1}{4}$, ϗ ᾖ ἑπομένως $\chi = 115\frac{3}{4}$· ϗ ὡς γὰρ ἔςαι $\div 115\frac{3}{4}$· 58· $\frac{1}{4}$· δῆλον ἄρα, ὅτι τὸ πρόβλημα τόδε τοσαχῶς λυθήσεται, ὅσοι ἀριθμοὶ ὑπάρχουσι μεταξὺ 58 ϗ 0 εἴτε κλασματίαι, εἴτε τῶν ὁλοχερῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Α᾿ριθμοὺς εὑρεῖν δύω χ, υ, ὑφ᾿ ὧν τὸ γινόμενον διαιρεθὲν διὰ τῆς μεταξὺ αὐτῶν διαφορᾶς ω παρέχοι $13\frac{1}{3}$.

ΛΥΣΙΣ. Η῾ θέσις ἐςὶν, ὅτι $\frac{\chi\upsilon}{\omega} = 13\frac{1}{3}$ (Π)· ἐπεὶ δὲ ἡ ἐξίσωσις τρεῖς μὲν περιέχει ἀγνώςους, μίαν δὲ ἐγνωσμένην, ἀποδεδόσθω τὸ κατ᾿ ἀρχὰς μιᾷ τινι τῶνδε τῶν ἀγνώςων τῇ υ, φέρε, δύναμίς τις πρὸς τὸ δοκοῦν, φέρε ἡ 5· ὑποτιθεμένου δὲ $\chi > \upsilon$, ἔςαι $\chi = 5 - \omega = \upsilon - \omega$· ὁκοῦν $\chi\upsilon = 25 + 5\omega$· ἡ δὲ Π ἐξίσωσις ἔςαι $\frac{25 + 5\omega}{\omega} = 13\frac{1}{3}$· ἀφανισμῷ τοῦ κλάσματος, $75 + 15\omega = 40\omega$· ἢ $75 = 25\omega$· ἄρα $\omega = \frac{75}{25} = 3$.

Εἰσαχθεισῶν δὲ ἐπὶ τῆς Π ἐξισώσεως τῶν δυνάμεων 5 ϗ 3 ἀντὶ υ ϗ ω, ἔςαι $\frac{\chi \times 5}{3} = 13\frac{1}{3}$· ἄρα $\chi \times 5 = 40$ (125)· ἄρα $\chi = \frac{40}{5} = 8$.

Οἱ ζητούμενοι ἄρα τρεῖς ἀριθμοὶ εἰσὶν 8, 5, 3· ἔςι γὰρ $\frac{8 \times 5}{3} = 13\frac{1}{3}$.

Ε᾿ὰν δὲ ἀντὶ 5 τεθῇ ἑτέρα τις δύναμις τῆς υ, φέρ᾿ εἰπεῖν, 6, 4, κτ., τῆς πράξεως ὡσαύτως ἐκπερανθείσης

ποϱισθήσονται ϗ ἄλλοι δύω ἀϱιθμοὶ, οἳ σὺν τῷ κατὰ τὸ δοκοῦν ληφθέντι πληϱώσουσι τὴν τοῦ πϱοβλήματος θέσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Πεϱὶ τοῦ λογισμοῦ τῆς ὡς ἀπείϱου θεωϱουμένης ποσότητος.

525. *Ἄπειϱον ποσότητα καλῶ, ἧς μείζονα ἐπινοῆσαι οὐ δυνάμεθα· τοὐναντίον δὲ Ἀπείϱως ἐλαχίστην, ἢ ἀπειϱοστὴν, τὴν ἁπάσης δεδομένης ἐλάττονα.*

526. *α΄. Ἄϱα τὸ ἄπειϱον πεϱιέχει ἅπαν ὡϱισμένον ποσὸν ἀπειϱάκις εἰλημμένον· ἄλλως γὰϱ πολλαπλασιαζομένου τοῦδε τοῦ ποσοῦ ἐπὶ τὸν πεπεϱασμένον ἀϱιθμὸν τὸν ἐμφαίνοντα, ὁσάκις τοῦτὶ ἐμπεϱιέχεται τῷ ἀπείϱῳ, ἀπολήφθήσεται (Αϱιθ. 107.) ἀντὶ τοῦ ἀπείϱου ποσόν τι πεπεϱασμένον, ὅπεϱ ἀντίκειται τῷ τοῦ ἀπείϱου ὁϱισμῷ.*

527. *β΄. Ἐξέσαι ἐπινοῆσαι τάτε ἄπειϱα ϗ τὰ ἀπειϱοστὰ ἐν ἀπείϱοις τάξεσιν· εἰ γὰϱ διαγνωσθῶσιν αἱ τῶν ἀπείϱων τάξεις διὰ τῶν παντοίων δεικτῶν, ὧν ἔχειν δύναται τὸ σημεῖον ∞, δυνάμεθα ἐπινῆσαι $\infty \times \infty = \infty^{2}$· καταφανὲς οὖν, ὅτι ∞, $= \infty^{1}$ ἐμφαίνει ἄπειϱον πϱώτης τάξεως· ∞^{2} δὲ, ἄπειϱον δευτέϱας τάξεως· ὡσαύτως $\infty^{2} \times \infty = \infty^{3}$· $\infty^{3} \times \infty = \infty^{4}$· ἐντεῦθεν ἄϱα ἀναφύεται θαυμασίως ἄπειϱος πϱόοδος παντοίας τάξεως ἀπείϱων $\div$ $\infty^{1} : \infty^{2} : \infty^{3} : \infty^{4} : \infty^{5} \ldots \infty^{\infty}$· ὡσαύτως $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^{2}}$. $\frac{1}{\infty^{2}} \times \frac{1}{\infty^{1}} = \frac{1}{\infty^{3}}$ κτλ. ὅθεν ἡ πϱόοδος συγκειμένη ἐξ*

πειροςῶν ἀπείρων τάξεων $\div \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} : \frac{1}{\infty^3} : \frac{1}{\infty^4} : \frac{1}{\infty^5}$ $\cdots\cdots \frac{1}{\infty^\infty} \cdots$

528. Τὸ πρώτης τάξεως ἄπειρον ἀπειράκις ἐμπεριέχεται τῷ δευτέρας τάξεως· τὸ πρῶτον ἄρα ἐςὶν ἀπειροςὸν μέρος τῦ δευτέρυ, εἴτ᾽ ῦν ἀπείρως μικρὸν πρὸς γῦν τὸ δεύτερον· ταυτὸν δὲ ῥητέον ϗ περὶ δευτεροταγῦς ἀπείρυ παραβαλλομένυ πρὸς τριτοταγές· ἐν γένει δὲ ἅπαν ἄπειρον ἀπείρως τυγχάνει μικρὸν ἀναφερόμενον πρὸς ἄλλο καθυπερτέρας τάξεως· τὐναντίον δὲ τὸ πρώτης τάξεως ἀπειροςὸν ἀπειράκις ἐςὶ περιεκτικὸν ἀπειροςῦ δευτεροταγῦς, ϗ ὕτως ἐφεξῆς.

529. Ἐὰν προςεθῇ τῷ ἀπείρῳ, ἢ ἀπ᾽ αὐτῦ ἀφαιρεθῇ, ἄπειρόντι τάξεως κατωτέρας, τὸ πρῶτον ἄπειρον διαμενεῖ ἀμετάτρεπτον· ϗ γὰρ πᾶν κατωτέρας τάξεως ἄπειρον ὐδέν ἐςιν ἀλλ᾽ ἢ ἀπειροςὸν μέρος τῦ ὑπερτέρας τάξεως ἀπείρυ (528)· ὐκῦν ἐὰν τῷ δευτέρῳ προςεθῇ, ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπ᾽ αὐτῦ, τὸ δεύτερον αὐξηθήσεται, ἢ μειωθήσεται, ἀπείρως μικρῷ ποσῷ· ἐὰν ἄρα τὸ δεύτερον ἐκληφθῇ τὸ αὐτὸ, ὡς ϗ πρὸ τῦ, ἡ ἀπάτη ἀπείρως ῦσα μικρὰ δυνήσεται ὡς μηθὲν ἐκλογισθῆναι.

530. Τῇ αὐτῇ τῦ συλλογίζεσθαι ἐφόδῳ καταφαίνεται α΄. ἅπαν ἄπειρον σὺν ἢ πλὴν ἀριθμῦ τινος, ἢ ὑτινοσῦν ἀπείρως μικρῦ ποσῦ, μενεῖ τὸ αὐτὸ, εἴτ᾽ ῦν ὔτε αὐξηθὲν μεγεθυνθήσεται, ὔτε ἀφαιρεθὲν, σμικρυνθήσεται· β΄. ἅπας ἀριθμὸς πεπερασμένος σὺν ἢ πλὴν ἀπειροςῦ ἄτρεπτος ἔσεται.

531. Ἐὰν ἐπ᾽ ἄπειρον ποσὸν ἄπειρον πολλαπλασιασθῇ, τὸ γινόμενον ἔςαι ἄπειρον τάξεως ἐμφαινομένης ὑπὸ

τȣ̃ ἀθροίσματος τῶν δεικτῶν τȣ̃ πολλαπλασιαςέȣ, ϗ τȣ̃ πολλαπλασιαςȣ̃· $\infty \times \infty = \infty^2$· $\infty^4 \times \infty^5 = \infty^9$ (40).

532. Τὸ ἄπειρον πολλαπλασιαϑὲν ἐπ' ἀριθμὸν πεπερασμένον, δέον τοσȣ́τῳ γίνεϑαι μεῖζον ἢ πρότερον, ὅσαι ἔνεισι μονάδες τῷ πεπερασμένῳ πολλαπλασιαςῇ, (Ἀριθ. 72) τὸ δὲ ἐπὶ τῆς αὐτῆς, ἧς ϗ πρὶν ἦν, μένει τάξεως· μ ȣ̃ν κληθέντος τȣ̃ πεπερασμένȣ ἀριθμȣ̃, ἔςαι $\infty \times \mu = \mu\infty$· ἄρα $\mu\infty$ τῆς αὐτῆς ἐςὶ τάξεως, ἧς ϗ τὸ ∞ (527).

533. Τὸ ἰπ' ἀπείρȣ ϗ ἀπειροςȣ̃ γινόμενον ἐξισȣ̃ται 1· ϗ γὰρ $\infty \times \frac{1}{\infty} = \frac{\infty \times 1}{\infty} = 1$ (57).

534. Τὸ ὑπὸ παντὸς ἀριθμȣ̃ ϗ τȣ̃ $\frac{1}{\infty}$ γινόμενον ἐξισȣ̃ται ἀπειροςῷ μέρει τȣ̃δε τȣ̃ ἀριθμȣ̃· τȣ̃ γὰρ πεπερασμένȣ τȣ̃δε ἀριθμȣ̃ κληθέντος α, ἔςαι $\alpha \times \frac{1}{\infty} = \frac{\alpha \times 1}{\infty}$ (Ἀριθ. 192) $= \frac{\alpha}{\infty}$.

535. Ἐὰν ἄπειρον διαιρεθῇ δἰ ὁμοταγȣ̃ς ἀπείρȣ, μήτε συνεργὸν, μήτε παρονομαςὴν ἔχοντος, τὸ πηλίκον ἔςαι ἴσον μονάδι· εἴγε $\frac{\infty\mu}{\infty\mu} = 1$· ἐὰν δὲ ἄπειρον δἰ ἀπείρȣ ἐλαττοταγȣ̃ς διαιρεθῇ, τὸ πηλίκον ἔςαι ἄπειρον ἔχον δείκτην τὴν ὑπεροχὴν, ᾗ διαφέρει ὁ τȣ̃ διαιρετέȣ δείκτης τȣ̃ κατὰ τὸν διαιρέτην· $\frac{\infty^5}{\infty^3} = \infty^2$· καὶ δὴ καὶ $\frac{\infty^3}{\infty^5} = \infty^{-2}$.

536. Τὸ ἄπειρον διαιρεθὲν δἰ ȣ̓τινοσȣ̃ν πεπερασμένȣ

ἀριθμȣ̃ τȣ̃ π, τὸ πηλίκον φέρε $\frac{\infty^3}{\pi}$ μενεῖ ἀεὶ ἄπειρον ὁμοταγὲς τῷ ἐν ἀρχῇ ληφθέντι (527)· ἐὰν δὲ διαιρεθῇ δὶ ἀπειροςȣ̃, ἀποτελεῖται ἄπειρον, ȣ̃ τὴν τάξιν ἐμφαίνει ὁ τȣ̃ διαιρȣ̃ντος ἀπειροςȣ̃ δείκτης σὺν μονάδι· ∞ ȣ̃ν διαιρεθὲν διὰ $\frac{1}{\infty^2}$ ἴσον ἐςὶ τῷ $\frac{\infty}{1} \times \frac{\infty^2}{1} = \frac{\infty^3}{1} = \infty^3$.

537. Ἐὰν δὲ 1 διαιρεθῇ διὰ $\frac{1}{\infty}$, πηλίκον ἔςχι ∞, ἔςι γὰρ $1 = \frac{1}{1}$· ȣ̓κȣ̃ν 1 διαιρεθὲν διὰ $\frac{1}{\infty}$, $= \frac{1}{1} \times \frac{\infty}{1} = \frac{\infty}{1} = \infty$.

538. Ἐὰν ἄρα πεπερασμένος ἐςισȣ̃ν ἀριθμὸς διαιρεθῇ διὰ $\frac{1}{\infty}$, τὸ πηλίκον ἔςαι τοσάκις ἄπειρον, ὅσων μονάδων περιεκτικὸς ὑπάρχει ὁ διαιρετέος· 4 γὰρ διαιρεθεὶς διὰ $\frac{1}{\infty} = \frac{4}{1} \times \frac{\infty}{1} = \frac{4\infty}{1} = 4\infty$.

539. Ἐὰν o ἐκληφθῇ ὡς ποσὸν ἀπειροςὸν, ἔςαι $\frac{1}{o} = \infty$, ϗ $o = \frac{1}{\infty}$· ἀλλὰ γὰρ τὸ o ȣ̓κ ἐκδεκτέον ὡς καθαρὸν μηδὲν· ἢ ȣ̓κ ἂν εἴη $\frac{1}{o} = \infty$, ὡς ὀρθῶς πάνυ συνεῖδεν ὁ σοφὸς Εὔλερος· ἐφ᾽ ἁπάσης γὰρ διαιρέσεως ἐπάναγκες παρεῖναι ποσότητα, ἣ καλεῖται διαιρετέος, ϗ ἄλλην, ἣ διαιρέτης ἤκȣσεν, ἄμφω δὲ ὁμοφυεῖς· εἰ τοίνυν μὴ εἴη ποσότης τὸ o, ȣ̓δὲ τὸ πηλίκον τὸ διαιρέσει τῆς 1 διὰ o εἴη ἂν ποσόν.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ποσότης ἐςὶν ἡ αὐξήσεως ϗ μειώσεως ἐπιδεκτικὴ (Ἀριθ. 2.)· ȣ̓κ ἄρα εἰπεῖν ἂν ἔχοιμεν τὸ ἄπειρον ποσότητα εἶναι, ἣ προσέλαβεν ἁπάσας τὰς δυνατὰς ἐπαυξήσεις· ȣ̃τω γὰρ τȣ̃ ποσότητα εἶναι ἐκπίπτει· ἄλλως τε οἴδαμεν ὡς πᾶσα ποσότης μεγεθύνεται προσιθεμένης αὐτῇ ϗ τῆς ἐλαχίςης ποσότητος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ Σειρῶν.

540. Στίχος ὅρων αὐξόντων, ἢ μειουμένων, κατὰ μόνιμον νόμον, καλεῖται Σειρά· τοιαίδε εἰσὶν αἵτε Γεωμετρικαὶ πρόοδοι, καὶ αἱ Ἀριθμητικαὶ, καὶ οἱ στίχοι τῶν ἐσχηματισμένων ἀριθμῶν

ἀριθμοὶ ἐσχηματ.	μόνιμοι, ἢ πρωτοταγεῖς	1,	1,	1,	1,	1	κτ.
	φυσικοὶ, ἢ δευτεροταγεῖς	1,	2,	3,	4,	5	κτ.
	τρίγωνοι, ἢ τριτοταγεῖς	1,	3,	6,	10,	15	κτ.
	πυραμικοὶ, ἢ τεταρτοταγεῖς	1,	4,	10,	20,	35	κτ.
	τριγωνοπυραμικοὶ, ἢ πεμπτοταγεῖς .	1,	5,	15,	35,	70	κτ.

νόμος δὲ, καθ᾽ ὃν σχηματίζονται οὗτοι οἱ ἀριθμοὶ, ἐστιν, ἵνα ἕκαστος ὅρος ἰσῶται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῆς ἡγουμένης σειρᾶς· οὕτως ὁ τρίτος ὅρος 6 τῆς τρίτης σειρᾶς ἴσος ἐστὶ τῷ ἀθροίσματι τῶν τριῶν πρώτων ὅρων τῆς δευτέρας· καὶ γὰρ $1 + 2 + 3 = 6$ κτ.

Οἱ πολύγωνοι ἀριθμοὶ συνίστανται ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου ἀπὸ 1 ἀρχομένης· καλοῦνται δὲ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι τρίγωνοι, τετράγωνοι, πεντάγωνοι, κτ. ὡς ἂν τύχοι οὖσα ἡ διαφορὰ τῆς ἀριθμητικῆς προόδου 1, 2, 3 κτ.

Πρόοδοι ἀριθμητικαί.

1,	2,	3,	4,	5	κτ. διαφορὰ	1
1,	3,	5,	7,	9	κτ. διαφορὰ	2
1,	4,	7,	10,	13	κτ. διαφορὰ	3
1,	5,	9,	13,	17	κτ. διαφορὰ	4

Ἀριθμοὶ πολύγωνοι.

1,	3,	6,	10,	15	κτ. τρίγωνοι.
1,	4,	9,	16,	25	κτ. τετράγωνοι.
1,	5,	12,	22,	35	κτ. πεντάγωνοι.
1,	6,	15,	28,	45	κτ. ἑξάγωνοι.

Βραχύτι ἐπιςήσασι τοῖς ἐσχηματισμένοις τῶν ἀριθμῶν δῆλον αὐτίκα, ὡς ἐὰν ὁ χῶρος τȣ̃ πάσης τάξεως ἐσχηματισμένȣ ἀριθμȣ̃ κληθῇ ν, εὑρεθήσεται ὁ τρίγωνος ἀριθμὸς, ὁ ἐν τῷ χώρῳ ν, ἐκ τȣ̃ $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$· ζητηθήτω γὰρ ὁ τρίγωνος ἀριθμὸς τȣ̃ τετάρτȣ χώρȣ ἔςαι ȣ̃ν $\nu=4$, ὁ δὲ ζητȣ́μενος ἀριθμὸς $= \frac{4(4+1)}{2} = \frac{4\times 5}{2} = \frac{20}{2} = 10$· ὁ δὲ πυραμικὸς ἀριθμὸς τοῦ χώρου ν ἔςιν $= \frac{\nu\cdot(\nu+1)^2.(\nu+2)}{2.3}$· ὁ δὲ πεμπτοταγὴς ἀριθμὸς τȣ̃ χώρȣ ν ὑπάρχει $= \frac{\nu\cdot(\nu+1)\cdot(\nu+2)\cdot(\nu+3)}{2\,.\,3\,.\,4}$.

ὁ δὲ ἑκτοταγὴς $\frac{\nu(\nu+1)\cdot(\nu+2)\cdot(\nu+3)\cdot(\nu+4)}{2\cdot 3\,.\,4\,.\,5}$

ϗ ȣ̃τως ἐφεξῆς.

541. Τῶν δὲ πολυγώνων ἀριθμῶν, τȣ͂ ν τὸν χῶρον τȣ͂ ἀριθμȣ͂ ἐμφαίνοντος, τύποι

τȣ͂ μὲν τριγώνȣ $\frac{\nu\nu+\nu}{2} = \frac{\nu\cdot(\nu+)}{2}$

τȣ͂ δὲ τετραγώνȣ $\frac{2\nu^2}{2} = \nu\nu$

τȣ͂ δὲ πενταγώνȣ $\frac{\nu\cdot(3\nu-1)}{2}$

τȣ͂ δὲ ἑξαγώνου $\frac{\nu\cdot(4\nu-2)}{2}$

τȣ͂ δὲ ἑπταγώνου $\frac{\nu\cdot(5\nu-3)}{2}$

τȣ͂ δὲ ὀκταγώνȣ $\frac{\nu(6\nu-4)}{2}$

ἐν γένει δὲ τȣ͂ πολυγώνȣ $= \frac{(\mu-2)\cdot\nu\nu-(\mu-4)\cdot\nu}{2}$

Πλευρὰν μὲν ȣ͂ν καλȣ͂μεν τὸν ἀριθμὸν ν, ἣ τὸν χῶρον τȣ͂ πολυγώνȣ ἀριθμȣ͂· τὸν δὲ ἀριθμὸν τὸν ἔχοντα γωνίας μ, καὶ πλευρὰν ν, ἐμφαίνομεν διὰ τοῦ τύπου $\frac{(\mu-2)\cdot\nu\nu-(\mu-4)\cdot\nu}{2}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Δακτύλιον ὠνήσατό τις βαρύτιμον· ἐρωτηθεὶς δὲ, πόσȣ; ἀριθμὸς, ἀπεκρίνατο, ὁ γωνίας ἔχων 365 τȣ͂ δωδεκάτȣ χώρȣ ὅσα κατέβαλον ἐμφαίνει ἀργύρια.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπεὶ $\mu = 365$, καὶ $\nu = 12$· ἄρα $\frac{(365-2)\cdot 12\cdot 12-(365-4)\cdot 12}{2}$

$$= \frac{(363)\cdot 12\cdot 12 - (361)\cdot 12}{2} = \frac{52272 - 4332}{2} =$$

$$\frac{47940}{2} = 23970.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Ἀριθμȣ̃ δοθέντος ϗ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ τῶν γωνιῶν αὐτȣ̃, εὑρεῖν διὰ τȣ̃ τύπȣ τὴν αὐτȣ̃ πλευρὰν, εἴτ' ȣ̃ν τὸν ἐν ᾧ κεῖται χῶρον.

ΛΥΣΙΣ. Ἔϛω ἀριθμὸς 91, ϗ ἔϛω ὁ αὐτὸς τρίγωνος· δεῖ δὴ εὑρεῖν αὐτȣ̃ τὴν πλευρὰν· ἐπεὶ δὲ ἐν γένει ἡ πλευρὰ κέκληται ν, ἄρα $\nu = \chi$· ϗ $91 = \frac{\chi\chi + \chi}{2}$, ϗ $\chi\chi + \chi = 182$, ϗ $\chi = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{729}{4}} = 13$.

542. Αἱ τῶν βαθμῶν σειραὶ εἰσὶ τὰ τετράγωνα, οἱ κύβοι, κτ. τὰ ἀπὸ τῶν φυσικῇ τάξει αὐξόντων ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5 κτ. Ὅταν ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς διὰ τῶν ὅρων προόδȣ ἀριθμητικῆς διαιρῆται, τὰ συνεχῆ πηλίκα πρόοδον ἁρμονικὴν συγκροτεῖν λέγεται· οἷον $\frac{3}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{3}{10}$ κτ.

543. Τέσσαρες ὅροι ἁρμονικὴν ἀναλογίαν συνιϛᾶν λέγονται, ὅταν ἡ ὑπεροχὴ, ᾗ ὑπερέχει τοῦ πρώτȣ ὁ δεύτερος, πρὸς τὴν, ᾗ ὑπερέχει τȣ̃ τρίτȣ ὁ τέταρτος, λόγον ἔχῃ, ὃν ὁ πρῶτος πρὸς τὸν τέταρτον· ȣ̃τως 6, 8, 12, 18 ἐν ἁρμονικῇ ἀναλογίᾳ εἶναι λέγονται· ϗ γὰρ 2 (ἡ τȣ̃ 8 ὑπὲρ τὸν 6 ὑπεροχὴ) πρὸς 6 (τὴν τȣ̃ 18 ὑπὲρ τὸν 12 ὑπεροχὴν) ὡ ὁ 6 (πρῶτος ὅρος) πρὸς τὸν 18 (τέταρτον) εἴτ' ȣ̃ν 2 : 6 :: 6 : 18.

544. Ἐὰν δὲ τριῶν ὅρων ὁ μέσος δευτέρȣ τε ϗ τρίτȣ χῶρον ἐπέχειν δύνηται, τὸ τοιȣ̃τον καλεῖται πρόοδος ἁρμονική· οἷον ∺ 10 : 16 : 40· ἔϛι γὰρ 6 : 24 :: 10 : 40.

Κατὰ τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον τὰ κλάσματα $\frac{3}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$ ἁρμονικὴν πρόοδον συνιςᾶν λέγεται· ἐπὶ γὰρ τὸν αὐτὸν ἀναχθέντα παρονομαςὴν γίνεται $\frac{20}{20}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{12}{20}$· ϗ ἡ μὲν μεταξὺ τῶν δύω πρώτων διαφορὰ ἔςιν $= \frac{5}{20}$, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν δευτέρων $= \frac{3}{20}$· ἔςι δὲ $\frac{5}{20} : \frac{3}{20} :: \frac{20}{20} : \frac{12}{20}$, εἴτ' ȣ̂ν $5 : 3 :: 20 : 12$· ϗ γὰρ $5 \times 12 = 3 \times 20$· ἄρα τὰ κλάσματα ἐν ἁρμονικῇ εἰσὶν ἀναλογίᾳ.

545. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Δοθέντων τριῶν ἀριθμῶν τέταρτον ἁρμονικῶς ἀνάλογον εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ α, β, γ· ὁ δὲ ζητȣ́μενος $= \upsilon$· ȣ̓κȣ̂ν (543) ἔςαι $\beta - \alpha : \upsilon - \gamma :: \alpha : \upsilon$· ὅθεν ἡ ἐξίσωσις $\alpha\upsilon - \alpha\gamma = \beta\upsilon - \alpha\upsilon$, ϗ $\alpha\upsilon = \beta\upsilon - \alpha\upsilon + \alpha\gamma$, ϗ $2\alpha\upsilon - \beta\upsilon = \alpha\gamma$, ϗ $\upsilon = \dfrac{\alpha\gamma}{2\alpha - \beta}$ τȣτέςιν „ὁ τέταρτος ἁρμονικῶς ἀνάλογος ἴσος ἐςὶ τῷ „πηλίκῳ τῷ προκύπτοντι ἐκ τῆς τȣ̂ ὑπὸ τȣ̂ πρώτȣ ϗ „τρίτȣ τῶν ὅρων γινομένȣ διὰ τῆς διαφορᾶς τῆς μεταξὺ „τȣ̂ πρώτȣ δὶς ληφθέντος ϗ τȣ̂ δευτέρȣ διαιρέσεως.“

Ἔςωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ 10, 15, 40· εἰς εὕρεσιν ȣ̂ν τȣ̂ τετάρτȣ πολλαπλασιαθήτω ὁ 10 ἐπὶ 40· ὁ δὲ γινόμενος 400 διηρήσθω διὰ τῆς διαφορᾶς τῆς μεταξὺ τȣ̂ διπλȣ̂ πρώτȣ, εἴτ' ȣ̂ν 20, ϗ τȣ̂ δευτέρȣ 15, ταυτὸν εἰπεῖν διὰ 5· ȣ̓κȣ̂ν $\frac{400}{5} = 80$.

546. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Δύω ἀριθμῶν δοθέντων, τρίτον ἐν ἁρμονικῇ προόδῳ προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ὁ ἀνωτέρω τύπος ἐπιλύει τὸ πρόβλημα, εἰ μόνον (ἐπεὶ ὁ αὐτός ἐςι δεύτερος ϗ τρίτος (544)) ἐν τῷ παρονομαςῇ τεθείη γ ἀντὶ β· ἔςωσαν γὰρ οἱ δοθέντες 10, 15· ȣ̓κȣ̂ν ἔςαι ὁ τρίτος $\upsilon = \dfrac{\alpha\beta}{2\alpha - \beta} =$

$\frac{150}{20 - 15} = \frac{150}{5} = 30$· λέγω δὴ τὲς τρεῖς ἀριθμὲς 10, 15, 30 εἶναι ἐν ἁρμονικῇ προόδῳ· ἔςι ϗ γὰρ $15 - 10 = 5 : 30 - 15 = 15 :: 10 : 30$, εἴτ᾽ ἒν $5 : 15 :: 10 : 30$ ἄρα ⁙ 10, 15, 30 (543, 544).

547. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Δύω ἀριθμῶν δοθέντων, μέσον ἁρμονικῶς ἀνάλογον προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςωσαν οἱ δοθέντες α, γ· ὁ δὲ ζητέμενος υ· τοιγαρῶν ἔςαι (544) $υ - α : γ - υ :: α : γ$, ϗ δὴ $γυ - αγ = αγ - αυ$, ϗ $2αγ = γυ + αυ$, ϗ $υ = \frac{2αγ}{γ + α}$, τὲτέςι „μεταξὺ δύω δοθέντων ἀριθμῶν 10, „ϗ 40 μέσος ἁρμονικῶς ἀνάλογος εὑρίσκεται, ἐὰν ὁ δὶς „γινόμενος ὑπὸ τῶ πρώτε 10 ϗ τῶ τρίτε 40, εἴτ᾽ ἒν ὁ „800, διαιρεθῇ διὰ τῶ ἀθροίσματος τῶν δοθέντων, εἴτ᾽ „ἒν διὰ 50· τὸ δὲ πηλίκον 16 δώσει τὸν ζητέμενον" ἐπεὶ γὰρ $16 - 10 = 6 : 40 - 16 = 24 :: 10 : 40$· ἄρα ⁙ 10, 16, 40 (549, 544).

548. Ποσότητες αἱ ἐφ᾽ ἑτέρας δίχα λειψάνε μὴ ἀναγόμεναι μεταβάλλεσιν εἰς σειρὰς ἀπείρες· τοιαίδε εἰσὶ τῶν σεσημειωμένων διαιρέσεων, ἰῶν ὁ διαιρετέος ὲκ ἔςι πολλαπλῶς τῶ διαιρέτε, ϗ αἱ ῥίζαι τῶν ἀτελῶν βαθμῶν· κείσθω γὰρ εὑρεῖν τὸ πηλίκον τὸ προϊὸν ἐκ τῆς σεσημειωμένης διαιρέσεως $\frac{1}{1 + υυ}$· ἐὰν ἒν ἡ διαίρεσις κατὰ τὲς ἐκτεθέντας κανόνας (51, 60) φιλοτεχνηθῇ, εὑρεθήσεται $1 - υ^2 + υ^4 - υ^6 + υ^8$ κτ. ἐὰν γὰρ διαιρεθῇ 1 διὰ 1, ϗ τὸ πηλίκον 1 τεθῇ ὡς πρῶτος ὅρος τῶ πηλίκε, ϗ τὸ γινόμενον $1 \times \overline{1 + υυ} = 1 + υυ$ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ

τᴕ̃ διαιρετέᴕ, ἔςαι $1 - 1 - \upsilon\upsilon = -\upsilon\upsilon$· ἐὰν δὲ αὖθις τὸ κατάλοιπον $-\upsilon\upsilon$ διὰ 1 διαιρεθῇ, δεύτερος ὅρος τᴕ̃ πηλίκᴕ προκύψει $-\upsilon\upsilon$, ὃς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν διαιρετέον δίδωσι $-\upsilon\upsilon \times \overline{1 + \upsilon\upsilon} = -\upsilon\upsilon - \upsilon^4$, ᴕ̃τινος ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τᴕ̃ διαιρετέᴕ, καταλειφθήσεται $= -\upsilon\upsilon + \upsilon\upsilon + \upsilon^4 = \upsilon^4$· τᴕτᴕ̈ δὲ τᴕ̃ καταλοίπᴕ διαιρεθέντος αὖθις διὰ 1, προκύπτει τρίτος ὅρος τᴕ̃ πηλίκᴕ $+ \upsilon^4$, ϗ ᴕ̃τως ἐφεξῆς, καθὰ δὴ τὸ ϛχῆμα τῶν πράξεων καθ' ἑαυτὸ δείκνυσι.

διαιρέτης	διαιρετέος	πηλίκον
$1 + \upsilon\upsilon$	1	$1 - \upsilon\upsilon + \upsilon^4 - \upsilon^6 = \upsilon^8$ κτ.

$$
\begin{array}{l}
-1 - \upsilon\upsilon \\
\hline
-\upsilon\upsilon \\
+\upsilon\upsilon + \upsilon^4 \\
\hline
+\upsilon^4 \\
-\upsilon^4 - \upsilon^6 \\
\hline
-\upsilon^6 \\
+\upsilon^6 + \upsilon^8 \\
\hline
+\upsilon^8 \\
-\upsilon^8 - \upsilon^{10} \\
\hline
-\upsilon^{10} \text{ κτ.}
\end{array}
$$

549. Διὰ τῆς αὐτῆς Μεθόδᴕ ἐξευρίσκεται $\frac{\alpha}{\beta + \upsilon}$ $= \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha\upsilon}{\beta^2} + \frac{\alpha\upsilon^2}{\beta^3} - \frac{\alpha\upsilon^3}{\beta^4} + \frac{\alpha\upsilon^4}{\beta^5}$ κτ., ὃ δῆλον γίνεται ἐπιςήσασι τῷ τῶν πράξεων ϛχήματι.

διαιρέτης	διαιρετέος	πηλίκον
$\beta + \upsilon$	α	$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha\upsilon}{\beta^2} + \frac{\alpha\upsilon^2}{\beta^3} - \frac{\alpha\upsilon^3}{\beta^4} + \frac{\alpha\upsilon^4}{\beta^5}$ κτ

$$-\alpha - \frac{\alpha\upsilon}{\beta}$$

$$- \frac{\alpha\upsilon}{\beta}$$

$$+ \frac{\alpha\upsilon}{\beta} + \frac{\alpha\upsilon^2}{\beta^2}$$

$$+ \frac{\alpha\upsilon^2}{\beta^2}$$

$$- \frac{\alpha\upsilon^2}{\beta^2} - \frac{\alpha\upsilon^3}{\beta^3}$$

$$- \frac{\alpha\upsilon^3}{\beta^3}$$

$$+ \frac{\alpha\upsilon^3}{\beta^3} + \frac{\alpha\upsilon^4}{\beta^4}$$

$$+ \frac{\alpha\upsilon^4}{\beta^4}$$

$$- \frac{\alpha\upsilon^4}{\beta^4} - \frac{\alpha\upsilon^5}{\beta^5}$$

$$- \frac{\alpha\upsilon^5}{\beta^5}$$

550. Ὡσαύτως τὸ κλάσμα $\frac{\alpha\alpha}{\upsilon + \beta}$ ἐπὶ τὴν σειρὰν ἀνάγεται $\frac{\alpha\alpha}{\upsilon} - \frac{\alpha\alpha\beta}{\upsilon^2} + \frac{\alpha\alpha\beta\beta}{\upsilon^3}$ κτ., ἣ δῆλον ἐκ τοῦ σχήματος.

διαιρέτης	διαιρετέος	πηλίκον
$\upsilon + \beta$	$\alpha\alpha$	$\frac{\alpha\alpha}{\upsilon} - \frac{\alpha\alpha\beta}{\upsilon^2} + \frac{\alpha\alpha\beta\beta}{\upsilon^3}$ κτ.
	$-\alpha\alpha - \frac{\alpha\alpha\beta}{\upsilon}$	

$$
\begin{array}{l}
\qquad - \frac{\alpha\alpha\beta}{\upsilon} \\
\qquad + \frac{\alpha\alpha\beta}{\upsilon} + \frac{\alpha\alpha\beta\beta}{\upsilon^2} \\
\hline
\qquad\qquad + \frac{\alpha\alpha\beta\beta}{\upsilon^2} \\
\qquad\qquad - \frac{\alpha\alpha\beta\beta}{\upsilon^2} + \frac{\alpha\alpha\beta^3}{\upsilon^3} \\
\hline
\qquad\qquad\qquad + \frac{\alpha\alpha\beta^3}{\upsilon^3}
\end{array}
$$

κτ. ἐπ' ἄπειρον.

551. Ἀλλὰ καὶ $\sqrt{\alpha\alpha - \upsilon\upsilon}$ ἐπ' ἄπειρον σειρὰν ἀναλύεται τὴν $\alpha - \frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha} - \frac{\upsilon^4}{8\alpha^3} - \frac{\upsilon^6}{16\alpha^5} - \frac{5\upsilon^8}{128\alpha^7} - \frac{7\upsilon^{10}}{256\alpha^9} - \frac{12\upsilon^{12}}{1024\alpha^{11}}$ κτ. ἐπεὶ γὰρ ἡ τετράγωνος ῥίζα τοῦ πρώτου ὅρου αα ἐστὶν α, ἐὰν ἀφαιρεθῇ αα ἀπὸ τῆς ποσότητος αα — υυ, καταλείπεται — υυ, ὅπερ διὰ 2α διαιρεθέντος πρόεισι δεύτερος ὅρος τῆς ῥίζης ὁ $\frac{-\upsilon\upsilon}{2\alpha}$, ἀφ' οὗ τὸ τετράγωνον $\frac{\upsilon^4}{4\alpha^2}$ σὺν τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ $\frac{-\upsilon\upsilon}{2\alpha}$ καὶ 2α, εἴτ' οὖν σὺν τῷ — υυ, ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ πρώ-

τȣ καταλοίπȣ —υυ καταλείπει $\frac{υ^4}{4α^2}$, ὅπερ διὰ διπλῆς τῆς ἄρτι εὑρημένης ῥίζης διαιρεθὲν, εἴτ' ȣ̃ν διὰ $2α - \frac{υυ}{α}$, ἀποδίδωσι τὸν τῆς ῥίζης τρίτον ὅρον $- \frac{υ^4}{8α^3}$, ὑφ' ȣ̃ ϗ τȣ̃ $2α - \frac{υυ}{α}$ τὸ γινόμενον $\left(\frac{υ^4}{4α^2} = \frac{υ^6}{8α^4}\right)$ σὺν τῷ τετραγώνῳ $\frac{υ^8}{64α^6}$ ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τȣ̃ δευτέρȣ καταλοίπȣ $- \frac{υ^4}{4α^2}$, καταλείπει $- \frac{υ^6}{8α^4} - \frac{υ^8}{64α^6}$· τῆς δὲ πράξεως ὡσαύτως ἐπανειλημμένης, τῶν ἐκτεθέντων κανόνων περὶ ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκριβῶς τηρȣμένων (126), προΐασι ϗ οἱ λοιποὶ ὅροι, ὡς ἰδεῖν ἔξεστιν ἐν τῷ παρατιθεμένῳ σχήματι, ὅ ῥᾷστα πᾶς, ὃς ἂν τȣ̀ς εἰρημένȣς κανόνας διὰ μνήμης ἔχοι, συνίησι.

Τετράγωνον	ῥίζα
$αα - υυ$	$α - \frac{υυ}{2α} - \frac{υ^4}{8α^3} - \frac{υ^6}{16α^5} - \frac{5υ^8}{128α^7} - \frac{7υ^{10}}{256α^9} - \frac{21υ^{12}}{1024α^{10}}$
$-αα$	

$$-υυ$$

$$+υυ - \frac{υ^4}{4αα}$$

$$-\frac{υ^4}{4αα}$$

$$+\frac{υ^4}{4αα} - \frac{υ^6}{8α^4} - \frac{υ^8}{64α^6}$$

$$-\frac{\upsilon^6}{8\alpha^4}-\frac{\upsilon^8}{64\alpha^6}$$

$$+\frac{\upsilon^6}{8\alpha^4}-\frac{\upsilon^8}{16\alpha^6}-\frac{\upsilon^{10}}{64\alpha^8}-\frac{\upsilon^{12}}{256\alpha^{10}}$$

$$-\frac{5\upsilon^8}{64\alpha^6}-\frac{\upsilon^{10}}{64\alpha^8}-\frac{\upsilon^{12}}{256\alpha^{16}}$$

$$+\frac{5\upsilon^8}{64\alpha^6}-\frac{5\upsilon^{10}}{128\alpha^8}-\frac{5\upsilon^{12}}{512\alpha^{10}}-\frac{5\upsilon^{14}}{1024\alpha^{12}}-\frac{25\upsilon^{16}}{16384\alpha^{14}}$$

$$-\frac{7\upsilon^{10}}{128\alpha^8}-\frac{7\upsilon^{12}}{512\alpha^{10}}-\frac{5\upsilon^{14}}{1024\alpha^{12}}-\frac{25\upsilon^{16}}{16384\alpha^{14}}$$

$$+\frac{7\upsilon^{10}}{128\alpha^8}-\frac{7\upsilon^{12}}{256\alpha^{10}}-\frac{7\upsilon^{14}}{1024\alpha^{12}}-\frac{7\upsilon^{16}}{2048\alpha^{14}}-\frac{35\upsilon^{18}}{16384\alpha^{16}}-\frac{49\upsilon^{20}}{65536\alpha^{18}}$$

$$-\frac{21\upsilon^{12}}{512\alpha^{10}}-\frac{12\upsilon^{14}}{1024\alpha^{12}}-\frac{81\upsilon^{16}}{16384\alpha^{14}}-\frac{35\upsilon^{18}}{16384\alpha^{16}}-\frac{49\upsilon^{20}}{65536\alpha^{18}}$$

552. Διὰ τῶν αὐτῶν δὲ πράξεων, εἴτις ὀρθῶς ϗ ἐσκεμμένως ταύτας ἐπιτηδεύοι, ἀεὶ ἐν μνήμῃ φέρων τὰ εἰρημένα (128), ἀμέλειτοι τὸν διπλασιασμὸν τῆς πρὸ μικρȣ̃ εὑρημένης ῥίζης, ϗ τὴν διὰ τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ αὐτῆς διπλασιασθείσης διαίρεσιν τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ τȣ̃ καταλειπομένȣ, ϗ τὸν τȣ̃ πηλίκȣ (ὃ δὴ ὅρος ῥιζικὸς τίθεται) ἐπὶ τὸ διπλȣ̃ν τῆς προευρημένης ῥίζης πολλαπλασιασμὸν, ϗ τὴν τῷ ἐκ τȣ̃ πολλαπλασιασμȣ̃ γινομένῳ πρόσθεσιν τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ εὑρεθέντος τȣ́τȣ ῥιζικȣ̃ ὅρȣ τετραγώνȣ, ϗ τȣ̃ ὅλȣ ἀθροίσματος ἀπὸ τȣ̃ καταλοίπȣ ἀφαίρεσιν· ταῦτα φημὶ εἴτις ὀρθῶς μετίοι, εὑρήσει ὡσαύτως ὅτι $\sqrt{\alpha\alpha+\upsilon\upsilon}=\alpha+\frac{\upsilon\upsilon}{\alpha\alpha}-\frac{\upsilon^4}{8\alpha^3}+\frac{\upsilon^6}{16\alpha^5}-\frac{5\upsilon^8}{128\alpha^7}$ κτ, ναὶ μὴν ϗ $\sqrt{\alpha\alpha+\beta\upsilon-\upsilon\upsilon}=\alpha+\frac{\beta\upsilon}{2\alpha}-\frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha}+\frac{\beta\beta\upsilon\upsilon}{8\alpha^3}$ κτ.

553. Ἐκ δὲ δὴ τέτων τῶν ὑποδειγμάτων δῆλον, ὡς ἐπὰν εὑρεθῶσιν ἐν ἀρχῇ ἱκανοίτινες ὅροι σειρᾶς ἡςτινοσῦν διὰ τῶν ἐπιπόνων πράξεων, τῦ τῆς προόδε κανόνος, καθ' ὃν χωρεῖ ἡ σειρὰ, γνωσθέντος, ἀπόνως τῦ λοιπῦ τὴν σειρὰν συνεχίσαι δυνάμεθα· δεῖ μέντοι πρῶτον εὑρεῖν ὁ δύω ἢ τρεῖς ὅρυς, τέσσαρας δὲ ἢ πέντε, ἵνα δήλη γένηται ἡ τῦ κανόνος μονίμη πρόβασις· ὅτως ἡ τῆς ποσότητος $\sqrt{αα - υυ}$ σειρὰ μικρὰ σκεψαμένοις ἴση ἐςὶ τῇ ποσότητι α σὺν προόδῳ Γεωμετρικῇ, πρῶτον μὲν ὅρον $\frac{υυ}{α}$, κοινὸν δὲ πηλίκον $\frac{υυ}{αα}$ ἐχέσῃ, ἧς ἕκαςος ὅρος πεπολλαπλασίαςαι ἐφ' ἕκαςον ἀντίςοιχον ὅρον τῆς σειρᾶς $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, -\frac{5}{128}, -\frac{7}{256}$ κτ. τῶν δὲ ὅρων ταύτης τῆς σειρᾶς κανὼν, καθ' ὃν πρόεισιν, ὅτος, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1.1}{2.4}, -\frac{1.1.3}{2.4.6}, -\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}, -\frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}$ κτ, εἶτ' ὗν οἱ μὲν ἀριθμηταί εἰσι σειρὰ φυσικὴ αὔξυσα τῶν περιττῶν ἀριθμῶν· οἱ δὲ παρονομαςὰι, σειρὰ φυσικὴ τῶν ἀρτίων αὔξυσα, ἐπ' ἀλλήλυς πολλαπλασιαζομένων, ὡς ἐν ἑκάςῳ ὁρᾶται κλάσματι, ϗ εἰς ἁπλυςέραν ἔκθεσιν ἀναγομένυ ἑκάςυ κλάσματος.

Περὶ συνάψεως σειρῶν.

554. Σειρὰν συνάπτειν, ζητεῖν ἐςι τὸ ἄθροισμα, ἢ τὴν δύναμιν, τῦ πάντων τῶν ὅρων συμπληρώματος.

555. Σειρὰ μὲν πεπερασμένη καλεῖται, ἧς ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ὡρισμένος ὑπάρχει· ἄπειρος δὲ, ἧς τὺς ὅρυς προσδιορίσαι ἀμήχανον.

556. Σειρὰ μὲν ἀποκλίνȣσα ἐςιν, ἧς οἱ ὅροι κατὰ τὸ συνεχὲς αὔξȣσιν· ἧς μέντοι ἀεὶ μειȣ͂νται, ἐκείνη καλεῖται συγκλίνȣσα.

557. Δῆλον ȣ͂ν, ὡς εἴπερ σειρὰ ἄπειρος ἀείποτε ἀποκλίνῃ, τὸ ταύτης ἄθροισμα ὅροις πεπερασμένοις περιληφθῆναι μὴ ἔχειν, συγκλινȣ́σης δὲ, τὸ ἄθροισμα αὐτῆς πεπερασμένον ἐςὶν, ὡς ἐν τοῖς ἐφεξῆς εἰσόμεθα.

558. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ τȣ͂ συνάπτειν τὰς σειρὰς μέθοδος πολυσχιδής τις ἐςὶ, ϗ μέρος τῆς ἀναλυτικῆς τὸ κάλλιςον· ἡμῖν ἀλλ' ȣ͂ν ἀρκέσει, εἰ ἀποδοίημεν τὴν τȣ͂ τὰς μᾶλλον ἐν χρήσει σειρὰς συνάπτειν μέθοδον· ȣ̓ γὰρ περὶ τῆς καθαρᾶς Μαθηματικῆς μόνης ἡμῖν διαλαβεῖν πρόκειται.

559. Εὑρεθέντος ἅπαξ τȣ͂ τύπȣ, καθ' ὃν συνάπτονται πάντες οἱ ὅροι Γεωμετρικῆς προόδȣ φθινȣ́σης ἐπ' ἄπειρον, συναφθήσονται πᾶσαι αἱ σειραὶ, αἱ ἐφ ἑτέρας, ὧν ἂν οἱ ὅροι Γεωμετρικὴν σειρὰν φθίνȣσαν παρισῶσιν, ἀναλυόμεναι.

Ἔςω γὰρ $\div\!\!\cdot\; \frac{\delta}{\beta} : \frac{\delta}{\beta\pi}, \frac{\delta}{\beta\pi^2}, \frac{\delta}{\beta\pi^3}, \frac{\delta}{\beta\pi^4}, \frac{\delta}{\beta\pi^5} \dots\dots \frac{\delta}{\beta\pi^\infty}$, πρόοδος ἐπ' ἄπειρον φθίνȣσα, ἐὰν ᾖ $\pi > 1$· ἀναςραφεῖσα δὲ γενήσεται αὔξȣσα $\div\!\!\cdot\; \frac{\delta}{\beta\pi^\infty} \dots \frac{\delta}{\beta\pi^5}, \frac{\delta}{\beta\pi^4}, \frac{\delta}{\beta\pi^3}, \frac{\delta}{\beta\pi^2}, \frac{\delta}{\beta\pi} : \frac{\delta}{\beta}$· ἔςι δὲ τȣ͂ Γεωμετρικὴν πρόοδον αὔξȣσαν συνάπτειν εἰς ἓν τύπος ὁ $\varkappa = \frac{\omega\pi - \alpha}{\pi - 1}$ (280), ἐν ᾧ ἐφαρμοζομένης τῆς προκειμένης σειρᾶς ἔςιν $\omega =$

$\frac{\delta}{\beta}$, ϗ $\alpha = \frac{\delta}{\beta\pi^{\infty}}$· ἄρα $\kappa = \frac{\frac{\delta\pi}{\beta} - \frac{\delta}{\beta\pi^{\infty}}}{\pi - 1}$, τȣ̃ δὲ ἀπειροςȣ̃

ἀλογȣμένȣ, εἴτ' ȣ̃ν τȣ̃ $\frac{\delta}{\beta\pi^{\infty}}$, ϗ τῆς ἀναγωγῆς γινομέ-

νης, εὑρίσκεται $\kappa = \frac{\delta\pi}{\beta\pi - \beta}$, τύπος γενικὸς τοῦ πᾶ-
σαν ἐπ' ἄπειρον φθίνȣσαν συνάπτειν σειρὰν κλασμά-
των, ὧν ἀριθμηταὶ μὲν τὸ αὐτὸ εἶεν ποσὸν, οἱ δὲ παρο-
νομαςαὶ πρόοδον συνιςαῖεν Γεωμετρικὴν, τȣτέςιν ἐπὶ τȣ-
των „ἐὰν τὸ γινόμενον ὑπὸ τȣ̃ ποσȣ̃ τȣ̃ δίκην ἀριθμητȣ̃
„λαμβανομένȣ, ϗ τȣ̃ πηλίκȣ τῆς τῶν παρονομαςῶν προ-
„όδȣ, διαιρεθῇ διὰ τȣ̃ δευτέρȣ τῆς Γεωμετρικῆς προόδȣ
„ὅρȣ ἐλαττωθέντος τῷ πρώτῳ ὅρῳ, τὸ ἐντεῦθεν προϊὸν
„πηλίκον ἐμφανεῖ τῆς σειρᾶς τὸ κεφάλαιον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἵνα δὲ τȣ̃ τύπȣ τὴν ἀλήθειαν με-
ρικώτερον ἴδωμεν ἔςω εὑρεῖν τὴν δύναμιν τȣ̃ $\frac{1}{3}$ κλάσμα-
τος· ἔςαι ȣ̃ν $\frac{1}{3} = 0,3333$ κτ. (Ἀριθ. 237)· ἵνα τὸν
μεταχηματισμὸν τȣ̃τον ἀκριβέςατον ποιήσωμεν, ἐπάναγ-
κες προαγαγεῖν τὴν προσέγγισιν ἐς ἄπειρον· ἐπεὶ δὲ
$0,3333$ κτ. $= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000}$ κτ. (Ἀ-
ριθ. 224)· ἔςαι πάντως $\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000}$
$+ \ldots\ldots \frac{3}{10^{\infty}}$· ἀνεςράφθω γὰρ ἡ σειρὰ ἵνα γένηται

αὔξȣσα, ϗ δὴ ἔςαι $\frac{3}{10^{\infty}} \ldots\ldots \frac{3}{10000}, \frac{3}{1000}, \frac{3}{100}, \frac{3}{10}$.

ταύτης δὲ τὸ κεφάλαιον ἔςι $\kappa = \frac{\delta\pi}{\beta\pi - \beta} = \frac{3 \cdot 10}{100 - 10}$
$= \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$.

560. Κείσθω δὴ συνάψαι σειρὰν κλασμάτων, ὧν

οἱ μὲν ἀριθμηταὶ συνιστῶσι πρόοδον Ἀριθμητικὴν, οἱ δὲ παρονομασταὶ Γεωμετρικὴν, τοῦτ' ἔστιν $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha+\delta}{\beta\pi}, \frac{\alpha+2\delta}{\beta\pi^2}, \frac{\alpha+3\delta}{\beta\pi^3}$ κτ., ἥτις ἀναλυθήτω εἰς ταύτην $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta\pi} + \frac{\delta}{\beta\pi}, \frac{\alpha}{\beta\pi^2} + \frac{\delta}{\beta\pi^2} + \frac{\delta}{\beta\pi^2}, \frac{\alpha}{\beta\pi^3} + \frac{\delta}{\beta\delta^3} + \frac{\delta}{\beta\pi^3} + \frac{\delta}{\beta\pi^3}$ κτ., ἀφ' ἧς ἀπαντλοῦνται αἱ ἐφεξῆς σειραὶ, πρόοδοι αἱ πᾶσαι οὖσαι Γεωμετρικαὶ

$$\div\!\!\div \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta\pi}, \frac{\alpha}{\beta\pi^2}, \frac{\alpha}{\beta\pi^3} \text{ κτ, ἧς τὸ κεφ.} = \frac{\alpha\pi}{\beta\pi - \beta} \quad (559)$$

$$\div\!\!\div \frac{\delta}{\beta\pi}, \frac{\delta}{\beta\pi^2}, \frac{\delta}{\beta\pi^3}, \text{ κτ, ἧς τὸ κεφ.} = \frac{\delta}{\beta\pi - \beta}$$

$$\div\!\!\div \ldots \frac{\delta}{\beta\pi^2}, \frac{\delta}{\beta\pi^3}, \text{ κτ, ἧς τὸ κεφ.} = \frac{\delta}{\beta\pi^2 - \beta\pi}$$

$$\div\!\!\div \ldots\ldots, \frac{\delta}{\beta\pi^3} \text{ κτ, ἧς τὸ κεφ.} = \frac{\delta}{\beta\pi^3 - \beta\pi^2}$$

ἐπεὶ δὲ τὰ εὑρεθέντα κεφάλαια (πλὴν τοῦ πρώτου) συνιστῶσι τὴν Γεωμετρικὴν πρόοδον $\div\!\!\div \frac{\delta}{\beta\pi - \beta}, \frac{\delta}{\beta\pi^2 - \beta\pi}, \frac{\delta}{\beta\pi^3 - \beta\pi^2}$ κτ, ἧς τὸ κεφάλαιον ἔστιν $= \frac{\delta\pi}{\beta\pi^2 - 2\beta\pi + \beta}$, προστεθέντος αὐτῷ τοῦ τῆς πρώτης σειρᾶς κεφαλαίου $\frac{\alpha\pi}{\beta\pi - \beta}$ ἀπολαμβάνεται $\frac{\delta\pi}{\beta\pi^2 - 2\beta\pi + \beta} + \frac{\alpha\pi}{\beta\pi - \beta} = \frac{\alpha\varpi\varpi - \alpha\varpi + \delta\varpi}{\beta\varpi\varpi - 2\beta\varpi + \beta}$ κεφάλαιον ἁπασῶν τῶν σειρῶν, ὃ τὸ

αὐτὸ γενικὸς ἔςαι τύπος τȣ̃ συνάπτειν ἁπάσας τὰς σειρὰς τῶν κλασμάτων, ὧν οἱ μὲν ἀριθμηταὶ ἀριθμητικὴν, οἱ δὲ παρονομαςαὶ γεωμετρικὴν, συνιςᾶσι πρόοδȣς.

561. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν δὲ ἡ ἄπειρος σειρὰ μὴ ἔχῃ ἀνάγεσθαι ἐπὶ κεφάλαιον πεπερασμένον, πειρατέον παντὶ τρόπῳ συγκλίνȣσαν αὐτὴν ἀπεργάσασθαι· τηνικαῦτα γὰρ ἐνίȣς τῶν προτέρων ὅρων συνάπτοντες τȣ̀ς ἄλλȣς παρορᾶν δυνάμεθα ἄτερ ἐπαισθητȣ̃ διαπτώματος· ἐπὶ γὰρ φέρε $\sqrt{\alpha\alpha + \upsilon\upsilon} = \alpha + \frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha} - \frac{\upsilon^4}{8\alpha^3} + \frac{\upsilon^6}{16\alpha^5}$ κτ. ὅσῳπερ ἡ ποσότης υ ἐλάττων ᾖ τῆς α, τοσȣ́τῳ τάχιον ἡ σειρὰ συγκλίνει· βραχύνονται γὰρ ἀεὶ οἱ ἀριθμηταὶ ὥςγε πρὸς τȣ̀ς αὐτῶν παρονομαςάς.

Τεθείσθω γὰρ $\alpha = 10$, ϗ $\upsilon = 1$· ἔςαι δὴ $\sqrt{\alpha\alpha+\upsilon\upsilon} = \sqrt{101} = 10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{1600000}$· σαφὲς ȣ̃ν τὸν τέταρτον ὅρον ὑπάρχειν βραχύτατον, ἐξικανȣ̃ν δὲ τȣ̀ς πρώτȣς τρεῖς ὅρȣς μόνον πρὸς παράςασιν τῆς τῇ ἀληθεῖ προσεγγιζȣ́σης ῥίζης $10 + \frac{399}{8000}$.

562. Ἐὰν ληφθῶσιν οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5 κτ. οἱ μὲν ἀπ' αὐτῶν τετράγωνοι ἔσονται 1, 4, 9, 16, 25 κτ. οἱ δὲ κύβοι 1, 8, 27, 64, 125 κτ. οἱ δὲ τέταρτοι βαθμοὶ 1, 16, 81, 256, 625 κτ., ϗ ἑξῆς ὡσαύτως· αὗται ȣ̃ν καλȣ̃νται σειραὶ ἄπειροι τῶν βαθμῶν τῶν ἀπὸ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν· ἵνα δὲ τὰς τοιάσδε σειρὰς συνάπτειν μάθωμεν, χρησόμεθα συλλογισμȣ̃ ἐφόδῳ τοιᾶδε.

Ἐπείπερ αἱ ῥίζαι τȣ́των τῶν βαθμῶν, φυσικοὶ ἀριθμοὶ ȣ̃σαι, μονάδι ἀεί ποτε ἀλλήλων διενηνόχασιν, ἐὰν ληφθῶσιν ὁσαιδήποτε αὐτῶν, ϗ κληθῶσι λ, μ, ν, ξ,

π, ρ, ἔσται $\rho = \pi + 1$, καὶ $\pi = \xi + 1$, καὶ $\xi = \nu + 1$, καὶ $\mu = \lambda + 1$· ἐὰν οὖν αὗται αἱ ἐξισώσεις ὑψωθῶσι συνεχῶς ἐπὶ βαθμοὺς, προκύψουσιν αἱ ἐφεξῆς ἐξισώσεις

$$\begin{array}{l|l}
\rho^2 = \pi^2 + 2\pi + 1 & \rho^3 = \pi^3 + 3\pi^2 + 3\pi + 1 \\
\pi^2 = \xi^2 + 2\xi + 1 & \pi^3 = \xi^3 + 3\xi^2 + 3\xi + 1 \\
\xi^2 = \nu^2 + 2\nu + 1 & \xi^3 = \nu^3 + 3\nu^2 + 3\nu + 1 \\
\nu^2 = \mu^2 + 2\mu + 1 & \nu^3 = \mu^3 + 3\mu^2 + 3\mu + 1 \\
\mu^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 & \mu^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\rho^4 = \pi^4 + 4\pi^3 + 6\pi^2 + 4\pi + 1 \\
\pi^4 = \xi^4 + 4\xi^3 + 6\xi^2 + 4\xi + 1 \\
\xi^4 = \nu^4 + 4\nu^3 + 6\nu^2 + 4\nu + 1 \\
\nu^4 = \mu^4 + 4\mu^3 + 6\mu^2 + 4\mu + 1 \\
\mu^4 = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1
\end{array}$$

Ἐν ταῖς πρώταις ἐξισώσεσιν ἑκάστου τῶν τριῶν συστημάτων ἀντικατασταθήτωσαν, ἀντὶ μὲν π^2 ἡ αὐτοῦ δύναμις, ἀντὶ δὲ ξ^2 ἡ ἰδία αὐτοῦ δύναμις, καὶ οὕτως ἑξῆς ἕως τῆς τοῦ λ^2 δυνάμεως· οὐκοῦν ἔχομεν

$$\begin{array}{rl|rl}
\rho^2 = & + 2\pi + 1 & \rho^3 = & + 3\pi^2 + 3\pi + 1 \\
 & + 2\xi + 1 & & + 3\xi^2 + 3\xi + 1 \\
 & + 2\nu + 1 & & + 3\nu^2 + 3\nu + 1 \\
 & + 2\mu + 1 & & + 3\mu^2 + 3\mu + 1 \\
 \lambda^2 & + 2\lambda + 1 & \lambda^3 & + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\rho^4 = & + 4\pi^3 + 6\pi^2 + 4\pi + 1 \\
 & + 4\xi^3 + 6\xi^2 + 4\xi + 1 \\
 & + 4\nu^3 + 6\nu^2 + 4\nu + 1 \\
 & + 4\mu^3 + 6\mu^2 + 4\mu + 1 \\
 \lambda^4 & + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1
\end{array}$$

563. Ἐκ δὲ δὴ τῶνδε τῶν ἐξισώσεων ἀποφέρονται τάδε τὰ θεωρήματα „ἐὰν δοθῶσι πολλοὶ φυσικοὶ ἀριθμοὶ :

α΄. „ὁ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου τετράγωνος ρ^2 ἴσος ἐστὶ „τῷ ἀπὸ τοῦ πρώτου τετραγώνῳ λ^2, συνάμα τῷ διπλῷ ἀ„θροίσματι ἁπάντων τῶν πρὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρων, εἴτ' οὖν + „$2\pi + 2\xi + 2\nu + 2\mu + 2\lambda$, καὶ ἔτι σὺν τῷ ἀριθμῷ „τῶν πρὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρων, εἴτ' οὖν $+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1$" ἔστωσαν γὰρ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 2, 3, 4, 5· ἔσται οὖν ὁ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρου τετράγωνος $25 = 4 + 4 + 6 + 8 + 1 + 1 + 1 = 25$· ἔστωσαν αὖθις φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5, 6· οὐκοῦν ἔσεται ὁ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρου τετράγωνος $36 = 1 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 36$ κτ.

β΄. „ὁ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρου κύβος ρ^3 ἴσος ἐστὶ τῷ „ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου κύβῳ λ^3, συνάμα τῷ τριπλῷ ἀθροί„σματι τῶν τετραγώνων τῶν ἀφ' ἁπάντων τῶν ὅρων τῶν „πρὸ τοῦ ἐσχάτου, καὶ τῷ τριπλῷ ἀθροίσματι ἁπάντων τῶν „πρὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρων, καὶ ἔτι σὺν τόσαις μονάσιν, ὅσοι „εἰσὶν οἱ πρὸ τοῦ ἐσχάτου ὅροι"· ἔστω γὰρ σειρὰ φυσικῶν ἀριθμῶν 4, 5, 6, 7· δῆλον οὖν ὅτι ὁ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρου κύβος $7^3 = 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 6^2 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 1 + 1 + 1$, εἴτ' οὖν $343 = 64 + 48 + 75 + 108 + 12 + 15 + 18 + 3$.

γ΄. „ὁ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρου τέταρτος βαθμὸς ρ^4 „ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου τετάρτῳ βαθμῷ λ^4 συνά„μα τῷ τετραπλῷ κεφαλαίῳ τῶν κύβων τῶν ἀφ' ἁπάν„των τῶν πρὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρων, καὶ τῷ ἑξαπλῷ κεφαλαίῳ „τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν αὐτῶν ὅρων, καὶ τῷ τε„τραπλῷ κεφαλαίῳ τῶν πρὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρων, καὶ τοσαῖς„δε μονάσιν, ὅσοι εἰσὶν οἱ πρὸ τοῦ ἐσχάτου ὅροι".

Τὰ αὐτὰ δὴ καὶ περὶ τῶν ἄλλων δυνάμεων ὡσαύτως εὑρίσκεται, καὶ ἀριθμητικοῖς ποσοῖς ὅτι ῥᾷστα ἐφαρμόζεται.

564. Ἐὰν ἄρα ὁ μὲν πρῶτος ὅρος κληθῇ α, ὁ δὲ ἔσχατος ω, τὸ δὲ ἁπάντων τῶν ὅρων κεφάλαιον κ, ὁ μὲν ἀριθμὸς τῶν πρὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρων ἔσται $\omega - \alpha$, τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν ἀφ' ἁπάντων τῶν ὅρων κ^2, τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν κύβων κ^3· καὶ τὸ μὲν κεφάλαιον ἁπάντων τῶν πλὴν τοῦ ἐσχάτου ὅρων ἔσται $= \kappa - \omega$, τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν αὐτῶν ὅρων $= \kappa^2 - \omega^2$· τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν κύβων τῶν ἀπὸ τῶν αὐτῶν ὅρων ἔσται $= \kappa^3 - \omega^3$· καὶ τοῦ μὲν πρώτου θεωρήματος τὸ συμβολικὸν σχῆμα ἐκτεθείσεται οὕτω· $\omega^2 = \alpha^2 + 2\kappa - 2\omega + \omega - \alpha$, εἴτ' οὖν $\omega^2 = \alpha^2 - \alpha + 2\kappa - \omega$· τοῦ δὲ δευτέρου οὕτω· $\omega^3 = \alpha^3 + 3\kappa^2 - 3\omega^2 + 3\kappa - 3\omega + \omega - \alpha$, τουτέστιν, $\omega^3 = \alpha^3 - \alpha + 3\kappa^2 - 3\omega^2 + 3\kappa - 2\omega$· τέλος δὲ τοῦ τρίτου· $\omega^4 = \alpha^4 + 4\kappa^3 - 4\omega^3 + 6\kappa^2 + 6\omega^2 + 4\kappa - 4\omega + \omega - \alpha$, ὅ ἐστιν, $\omega^4 = \alpha^4 - \alpha + 4\kappa^3 - 4\omega^3 + 6\kappa^2 - 6\omega^2 + 4\kappa - 3\omega$ κτλ.

Ἐκ μὲν οὖν τοῦ πρώτου τύπου εὑρίσκεται $\kappa = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha$, ἧς δυνάμεως ἀντικατασταθείσης ἐν τῷ δευτέρῳ τύπῳ, γίνεται $\omega^3 = \alpha^3 + 3\kappa^2 - \frac{3}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\omega - \frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha$· ὅθεν προέρχεται $\kappa^2 = \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{6}\omega - \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{6}\alpha$· ἐὰν δὲ αὕτη ἡ δύναμις ἀντικατασταθῇ ἐν τῷ τρίτῳ τύπῳ, εὑρεθήσεται ἐντεῦθεν $\kappa^3 = \frac{1}{4}\omega^4 + \frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{4}\omega^2 - \frac{1}{4}\alpha^4 + \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{1}{4}\alpha^2$. Ταῦτοι δὲ τύποι εὑρεθῆναι δύνανται καὶ περὶ καθυπερτέρων βαθμῶν· ἔστω οὖν $\alpha = 4$, καὶ $\omega = 10$, καὶ ζητηθήτω τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῆς φυσικῆς σειρᾶς 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10· οὐκοῦν ἔσται $\kappa^2 = \frac{1}{3}10^3 + \frac{1}{2}10^2 + \frac{1}{6}10 - \frac{1}{3}4^3 + \frac{1}{2}4^2 - \frac{1}{6}4 = \frac{1}{3}1000 + \frac{1}{2}100 + \frac{1}{6}10 - \frac{1}{3}64 + \frac{1}{2}16 - \frac{1}{6}4 = \frac{1000}{3} + \frac{100}{2} + \frac{10}{6} - \frac{64}{3} + \frac{16}{2} - \frac{4}{6} = \frac{926}{3} + \frac{116}{2} + \frac{6}{6} =$

$312 + 58 + 1 = 371$, ὃ δὴ εὑρεθήσεται ϗ ἐὰν ἑξῆς πάντες οἱ ἀριθμοὶ τετραγωνισθῶσι, ϗ ἀλλήλοις ἐπισυναφθῶσιν οἱ τετράγωνοι· τὰ αὐτὰ δὲ φανήσεται κἂν ἄλλη σειρὰ φυσικῶν ἀριθμῶν ληφθῇ, ϗ δὴ ϗ εἰ τῷ τρίτῳ προσεφαρμοσθῇ τύπῳ.

565. Ἐὰν δὲ ὁ πρῶτος τῆς σειρᾶς ὅρος ᾖ ο ἢ 1, γενήσονται $\varkappa = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega$· καὶ $\varkappa^2 = \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{6}\omega$, ϗ $\varkappa^3 = \frac{1}{4}\omega^4 + \frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{4}\omega^2$.

566. Ἐὰν δὲ ἄπειρος ᾖ ἡ σειρὰ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἔςαι δήπȣ ὁ ἔσχατος αὐτῆς ὅρος $= \infty$, ȣ̃τινος ἀντὶ ω ἀντικαταςαθέντος ἐν τῷ τύπῳ τȣ̃ τῶν τετραγώνων κεφαλαίȣ, προκύψει $\varkappa^2 = \frac{1}{3}\infty^3 + \frac{1}{2}\infty^2 + \frac{1}{6}\infty - \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{6}\alpha^2 - \frac{1}{6}\alpha$· τȣτέςι $\varkappa^2 = \frac{1}{3}\infty^3$ διὰ τὸ εἶναι πάντας τȣ̀ς ἄλλȣς ὅρȣς ἀπειροςȣ̀ς τȣ̃ $\frac{1}{3}\infty^3$· τȣτέςι $\varkappa^2 = \frac{1}{3}\infty^2 \times \infty$· ὅ ἐςι „τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν ἀφ' ἁπάντων τῶν ἐν φυσικῇ σειρᾷ ἐπ' ἄπειρον προϊόντων ἀριθμῶν ἴσον ἐςὶ τριτημορίῳ τȣ̃ γινομένȣ ἐκ τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ ἐσχάτȣ ὅρȣ τετραγώνȣ ϗ τȣ̃ τῶν ὅρων ἀριθμȣ̃.“

567. Ὡσαύτως εὑρίσκεται τὸ κεφάλαιον τῶν κύβων τῶν ἀπ' ἀριθμῶν, ἐν φυσικῇ σειρᾷ ἐπ' ἄπειρον προϊόντων, τεταρτημόριον ὂν τȣ̃ γινομένȣ ἐκ τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ ἐσχάτȣ ὅρȣ κύβȣ ϗ τȣ̃ τῶν ὅρων ἀριθμȣ̃. Ἀντικαταςαθέντος γὰρ τȣ̃ ∞ ἀντὶ ω ὁ τύπος τρέπεται ἐπὶ τόνδε $\varkappa^3 = \frac{1}{4}\infty^4$: καὶ ἐν γένει „τὸ κεφάλαιον τῶν βαθμῶν, οἷς δείκτης πεπερασμένος ὑπάρχει μ, τῶν ἐξ ἀριθμῶν φυσικῇ σειρᾷ ἐπ' ἄπειρον χωρȣ́ντων ἴσον ἐςὶ τῷ $\frac{1}{\mu + 1}$ τȣ̃ γινομένȣ ἐκ τȣ̃ βαθμȣ̃ ∞^{μ} τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ ἐσχάτȣ ὅρȣ ϗ τȣ̃ τῶν ὅρων ἀριθμȣ̃ ∞, εἴτ' ȣ̃ν $\varkappa^{\mu} = \frac{1}{\mu + 1}\infty^{\mu + 1} = \frac{\infty^{\mu + 1}}{\mu + 1}$

568. Τουτὶ δὲ καὶ ταῖς ὁμοβαθμίοις τῶν ῥιζῶν τῶν ἐν φυσικῇ σειρᾷ ἐπ' ἄπειρον προϊόντων ἀριθμῶν ἐφαρμόζεται· εἰ γὰρ ζητοῖντο τῶν ῥιζῶν αἱ τετραγώνειοι, ἔσαι $\mu = \frac{1}{2}$ (148)· καὶ $\mu + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ καὶ $\frac{1}{\mu + 1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$· ὥσε „τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν ἀπείρου σει„ρᾶς ὅρων τάξει φυσικῇ προϊόντων ἴσον ἐσὶ δυσὶ τριτη„μορίοις τοῦ γινομένου ἐκ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἐ„σχάτου ὅρου, καὶ τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ" εἴτ' οὖν $\frac{2}{3}\infty^{\frac{3}{2}}$· καὶ γὰρ $\frac{2}{3}\infty^{\frac{1}{2}} \times \infty = \frac{2}{3}\infty^{\frac{1}{2} + \frac{2}{2}} = \frac{2}{3}\infty^{\frac{3}{2}}$· ἐπεὶ δὲ $\frac{3}{2}\infty^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{\infty}$ (148)· οὐκοῦν $\frac{2}{2}\infty^{\frac{1}{2}} \times \infty = \frac{3}{2}\sqrt{\infty} \times \infty = \frac{3}{2}\sqrt{\infty^3}$ (167)· ἄρα ὁ τύπος $\frac{2}{3}\infty^{\frac{3}{2}}$ ἰσοδυναμεῖ τῷ τύπῳ $\frac{3}{2}\sqrt{\infty^3}$.

569. Πρὶν ἢ δὲ τέλος ἐπιθεῖναι τῷ Συμβολικῷ λογισμῷ δεῖν ᾠήθην διὰ βραχέων διαλαβεῖν, ὅπως ὁ περιώνυμος Εὔλερος κέχρηται ταῖς ἀποκλινούσαις σειραῖς εἰς εὕρεσιν τῶν κατὰ τὰς ἐξισώσεις ῥιζῶν· θεμέλιος δὲ ὑπόκειται αὐτῷ τῇ μεθόδῳ τὸ ὑπὲρ ἑκάσης ἐξισώσεως προσδιορίσασθαι σειρὰν ἀριθμῶν α, β, γ κτλ. οὕτως ἐχούσαν φύσεως, ὡς ἕκασον ὅρον τῶν τῆς σειρᾶς διὰ τοῦ ἡγουμένου διαιρούμενον ἐμφαίνειν τὴν δύναμιν τῆς ῥίζης τοσούτῳ ἀκριβέσερον, ὅσον ἄντις μᾶλλον προαγάγοι τὴν τῶν ἀριθμῶν σειράν.

Ὑποτεθείσθωσαν, φησὶν, ὅροι κατὰ σειρὰν οἱ π, κ, ρ, σ, τ, υ, κτλ., οὕτως ἔχοντες φύσεως, ὡς τὸ ἑνός τινος πηλίκον διαιρεθέντος διὰ τοῦ ἡγουμένου ἐμφαίνειν ἅλις ἐγγὺς τὴν ῥίζαν χ, τουτέσιν ὡς ἔγγισα ὑπάρχειν

$\frac{\kappa}{\pi}=\chi$, καὶ $\frac{\rho}{\kappa}=\chi$, καὶ $\frac{\sigma}{\rho}=\chi$ κτλ.· τούτων ὑποτεθέντων ἔσται πάντως $\frac{\kappa}{\pi}\times\frac{\rho}{\kappa}=\chi\cdot\chi$, εἴτ' οὖν $\frac{\rho}{\pi}=\chi^2$, καὶ $\frac{\kappa}{\pi}\times\frac{\rho}{\kappa}\times\frac{\sigma}{\rho}=\chi\chi\chi$, εἴτ' οὖν $\frac{\sigma}{\pi}=\chi^3$· ὡσαύτως καὶ $\frac{\tau}{\pi}=\chi^4$, κτλ.

570. Ἔστω νῦν ἐξίσωσις $\chi\chi=\chi+1$· ἐπεὶ οὖν ἐκ τῶν ἤδη ὑποτεθειμένων $\frac{\kappa}{\pi}=\chi$, καὶ $\frac{\rho}{\pi}=\chi^2$, ἀντικαταστάσει τούτων τῶν δυνάμεων πορισθήσεται ἡ ἐξίσωσις $\frac{\rho}{\pi}=\frac{\kappa}{\pi}+1$, καὶ ἀφανισμῷ τῶν κλασμάτων $\rho=\kappa+\pi$· ἐπεὶ δὲ, ἐξ ὑποθέσεως, καὶ $\frac{\rho}{\kappa}=\chi$, καὶ $\frac{\sigma}{\rho}=\chi$· ἄρα καὶ $\frac{\rho}{\kappa}\times\frac{\sigma}{\rho}=\chi\chi$, εἴτ' οὖν $\frac{\sigma}{\kappa}=\chi^2$· ὥστε ἐν τῇ ἐξισώσει ἀντικατασταθεισῶν ἀντὶ μὲν χ^2 τῆς $\frac{\sigma}{\kappa}$ ποσότητος, ἀντὶ δὲ χ τῆς $\frac{\rho}{\kappa}$, ἔσται $\frac{\sigma}{\kappa}=\frac{\rho}{\kappa}+1$, καὶ $\sigma=\rho+\kappa$· ἐπεὶ δὲ τέλος κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\frac{\tau}{\sigma}=\chi$, καὶ $\frac{\sigma}{\rho}=\chi$· ἄρα $\frac{\tau}{\sigma}\times\frac{\sigma}{\rho}=\chi\chi$, εἴτ' οὖν $\frac{\tau}{\rho}=\chi^2$· ἀντικαταστάσει ἄρα γενήσεται ἡ ἐξίσωσις $\frac{\tau}{\rho}=\frac{\sigma}{\rho}+1$, καὶ $\tau=\sigma+\rho$· δῆλον ἄρα ἕκαστον ὅρον ταύτης τῆς σειρᾶς δεῖν εἶναι ἴσον

τῷ ἀθροίσματι τῶν δύω ἡγουμένων αὐτοῦ ὅρων. Τοιγαροῦν ἐὰν οἱ δύω πρῶτοι ὅροι δοθῶσιν, ἐφ' ὅσον ἄντις ϗ βούλοιτο προαχθείη τὰ τῆς σειρᾶς· ληφθῆναι δὲ δύνανται (φησὶν ὁ ῥηθεὶς σοφὸς) οἱ δύω πρῶτοι ὅροι κατὰ τὸ δοκοῦν· ἐὰν οὖν ὑποτεθῶσι πρῶτοι οἱ 0, 1, χωρήσει ἡμῖν ἡ σειρὰ οὕτω· 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 κτλ.· ἐν ᾗ παντὸς ὅρου διαιρουμένου διὰ τοῦ ἡγουμένου, ἀποφέρεται ἡ δύναμις τῆς χ, ϗ τοσούτῳ τῆς ἀληθοῦς ἔγγιον, ὅσον ἂν ἀπώτερος τοῦ πρώτου ληφθῇ ὅρος ὁ διαιρεθησόμενος· ἀρχομένοις μὲν γὰρ ἐστι μέγα τὸ διάπτωμα, προϊοῦσι δὲ ἐλαττοῦται· ἐὰν οὖν ληφθῇ $\chi = \frac{21}{13}$, ἔσαι $\frac{441}{169} = \frac{21}{13} + 1 = \frac{442}{169}$, ἔνθα τὸ διάπτωμα $= \frac{1}{169}$, τὰ δ' ἐφεξῆς πηλίκα ἔτι ἔλαττον αὐτὸ ἀπεργάζονται.

571. Ἔσω αὖ ἐξίσωσις $\chi\chi = 2\chi + 1$· ϗ ἐπειδὴ $\chi = \frac{\kappa}{\pi}$, ϗ $\chi\chi = \frac{\rho}{\pi}$, ἕξομεν $\frac{\rho}{\pi} = \frac{2\kappa}{\pi} + 1$, ϗ, ἀπαλλαγῇ τῶν κλασμάτων, $\rho = 2\kappa + \pi$· εὑρίσκεται δὲ, ὡς ἀνωτέρω, ϗ $\sigma = 2\rho + \kappa$, ϗ $\tau = 2\sigma + \rho$· ἐκ τούτων συνάγομεν, ὡς ἐν τῇ ἐπὶ τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως σειρᾷ, τὸ διπλοῦν ἑκάστου ὅρου συναφθὲν τῷ πρὸ αὐτοῦ ἀποδίδωσι τὸν ἑφεπόμενον ὅρον· ἐὰν οὖν αὖθις ἀρχὴ γένηται ἀπὸ τῶν 0, 1, ἕξομεν τὴν σειράν· 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408 κτ. ἐντεῦθεν ἄρα ἡ ζητουμένη δύναμις τῆς χ δηλωθήσεται ἀεὶ μᾶλλον ἀκριβέστερον διὰ τῶν κλασμάτων· $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{29}{12}$, $\frac{20}{29}$, $\frac{169}{70}$, $\frac{408}{169}$ κτ., ὧν ἑκάσῳ ἴση τιθεμένη ἀεὶ ἔγγιον γίνεται τῇ ἀληθεῖ δυνάμει $\chi = 1 + \sqrt{2}$.

572. Ἔσω πάλιν ἐξίσωσις $\chi^3 = \chi^2 + 2\chi + 1$· ἐπεὶ οὖν $\chi = \frac{\kappa}{\pi}$, ϗ $\chi^2 = \frac{\rho}{\pi}$, ϗ $\chi^3 = \frac{\sigma}{\pi}$, ἔσαι $\frac{\sigma}{\pi} =$

$\frac{\rho}{\pi} + \frac{2\kappa}{\pi} + 1$, ϗ $\sigma = \rho + 2\kappa + \pi$· ὅθεν δῆλον, ὅπως διὰ τριῶν ὅρων τῶν π, κ, ρ προσδιοριστέον εἴη τὸν τέταρτον σ· ϗ ἐπεὶ ἡ ἔναρξις τῆς σειρᾶς ἐστιν ἐλευθέρα, ἕξεστι συγκροτῆσαι τὴν σειρὰν 0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129 κτ.· τοιγαροῦν αἱ τῆς χ δυνάμεις ἐκ διαδοχῆς ἔσονται $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{28}{13}$, $\frac{60}{28}$, $\frac{129}{60}$ κτ.· ἐὰν οὖν ὑποτεθῇ $\chi = \frac{60}{28} = \frac{15}{7}$, τὸ μὲν πρῶτον μέλος τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως ἐμφανεῖ ἡ ποσότης $\frac{3375}{343}$, δεύτερον δὲ μέλος ἔσται $\frac{225}{49} + \frac{30}{7} + 1 = \frac{3388}{343}$, ἔνθα τὸ διάπτωμα ἐστὶν $= \frac{13}{343}$.

573. Σημειωτέον μέντοι (φησὶν Εὔλερος) ὡς οὐκ εἰσὶν ἅπασαι αἱ ἐξισώσεις οἷαι ἐπιλύεσθαι διὰ ταύτης τῆς μεθόδου· ἄλλως τε, ἢν τύχωσιν ἐλλείπουσαι τοῦ δευτέρου ὅρου, ταύτῃ χρήσασθαι τῇ μεθόδῳ οὐδεμιᾷ μηχανῇ ἀνυστόν· ἔστω γάρ, φέρε, $\chi\chi = 2$· ἐπεὶ δὲ $\chi\chi = \frac{\rho}{\pi}$· ἄρα $\frac{\rho}{\pi} = 2$, ϗ $\rho = 2\pi$, εἶτ' οὖν $\rho = 0 \times \kappa + 2\pi$· ὅθεν ἀποφέρεται ἡ σειρὰ 1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16 κτλ. ἐξ ἧς οὐδὲν ὅλως συνάγεται· ἕκαστος γὰρ ὅρος διαιρούμενος διὰ τοῦ ἡγουμένου ἀεὶ δίδωσιν ἤτοι $\chi = 1$, ἢ $\chi = 2$· ἐὰν δὲ προτεθῇ ἡ $\upsilon^2 = 2\upsilon + 1$, εὑρεθήσονται διὰ προσεγγίσεως αἱ ἡμῖν ἤδη προεκτεθεῖσαι ῥίζαι (570).

574. Σημειωτέον δὲ ϗ τοῦτο (προστίθησιν οὗτος ὁ σοφὸς περὶ ταύτης τῆς μεθόδου)· ἡνίκα γὰρ ἡ ἐξίσωσις περιέχει μίαν τινὰ λογικὴν ῥίζαν, εἰ ληφθῇ ἀρχὴ τῆς σειρᾶς τοιάδε, οἵα ἀποτελεῖν ταύτην τὴν ῥίζαν, ἕκαστος ὅρος ταύτης τῆς σειρᾶς διαιρεθεὶς διὰ τοῦ ἡγουμένου ὅρου ἀποδώσει οὐχ ἧττον τὴν ῥίζαν ταύτην ἀκριβῶς· ἔστω ἐξί-

σωσις $\chi\chi = \chi + 2$, ἧς μία τῶν ῥιζῶν ὑπάρχει $\chi = 2$· ἐπεὶ δὲ ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης πρόεισι τύπος τῆς σειρᾶς ὁ $\rho = \kappa + 2\pi$, ἐὰν ληφθῶσιν ὡς πρῶτοι ὅροι οἱ 1, 2, προκύψει σειρὰ, 1, 2, 4, 8, 16, 32 κτλ., ἥτις ἐςὶ γεωμετρικὴ πρόοδος αὔξȣσα κατὰ πηλικότητα 2.

575. Ἡνίκα μέντοι ἡ τῆς σειρᾶς ἔναρξις ȣ̓κ ἀποδίδωσι τὴν ῥίζαν, ἡ σειρὰ τὴν μὲν τῇ ἐλάττονι τῶν ῥιζῶν προσεχῆ ἥκιστα παράξει, τὴν δὲ τῇ μείζονι ἐγγὺς ȣ̓͂σαν· βȣλομένοις δὲ ἐκ τῆς σειρᾶς εὑρεῖν τῶν ῥιζῶν τὴν ἐλάττονα, ἀνάγκη πᾶσα πρὸς τȣ̃το προδιαθεῖναι τῆς σειρᾶς τῶν ὅρων τȣ̀ς προτέρȣς· ἔςω γὰρ ἐξίσωσις $\chi\chi = 4\chi - 3$, ἧς ἡ μὲν τῶν ῥιζῶν ἐςι $\chi = 1$, ἀτέρα δὲ $\chi = 2$, ὁ δὲ πρὸς ἔκθεσιν τῆς σειρᾶς τύπος $\rho = 4\kappa - 3\pi$ ἐμφαίνει, δυοῖν ὅρων δοθέντων, τὸν τρίτον ἰσȣ̃σθαι τῷ τετραπλῷ δευτέρῳ πλὴν τȣ̃ τριπλȣ̃ πρώτȣ, ὡσαύτως δὲ ἔχειν ϗ ἕκαςον ὅρον τῆς σειρᾶς πρὸς τȣ̀ς πρὸ αὐτȣ̃ δύω· ȣ̓κȣ̃ν ἐὰν εἰς εὕρεσιν τῆς ἐλάττονος ῥίζης δοθῶσι πρῶτοι ὅροι 1, 1, προκύψει σειρὰ 1, 1, 1, 1, 1, 1, κτλ. δεξιῶς ἔχȣσα προβάλλειν ἀεὶ τὴν ἐλάττονα ῥίζαν· ὡς, εἴπερ ὑποτεθεῖεν πρῶτοι ὅροι οἱ ἀριθμοὶ 1, 3 οἱ ἀποδιδόντες τῶν ῥιζῶν τὴν μείζονα, ἐκ τῆς τȣ̃ τύπȣ ἐκφράσεως προκύψει ἡ σειρὰ 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 κτλ., ἀφ᾽ ἧς ἀκριβέςατα προέρχεται ἡ ῥίζα 3· ἐὰν δὲ τῆς σειρᾶς ἀρχὴ ἄλλη γένηται, οἵα μὴ ἀποδιδόναι τὴν ἐλάσσονα ῥίζαν, τοιάδε ἀναφυήσεται σειρὰ, ἧς τῶν ὅρων ἕκαςος διαιρȣ́μενος διὰ τȣ̃ ἡγȣμένȣ ἀποδίδωσιν ἀεὶ ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ῥίζαν προσεχῆ τῇ 3· τοσȣ́τῳ δὲ μᾶλλον, ὅσον ὁ διαιρȣ́μενος ἀπέχει τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ τῆς σειρᾶς· ȣ̓δέποτε μέντοι τὰ πηλίκα προσπελάσȣσι τῇ ἐλάσσονι τῶν ῥιζῶν.

576. Τελευταῖον ἔςω ἐξίσωσις $\chi^{\infty} = \chi^{\infty-1} + \chi^{\infty-2}$ $\chi^{\infty-3}$ + κτλ. ἐπὶ τάυτης ἒν τῆς ἐξισώσεως τοιάνδε χρὴ εἶναι τὴν σειρὰν, ἧς ἰσῆται ὅρος ἕκαςος τῷ ἀθροίσματι πάντων τῶν ἡγȣμένων ὅρων, εἴτ' ἒν 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 κτλ., ὃ δείκνυσι μίαν τινὰ τῶν ῥιζῶν τῆς προκειμένης ἐξισώσεως ȣ̃σαν ἀκριβῶς 2· ἐὰν ἒν ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις διαιρεθῇ διὰ χ^{∞}, προκύψει $1 = \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi\chi} + \frac{1}{\chi\chi\chi}$ κτ. $=$ (559) $\frac{\chi}{\chi\chi - \chi} = \frac{1}{\chi - 1}$· ἄρα $1 = \frac{1}{\chi - 1}$, ϗ $\chi - 1 = 1$, ϗ $\chi = 2$.

577. ΣΧΟΛΙΟΝ. Μετ' ἐπιςασίας ἀνερευνήσασι τὴν μέθοδον ταύτην, δῆλον εὐθὺς, ὡς ἥκιςα δεῖ τȣ̀ς πρώτȣς ὅρȣς τῆς σειρᾶς ὑπάρχειν $= 0$, μήδ' ἐξεῖναι ἀπολύτως αὐτȣ̀ς τιθέναι πρὸς τὸ δοκȣ̃ν, ὥσπερ ἔοικε βȣ́λεσθαι ὁ περικλεὴς Εὔλερος ὁ τῆς μεθόδȣ εὑρετής· τȣ̃θ' ὅπερ ἥκιςα ὅλως ἀπείργει μὴ ȣ̓χὶ ὑπάρχειν κομψοτάτην ϗ χαριεςάτην τὴν μέθοδον· ἣν ἐνταυθὶ παρεθέμεθα τοῖς πρωταγωνιςαῖς τῶν Μαθηματικῶν χαριζόμενοι, ἵν' ἔχοιεν εἰδέναι, ὅπως καὶ διὰ τῶν σειρῶν αἱ ἐξισώσεις ἐπιλύεσθαι δύνανται· παρὰ γὰρ ταύτην τὴν καινοφανῆ τȣ̃ Εὐλέρȣ εἰσὶ ϗ ἄλλαι μέθοδοι παντοῖαι, ἃς εὑρήσει ὁ βȣλόμενος μετιὼν τȣ̀ς κατὰ πλάτος περὶ τȣ́τȣ εἰπόντας.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ Μηκομετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Α᾽ρχαὶ τῆς Γεωμετρίας, ϗ περὶ γραμμῶν.

1. Γεωμετρία ἐςὶν ἐπιςήμη τῶν τῆς ἐκτάσεως ἰδιοτήτων ἐξεταςική.

Η῾ μὲν κατὰ μῆκος ἔκτασις καλεῖται Γραμμή· ἡ δὲ κατάτε μῆκος ϗ πλάτος, Ε᾽πιφάνεια· ἡ δὲ κατάτε μῆκος ϗ πλάτος ϗ βάθος, Στερεόν.

2. ΠΟΡΙΣΜΑ. Η῾ γραμμὴ ἄρα, ϗ ἡ ἐπιφάνεια, ϗ τὸ ςερεὸν, τὰ τῆς Γεωμετρίας εἰσὶν ὑποκείμενα· ϗ ὅσον μὲν αὐτῆς περὶ τὰς γραμμὰς ἀχολεῖται, Μηκομετρία ὀνομάζεται· τὸ δὲ περὶ τὴν ἐπιφάνειαν, Ε᾽πιπεδομετρία· Στερεωμετρία δὲ τέλος, ὅσον αὐτῆς περὶ τὴν τῶν ςερεῶν ςρέφεται καταμέτρησιν.

3. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸ ςερεὸν, ἐπεὶ ἄπειρον ἐχ᾽ ὑπάρχει, περιέχεται ἐξ ἀνάγκης ὑπὸ ἐπιφανείας, ἢ χήματος, πανταχόθεν αὐτὸ περιορίζοντος· ἡ δ᾽ ἐπιφάνεια, ὑπὸ γραμμῶν· καὶ πράγματι μὲν ἐκ ἂν εἴη γραμμὴ

πλάτυς ἄμοιρος, ὐδὲ μὴν ἐπιφάνεια ἀβαθής· ὐδὲν ἀλλ' ὖν τὸ κωλύον τὸν Γεωμέτρην μὴ ὐχὶ διελεῖν, τῇ γῦν ἐπινοίᾳ, τὴν ἔκτασιν εἰς γραμμὴν, ἐπιφάνειαν, καὶ ςερεὸν, φύσει πως βαινυσῶν οὕτω τῶν κατὰ τὸ οἰκεῖον αὐτοῦ ὑποκείμενον πράξεων· ὑπὸ ταῦτα γὰρ τὰ τρία θεωρηθείη μόνως ἂν ἡ ἔκτασις, καὶ ταύτῃ δὴ καὶ διακεκριμένως ἐκμετρηθείη· ἡνίκα γὰρ, φέρε, τὸ μιᾶς ἀπ' ἄλλης πόλεως ἀπόςημα ζητεῖται, ἥκιςα τῦ μεταξὺ πλάτυς δεήσει, μηδὲν ὅλως τῷ μήκει συμπράττοντος· ἡνίκα δὲ μαθεῖν τὴν περιοχὴν ἀγρῦ τινος βυλόμεθα, ὐδόλως περὶ τῦ τῆς γῆς βάθυς, ὅσον πότ' εἴη, ἀνερευνῶμεν, ἀλλὰ μόνην τὴν ἐπιφάνειαν ἐκμετρῦμεν.

4. Σημεῖον ἐςὶ μέρος ἀπειροςὸν τῆς γραμμῆς.

5. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὸ ἄρα σημεῖον ὐκ ἔςι ποσὸν ἀπόλυτον, ἀλλ' ἁπλῶς μόνον ὅρος συγκρίσεως, ἢ ἀναλογίας.

Ἐπινοήσωμεν γὰρ γραμμὴν ἡντιναῦν, διῃρημένην εἰς μέρη ἄπειρα τῷ ἀριθμῷ (Συμ. λ. 525 καὶ ἑξῆς) ἰσάλληλα· ἕκαςον ὖν τύτων ἔςαι τὸ ἐνταῦθα καλύμενον σημεῖον.

6. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Δύω σημεῖα ἐπὶ γραμμῶν μήκει διαφερυσῶν κείμενα, ἀπείρως ὄντα μικρὰ (Συμ. λ. 222), ὐκ ἔσονται μέντοι ἰσάλληλα· ἀλλ' ἀνάλογα ἕκαςον ταῖς ἑαυτῶν γραμμαῖς (Συμ. λ. 234).

7. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Τὸ ἄρα σημεῖον, κατὰ τὸν ἀποδοθέντα ἡμῖν ὁρισμὸν, ὐκ ἔςιν ἀπολύτως ἁπλῦν καὶ ἀδιαίρετον· θῶμεν γὰρ δύω γραμμὰς, ὧν ἡ ἑτέρα τῆς ἑτέρας εἴη διπλῆ· ὐκῦν καὶ τὸ τῆς πρώτης σημεῖον ἔςαι τῦ τῆς δευτέρας διπλάσιον (Συμ. λ. 234)· ἀλλὰ μὴν ὐκ ἔςι πεπερασμένη γραμμὴ, ἣ ὐκ ἂν ὑποτεθείη ἑτέρας διπλῆ· ἄρα ἅπαν σημεῖον, ἐφ' ἧς ἂν ληφθῇ γραμμῆς πεπερασμέ-

νης ϗ ὡρισμένης, ἐκληφθῆναι ἀεὶ δύναται δίκην συνθέτου ποσότητος.

8. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Οὐ δεῖν ἡγησάμην μετὰ τῶν πλειόνων Γεωμετρῶν ἐκτάσεως ἁπάσης ἐκτὸς ὁρίσασθαι τὸ σημεῖον· ὑπάρχουσι γὰρ ἄρα μέρη ἄτομα, ἀδιαίρετα κυρίως οὕτω καλούμενα, μέρη μὲν ὄντα τῆς ἐκτάσεως, αὐτὰ δ' ἐκτάσεως πάσης ἀπηλλαγμένα; ἀλλὰ τοῦτ' ἔστιν ὃ πολλῶν ἐρίδων ϗ λογομαχιῶν τὰ Γεωμετρῶν ἐνέπλησε· πολλοὶ μὲν γὰρ αὐτῶν μήδ' ὑπάρχειν μηδὲ δύνασθαι ὅλως ὑποτεθῆναι τοιάδε σημεῖα ἐκτάσεως οἰασοῦν ἄμοιρα διατείνονται· ἀλλ' ὡς οἰόμεθα, τὸ μὲν στερεὸν ἐξ ἐπιφανειῶν, ἡ δ' ἐπιφάνεια ἐκ γραμμῶν, γραμμὴ δὲ πᾶσα ἐκ σημείων ἴσχει τὴν σύνθεσιν· τὰ τοίνυν σημεῖα στοιχεῖά εἰσι πάντων τῶν περὶ ἃ ἡ Γεωμετρία· ἐὰν ἄρα ὁρισθῇ οὕτως, ὡς εἶναι τὴν ὕπαρξιν αὐτῶν ἀμφίβολον, δηλονότι, ὡς ἔστι σημεῖον ἅπαν μέρος ἀνέκτατον τῆς γραμμῆς, μὴ πεσεῖται ἅπαν τὸ τῆς Γεωμετρίας οἰκοδόμημα, ἐπερηρεισμένον ἐφ' οὕτω ῥοώδους ϗ, ὡς εἰπεῖν, ἀνυπάρκτου τοῦ θεμέθλου; ἄλλοι δὲ, οὐκ ὀλίγοι ϗ οὗτοι, ἀκριβέστερον ὁρίζονται τὸ σημεῖον μέρος ὑπάρχειν τῆς γραμμῆς ὡς ἀνέκτατον θεωρεῖσθαι δυνάμενον· ἐπιεικῶς γὰρ οὐ ξυνορῶ τὴν ἀνάγκην, δι' ἣν πάμπαν ἆραι χρὴ ἀπὸ τοῦ σημείου τὴν ἰδέαν τῆς ἐκτάσεως· τοὐναντίον δὲ, ἐπεὶ ὁσαδηποτοῦν ἂν σημεῖα συναφθῶσιν, οὐχ ὁρῶ ὅπως ἀνέκτατα ὄντα ἔκτασιν ἡντιναοῦν ἀπαρτίσαι ἕξουσιν· ἀποδοτέον ἄρα τῷ σημείῳ ἔκτασίν τινα ἐλαχίστην, ϗ ὅσον οὐ νοητήν· ἐπεὶ δ' ἡμῖν ὥρισται τὸ ἀπειροστὸν εἶναι τῆς γραμμῆς, εἴτ' οὖν ἐκτάσεως πεπερασμένης, ἕξει ἄρα ἔκτασιν ἀπειροστὴν, ὅσην ἀπονεμητέαν σημείῳ κρίνομεν· διὰ ταῦτα δὴ καὶ τῇ γραμμῇ πλάτος, ϗ τῇ ἐπιφανείᾳ δὲ βάθος ἀπονεμοῦμεν ἀπειροστόν.

9. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Πᾶσα γραμμὴ (σχ. 1) δυσὶ γράμμασιν ἐπὶ τῶν περάτων αὐτῆς σεσημειωμένοις ὁρίζεται· ὅτω τὰ Α ϗ Π γράμματα ὁρίζωσι τὴν ἀπὸ τῦ Α ἀρχομένην εἰς δὲ τὸ Π τελευτῶσαν γραμμὴν, ἥτις καλεῖται Γραμμὴ ΑΠ.

10. Ἐπινοήσωμεν δὴ τὸ Α πέρας τῆς ΑΠ γραμμῆς, ὥσπερ ἀπειροςὸν μέρος αὐτῆς· τȣτὶ ὂν ἔςαι ἡμῖν σημεῖον (4)· ἐπινοήσωμεν δὲ ἤδη, ὡς τὸ σημεῖον Α κινȣμενον ἐπὶ τὸ Π, ἄπειρα ἴχνη καταγράφει, ὧν ἕκαςον ἔςι σημεῖον ἴσον αὐτῷ τῷ κινηθέντι Α· ϗ ὅτω βαδίζον, καταγράψει τὴν ΑΠ γραμμὴν, ἥτις ȣδὲν ἔςαι ἀλλ᾽ ἢ συμπλήρωμα πάντων τῶν ὑφ᾽ ἑκάςȣ βήματος καταλειφθέντων ἰχνῶν, ἢ πασῶν τῶν ἀπειροςῶν γραμμῶν, ἢ πάντων τῶν σημείων, ὧν ἕκαςον ἔςαι ςοιχεῖον ταύτης τῆς γραμμῆς.

11. Ἐὰν τὸ γεννῶν σημεῖον Α ἐπὶ τὸ Π χωρȣ̃ν τὴν αὐτὴν ἀεὶ ὁδεύῃ ὁδὸν, καταγράψει ὅτω γραμμὴν εὐθεῖαν· ἐὰν δὲ, ἕς τ᾽ ἂν ἀφίκηται ἐπὶ τὸ Π, φέρηται μὲν ἀπαρεγκλίτως μέχρι τῦ Ζ, ἐκεῖθεν δὲ ἅπαξ παρεκτραπὲν διανύῃ ἀπαρεκτρέπτως τὸ λοιπὸν διάςημα, καταγράψει δύω εὐθείας γραμμὰς ΑΖ, ΖΠ, ἡ δ᾽ ὁλικὴ ΑΖΠ καλεῖται γωνιώδης· Ἀλλ᾽ ἐὰν, ἵν᾽ ἐφίκηται τῦ Π, ἐφ᾽ ἑκάςȣ διαβήματος ἀπειροςῶς παρεκτρέπηται τῆς ὁδȣ̃, καταγράψει γραμμὴν ἰδίῳ ὀνόματι καλȣμένην Καμπύλην, οἵα ἡ ΑτΠ· ἐντεῦθεν ἀπαρυσόμεθα τοὺς ὁρισμοὺς·

12. Εὐθεῖα γραμμὴ ἐςιν, ἧς ἅπαντα τὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς αὐτῆς κεῖται φορᾶς· οἵα ἐςὶν ἡ ΑΠ· Καμπύλη δὲ, ἧς ἅπαντα διηνεκῶς παρεκτρέπεται ἀπειροςῶς τῆς ἐν ἀρχῇ ὁδȣ̃, οἵα ἡ ΑτΠ· Γωνιώδης δὲ

ἡ γινομένη ὑπὸ δύω εὐθειῶν εἰς ἓν συνιςῶν σημεῖον, οἷα ἡ ΑΖΠ. Μικτὴ δὲ, ἧς μέρος μὲν εὐθεῖα, μέρος δέ τι καμπύλη, οἷα ἡ ΘΑτΠ.

13. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐπείπερ εὐθείας γραμμῆς πάντα τὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς αὐτῆς κεῖται φορᾶς (12)· ἀπὸ παντὸς δὲ σημείου ἐπὶ πᾶν αὐτῷ συναφὲς σημεῖον μία μόνη ἐςὶν ἡ φορά· διὰ δύω ἄρα συναφῶν σημείων μία μόνη εὐθεῖα διελθεῖν δύναται.

14. ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἴτε τὰ δύω σημεῖα πλάτους ἄμοιρα ὑποτίθεται· καὶ δὴ δι' αὐτῶν οὐ μὴ διελεύσεται ὅτι μὴ μία εὐθεῖα· εἴτε ὑποτίθεται αὐτοῖς ἀπειροςόντι πλάτος (8), καὶ ἐπεὶ τὸ αὐτὸ πλάτος ὑποτεθῆναι δεῖ κἀπὶ τῆς ὑπὸ τῶν δυοῖν συναφῶν σημείων ἀποτελουμένης εὐθείας, τὸ τῆς εὐθείας πλάτος καλύψει τὸ τῶν σημείων· ἄρ' ἀεὶ ἔςαι ἀληθὲς εἰπεῖν, ὡς διὰ τῶν σημείων τῶνδε μία μόνη εὐθεία διελεύσεται.

15. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Δύω ἄρα συναφῆ σημεῖα ἀναγκαίως συνιςῶσι μίαν εὐθεῖαν (13).

16. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐπὶ πάσης ἄρα καμπύλης δύω σημεῖα ἀλλήλων προσεχέςατα συνιςῶσιν ἀεὶ μίαν εὐθεῖαν (ἀνωτ.)· οὐκοῦν καμπύλη πᾶσα ἐκληπτέα, ὡς ἀποτελουμένη ἐκ πολλῶν εὐθειῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἡ ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ ΑΠ ἡ ἐλαχίςη ἐςὶ τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα Α, Π ἐχουσῶν· σαφὲς γὰρ, ὅτι πᾶσα ἄλλη ὁδὸς, δι' ἧς δύναται τὸ Α ἐπὶ τὸ Π ἐφικέσθαι παρὰ τὴν ΑΠ, ἀφιςαμένη τοῦ εὐθέος, ὥσπερ ἡ γωνιώδης ΑΖΠ, ἢ ἡ καμπύλη ΑτΠ, μείζων ἔςαι τῆς ΑΠ.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Σημειωτέον τοῖς πρωτοπείροις ἅπαξ τὰ ἐφεξῆς.

Ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ γενικῶς αἱ ἀλήθειαι ἀποδείκνυνται, ὑποτίθενται μέντοι γραμμαί μερικαὶ, ἐφ᾽ ὧν γίνεται ἡ δεῖξις τῦ προτεθέντος· τϩτὶ δὲ οἰκονομεῖται ἢ πρὸς τὸ ὑποτεμεῖν τὸν λόγον, ἢ μάλιϛα πρὸς τὸ ἀεὶ ἔχειν τὸ χῆμα ὑπ᾽ ὄψιν τὸν μελετῶντα, κἀκ τϩτϩ ῥαδίως συνιέναι τῦ προτεθέντος τὴν ἔννοιαν· τῆς μέντοι δείξεως γενομένης, τὰ μερικὰ γράμματα τῦ χήματος ἀπαλείφοντας, γενικῶς χρεὼν ἀπαγγέλλειν τὴν προαποδειχθεῖσαν πρότασιν· ὅτως ἐπὶ τῆς προλαβϩσης περιπτώσεως, τὸ κατ᾽ ἀρχὰς ἀπήγγελται: ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΠ ἡ ἐλαχίϛη ἐϛὶ τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα Α, Π, ἐχϩσῶν· τόδε ϩ̃ν ὁ πρωτόπειρος ϗ τὸν αὐτῦ λόγον καλῶς γνϩ̀ς, ἐπὶ τὸ γενικώτερον ἀνατρέχων ὀφείλει ἀναγνώσκειν ὅτω: πᾶσα εὐθεῖα γραμμὴ ἐλαχίϛη ἐϛὶ τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχϩσῶν· ὃν γὰρ λόγον ἐπὶ τῆς ΑΠ εὐθείας τϩτὶ δέδεικται, τὸν αὐτὸν καὶ ἐφ᾽ ἁπάσης ἄλλης δειχθήσεται.

18. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Ἀπὸ παντὸς ἄρα σημείϩ Α ἐπὶ πᾶν σημεῖον Π μία μόνη ἐϛὶν ἡ πασῶν ἐπιτομωτάτη ὁδὸς (17).

19. ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ΄. Διὰ δύω μονίμων ϗ ὡρισμένων σημείων, οἷα τὰ Α, Π, μία μόνη διατείνει γραμμὴ εὐθεῖα ἡ ΑΠ ὡρισμένη ϗ μόνιμος.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὡρισμένην καὶ μόνιμον εἰπόντες τὴν ΑΠ ἐπὶ μόνης τῆς φορᾶς αὐτῆς τϩτὶ ἐκδεχόμεθα, ὅτι πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα ἐκ τῦ Α ἐπὶ τὸ Π ἀχθεῖσα συμπεσεῖται ἀναγκαίως τῇ εὐθείᾳ ΑΠ· κατὰ γεμὴν μῆκος ἐϛὶν ἀόριϛος ὡς προαχθῆναι δυναμένη ἐπ᾽ ἄπειρον ἔκ τε τῶν δεξιῶν αὐτῆς ἐκ τῦ Α, ϗ ἐκ τῶν ἀριϛερῶν ἐκ τῦ Π· ἡ δ᾽ ὅτω ἀποτελεσθῆναι δυναμένη ἄπειρος εὐθεῖα κατὰ

γεν τὴν φορὰν ἡ αὐτὴ ἔσεται τῇ ΑΠ, καίτοι τῷ μήκει ἐκείνης αὕτη μέρος ἂν εἴη ἀπειροςόν.

20. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Δύω ἄρα σημεῖα ἱκανά εἰσιν ὁρίσαι τὴν θέσιν ἁπάσης εὐθείας.

21. ΠΟΡΙΣΜΑ Η΄. Δύω ἄρα εὐθεῖαι ὑπ᾽ ἀλλήλων ἐν ἑνὶ σημείῳ διατμηθήσονται, ἤ, ὃ ταυτὸν, δύω εὐθεῖαι ἓν μόνον κοινὸν ἕξεσι σημεῖον· ἄλλως γὰρ ἐκ ἂν μεταξὺ δύω σημείων μία διατείνειεν εὐθεῖα (19).

22. ΠΟΡΙΣΜΑ Θ΄. Ἀπὸ παντὸς σημείε Α ἐπὶ πᾶν σημεῖον ἄπειροι τὸν ἀριθμὸν καμπύλαι ἀχθῆναι δύνανται· ἐξέςαι γὰρ ἔτως ἀπὸ τε Α ἐπὶ τὸ Π χωρεσιν, ἤτοι διὰ τε Ζ, ἡ διὰ τε Θ, ἢ διὰ παντὸς ἄλλε ἀπωτέρε διελθεῖν σημείε ἐπ᾽ ἄπειρον, ϗ ἐκ τε ἀκολέθε μᾶλλον ϗ μᾶλλον ἐξεχέσας καταγράψαι καμπύλας ἀπειραρίθμες.

23. Αἴτημα. Ἐξέσω ἀπὸ παντὸς σημείε ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν, ὃ δὴ ϗ εὐθεῖαν ἐπιζεῦξαι λέγεται.

24. Αἴτημα. Καὶ γραμμὴν εὐθεῖαν πεπερασμένην κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκβάλλειν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τοῦ Κύκλου.

25. Νοείσθω ἡ ΠΖ εὐθεῖα (σχ. 2.) περιαγομένη περὶ τὸ Π σημεῖον ἀκινητεν, ϗ ὅλην περιαγωγὴν διανύεσα. Τὸ ἐν Ζ σημεῖον, πέρας ὂν ταύτης τῆς εὐθείας, ἐφ᾽ ἑκάςε ἀπειροςε διαβήματος ἴσως τε ϗ ἀπειροςῶς ἀ-

ποςήσεται τῆς ἑαυτȣ̃ προτέρας φορᾶς, ϗ τὴν ὁλοχερῆ καμπύλην Αβκ Ο Ζ καταγράψει.

26. Ἡ τοίνυν ὅλη καμπύλη Αβκ Ο Ζ, ἡ παρὰ τȣ̃ Ζ σημείȣ καταγραφομένη κυκλικὴ περιφέρεια· ὁ μȣ̃ δὲ ἤτε περιφέρεια πᾶσα, ϗ τὸ ἐμπεριεχόμενον αὐτῇ χωρίον ὀνομάζεται Κύκλος· πολλάκις δὲ καὶ μόνη ἡ περιφέρεια καλεῖται κύκλος· Τὸ δὲ Π σημεῖον τὸ κατὰ τὸ μέσον τῆς περιφερείας κείμενον ἀκȣ́ει Κέντρον τȣ̃ κύκλȣ· Τόξον δὲ τȣ̃ κύκλȣ, ὅ,τι δήποτε μέρος τῆς περιφερείας, οἷον τὸ ΖΟ.

27. Ἐν ᾧ ἄρα τὸ Ζ τὴν ἑαυτȣ̃ καταγράφει κυκλικὴν περιφέρειαν Αβκ Ο Ζ, ἕκαςον τῶν τῆς ΑΠΖ γραμμῆς σημείων καταγράψει τὸν ἑαυτȣ̃ ἴδιον κύκλον· τὸ μὲν Δ φέρε τὸν ΔΗΥ, τὸ δὲ Ι τὸν ΙΓΥ ϗ ἑξῆς ὡσαύτως.

28. Πάντες ȣ̃τοι οἱ κύλοι Αβκ Ο Ζ, ΔΗΥ, κτλ· γεγραμμένοι ὑπὸ τῶν διαφόρων σημείων Ζ, Δ, κτλ. τῆς αὐτῶν γραμμῆς περιαχθείσης περὶ ἀκινητȣ̃ν τὸ Π, κοινὸν ἕξȣσι κέντρον τὸ Π, ϗ παρὰ τȣ̃το κληθήσονται κύκλοι ὁμόκεντροι· τοσȣ́τῳ δὲ ἔσονται τῶν ἄλλων ἐλάττȣς, ὅσῳ τὸ γεννῶν ἕκαςον σημεῖον ἐγγὺς γίνεται τȣ̃ κέντρȣ, ϗ μέγιςος μὲν ἁπάντων ἔςαι ὁ Αβκ Ο Ζ, ὃν καταγράφει τὸ Ζ σημεῖον, ἐλάχιςος δὲ, ὁ κύκλος ἀπειροςὸς, ὁ καταγραφόμενος ὑπὸ τȣ̃ σημείȣ, ὃ ἀπαντᾷ ἀμέσως μετὰ τὸ κέντρον Π.

29. Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἕκαςον τῶν τὴν ΠΖ συντιθέντων σημείων, περιαγομένης τῆς ΠΖ, ἰσάριθμα ὁδεύσει διαβήματα· ἐπεὶ γὰρ ἅπαντα τὰ σημεῖα τῇ αὐτῇ ἐπανήκει γραμμῇ, ἀδύνατον ἓν μὲν αὐτῶν κινεῖσθαι, τὰδ᾽ ἄλλα ἠρεμεῖν· ȣ̓δ᾽ ἓν μὲν ἠρεμεῖν, κινεῖσθαι δὲ τἄλλα.

30. Ἕκαςον ἄρα τῶν σημείων ἰσάριθμα διαβήματα διανύον, κ̣ μεθ ἕκαςον ἀπειροςὸν διάβημα, σημεῖον ἑαυτῷ ὅμοιον καταλεῖπον εἰς ςοιχεῖον τῆς ὁλικῆς καμπύλης, ἕκαςον δήπε συγκροτήσει τὴν ἑαυτοῦ καμπύλην ἐξ ἰσαρίθμων ςοιχείων.

31. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἁπάντων ἄρα τῶν κύκλων, ἴσα ἐχόντων ςοιχεῖα, ὁ μείζων κύκλος ἐ μὴ διοίσει τε ἐλάττονος, ὅτι μὴ τῷ ἕκαςον τε ἐλάττονος ςοιχεῖον λόγον ἔχειν πρὸς ἕκαςον τε μείζονος, ὃν ὅλος ὁ ἐλάττων πρὸς ὅλον τὸν μείζονα.

32. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ταῦτα δὲ τὰ ςοιχεῖα ἀπειροςὰ μέρη ὄντα, ἕκαςον τε ᾧ ἐπανήκει κύκλε, ἔσεται σημεῖα (4). ἓν δὲ σημεῖον περιφερείας τινὸς πρὸς ἕτερον ἑτέρας λόγον ἕξει, ὃν ἡ πρώτη περιφέρεια πρὸς τὴν δευτέραν (6).

33. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. ἕκαςον δε τῶν δε τῶν σημείων, ἢ τῶν ςοιχείων, γραμμή ἐςιν εὐθεῖα ἀπειροςή· ἔςι μὲν γὰρ γραμμή· ἐπείπερ γραμμή ἐςιν ἅπαν μῆκος· ἀλλαμὴν τὸ ςοιχεῖον τε κύκλε, εἴτ᾽ ἓν τὸ σημεῖον, ἐςι μέρος ἀπειροςὸν μήκες πεπερασμένε, εἴτ᾽ ἓν τε ὁλικε κύκλου, κ̣ δὴ ἔσεται κ̣ αὐτὸ μῆκος· ἄρα το σημεῖον, τὸ κυκλικὸν ςοιχεῖον, ἔςαι γραμμὴ, κ̣ γραμμὴ ἀπειροςή (8)· αὕτη δ᾽ ἔσεται εὐθεῖα· ἔςι γὰρ τὸ ἴχνος, ὃ καταλείπει ἐν ἑκάςῳ διαβήματι τὸ γεννῶν σημεῖον ἐν τῷ περιάγεσθαι τὴν ΠΖ γραμμήν· ἀλλὰ τὸ γεννῶν σημεῖον ἐ μεταβάλλει τὴν φορὰν, εἰμὴ μεταβαίη ἀπὸ διαβήματος ἐπὶ διάβημα· τὸ ἄρα ἴχνος ἢ ἡ ἀπειροςὴ γραμμὴ, ἣν καταγράφει τὸ σημεῖον ἐφ᾽ ἑνὸς διαβήματος, ἔςιν εὐθεῖα.

34. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἄρα δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὡς ἅπας κύκλος ἐκληφθῆναι δύναται

ὡς σχῆμα συγκροτέμενον ὑπ' ἀπειραρίθμων ἰσαλλήλλων γραμμῶν εὐθειῶν, εἴτ' ἐ πλευρῶν.

35. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Πάντες οἱ κύκλοι μεγάλοι τε καὶ μικροὶ, ὅμοια σχήματα ὄντες, καθ' ὅ,τι ἰσαρίθμες πάντες πλευρὰς ἔχουσι, καὶ ἕκαςος ἰσαλλήλους, δύναται τὸν αὐτὸν τρόπον διαιρεθῆναι, εἴτ' οὖν εἰς μέρη ἰσάριθμα.

36. Κοινῇ ἐν ἔδοξε Γεωμετρῶν παισὶ τὴν κυκλικὴν περιφέρειαν εἰς μέρη 360 ἰσάλληλα διελεῖν, ἃ μοίρας ἐκάλεσαν· μοῖρα ἄρα ἐςὶ τὸ τριακοςὸν ἑξηκοςὸν μέρος ἁπάσης κυκλικῆς περιφερείας· μοῖραι δὲ δύω δυοῖν διαφόρων κύκλων ἀνάλογοί εἰσι ταῖς ὁλικαῖς περιφερείαις, ὧν εἰσι μοῖραι (Συμ. λ. 234)· ἄρα μοῖρα μία ἐκ ἔςι ποσὸν ὡρισμένον ϗ μόνιμον· ἀλλὰ κατὰ τὸ μέγεθος τῆς ἑαυτῆς περιφερείας ἴση ἔςαι, ποδὶ, ὀργυιᾷ, λεύγῃ κτλ.

37. Ἡ μοῖρα διαιρεῖται εἰς λεπτὰ πρῶτα 60, ὧν ἕκαςον εἰς 60 δεύτερα· ἕκαςον δὲ τέτων εἰς 60 τρίτα ϗ ἕτως ἐφεξῆς· γράφονται δὲ ἕτω: 60°, 60^{I}, 60^{II}, 60^{III} κτ. ἀναγινώσκονται δὲ: 60 μοῖραι, 60 πρῶτα λεπτὰ, 60 δεύτερα, 60 τρίτα κτλ.

38. Δύω εὐθεῖαι ΠΖ, ΠΟ ἐκ τῦ κέντρυ ἐπὶ τὲς ἀλληλοδιαδόχες κύκλες ΙΓΤ, ΔΗΤ, ΖΟκ ἀγόμεναι περιέχεσι τόξα, ἤ μέρη τῆς περιφερείας, ἃ ϗ ἄνισα ἀλλήλοις ὄντα, ἔσονται ἔμπης μέρη ὅμοια ἕκαςα τῆς ἑαυτῦ περιφερείας· ἐὰν φέρε τὸ ΖΟ τόξον δέκατον μέρος ῇ τῆς ἑαυτῦ περιφερείας ΖΠκ, ϗ τὸ τόξον ΔΗ δεκατημόριον ἔςαι τῆς ἑαυτῦ περιφερείας ΔΗΤ, ϗ τὸ ΙΓ τῆς ΙΓΤ· ϗ γὰρ σημεῖα ὁσαδηποτῦν τὰ Ζ, Δ, Ι τῆς γραμμῆς ΠΖ διήνυσαν ἰσάριθμα διαβήματα, τῆς ὁλικῆς γραμ-

μῆς ΠΖ ἐκ τȣ̃ Ζ ἐς τὸ Ο κινηθείσης (29)· ἐντεῦθεν ἄρα ὅσα σημεῖά εἰσιν ἐπὶ τȣ̃ ΙΓ τόξȣ, τοσαῦτα κἀπὶ τȣ̃ ΔΗ, κτλ· ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶνδε τῶν σημείων ἐμφαίνει τὸν ἀριθμὸν τῶν διαβημάτων, ἃ διήνυσεν ἡ ΠΖ γραμμὰ ἐκ τȣ̃ Ο μέχρι τȣ̃ Ζ.

39. Πᾶσα εὐθεῖα ἐκ τȣ̃ κέντρȣ ἀρχομένη ϗ εἰς τὴν περιφέρειαν τελευτῶσα καλεῖται Ἀκτίς· ȣ̔́τω τῆς μὲν ΖΘκ περιφερείας ἀκτῖνές εἰσιν αἱ ΠΖ, ΠΟ τῆς δὲ ΔΗΥ αἱ ΠΔ, ΠΗ

40. Ευθεῖα δὲ ἀπὸ τῆς περιφερείας ἀρχομένη ϗ διὰ τȣ̃ κέντρȣ διήκȣσα, ϗ ἐφ᾽ ἕτερον σημεῖον τῆς αὐτῆς περιφερείας ἀφικνȣμένη Διάμετρος ἤκȣσεν· ȣ̔́τω τῆς μὲν ΖΟκ περιφερείας διάμετρος ἐςὶν ἡ ΖΠκ, τῆς δὲ ΔΗΥ ἡ ΔΠΕ· ȣ̓κ ἔςι δὲ περιφερείας σημεῖον, ἀφ᾽ ȣ̔̃ μὴ ἂν ἔχοιμεν ἐπινοῆσαι εὐθεῖαν, ἀγομένην μὲν εἰς τὸ κέντρον, ἐκ τȣ́τȣ δὲ μέχρι τȣ̃ ἀντιθέτȣ τῆς περιφερείας σημείȣ ἤκȣσαν (34)· δυνατὸν ἄρα ἐπινοῆσαι ἐν ἅπαντι κύκλῳ ἀπειραρίθμȣς μὲν ἀκτῖνας, ἀπειραρίθμȣς δὲ καὶ διαμέτρους.

41. Παντὸς κύκλȣ τȣ̃ ΖΟκ πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες ΠΖ, ΠΟ, Πκ, κτλ. τῇ ΠΖ ἀκτῖνι τῇ διὰ περιαγωγῆς τὸν κύκλον γεννησάσῃ ἴσαι προδήλως ἔσαι, ϗ ἀλλήλαις ἴσαι ἔσονται (26). Ἀλλ᾽ αἱ ἀκτῖνες ΠΖ, ΠΟ κτ. μετροῦσι προφανῶς τὸ τȣ̃ κέντρȣ Π ἀπὸ παντὸς σημείȣ τῆς περιφερείας ἀπόςημα· πάντα ἄρα τῆς περιφερείας σημεῖα ἐπίσης τȣ̃ κέντρȣ ἀπέχȣσι.

Ἐξέςαι ἄρα τὸν κύκλον ὁρίσαι καμπύλην, ἧς πάντα τὰ σημεῖα ἐπίσης ἀφίςανται ἀπὸ σημείȣ ἐντὸς τῆς περιφερείας κειμένȣ, ὃ καλεῖται κέντρον.

Διάμετρος πᾶσα ἡ ΖΠκ κατὰ τὸν ἤδη ἀποδοθέντα

ὁρισμὸν, ἐδέν ἐςιν ὅτι μὴ ἀκτῖνες δύω ΠΖ ϗ Πκ ἐπὶ τῆς αὐτῆς κείμεναι φορᾶς· ἄρα ἡ ἀκτὶς τὸ ἥμισύ ἐςι τῆς διαμέτρε· ἀλλὰ πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες εἰσὶν ἰσάλληλοι· ἄρα (Συμ. λ. 234) ϗ πᾶσαι αἱ διάμετροι ἀλλήλαις εἰσὶν ἴσαι.

42. Τὸ τριγωνικὸν χωρίον ΠΖΟ, τὸ ὑπὸ δύω ἀκτίνων τῶν ΠΖ, ΠΟ περιεχόμενον, ϗ τῦ ΖΟ τόξε τῦ ὑπὸ τῶν δε τῶν ἀκτίνων ἀπολαμβανομένε, καλεῖται Τομεύς· ϗ τὰ χωρία ἄρα ΠΖΑ, ΑΠβ, κτλ. εἰσὶ Τομεῖς.

43. Χορδὴ, ἡ ὑποτείνεσα καλεῖται (σχ. 3.) εὐθεῖα πᾶσα ἀφ᾽ ἑνὸς ἐφ᾽ ἕτερον περιφερείας σημεῖον ἐπιζευγνυμένη· ἕτως αἱ εὐθεῖαι ΠΑ, ΖΓ, Ικ εἰσὶ χορδαὶ τῦ ΟΖΨΓ κύκλε.

Δῆλον ἄρα ὡς ϗ πᾶσα διάμετρος ὡς ἀφ᾽ ἑνὸς ἐφ᾽ ἕτερον τῆς αὐτῆς περιφερείας ἀγομένη σημεῖον, ἐςὶ χορδὴ, ἐμὴν δὲ ϗ πᾶσα χορδὴ ἔςιν ἡ αὐτὴ ϗ διάμετρος· ἡ μὲν γὰρ εὐθεῖα ΖΚΓ ἔςιν ἅμα ϗ χορδὴ ϗ διάμετρος, ἡ δὲ ΠΑ μόνον χορδή.

Πᾶσα χορδὴ ΠΑ ἀεὶ τέμνει τὸ κυκλικὸν χωρίον ΟΠΨΓ εἰς δύω, ὧν ἑκάτερον ὀνομάζεται Τμῆμα· τό, τε ὂν ὕπερθεν τῆς ΠΑ χωρίον ΟΠβΑ, ϗ τὸ ταύτης ἔνερθεν ΠΧΨΓΑ εἰσὶ δύω τμήματα ὑπὸ τῆς ΠΑ χορδῆς ὑποτεινόμενα.

44. Ἐπεὶ πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες ἰσάλληλοι, ἐκ τέτε ἄρα καμπυλότης ἔςαι ἡ αὐτὴ ἐν ἁπάσῃ τῇ κυκλικῇ περιφερείᾳ· ἐντεῦθεν ἄρα, ἄνευ ἄλλης τινὸς δείξεως, τὰ ἐφεξῆς συναχθῆναι δύνανται.

45. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Πᾶσα χορδὴ διὰ τῦ κέντρε διήκεσα, ἡ ΖΚΓ, πᾶσα ἐκ τῦ ἀκολέθε διάμετρος, εἰς δύω ἰσάλληλα τμήματα διχοτομεῖ τὸν κύκλον, τὰ ΖΚΓΨ, ΖΚΓΟ, ϗ εἰς δύω δὲ ἰσάλληλα τόξα τὰ ΖΟΓ,

ΖΨΓ· Πᾶσα δὲ παρὰ τὴν διάμετρον χορδὴ ἡ ΑΠ τέμνȣσα τὸν κύκλον εἰς δύω ἄνισα τμήματα, διαιρεῖ ϗ τὴν κυκλικὴν περιφέρειαν εἰς δύω ἄνισα τόξα· ϗ τὸ μὲν μεῖζον ἐμβαδὸν τὸ ΠΑΚΨ καλεῖται Τμῆμα μεῖζον περατȣμενον ὑπὸ τȣ μείζονος καλȣμένȣ τόξȣ ΠΨΑ (44)· τὸ δ' ἔλαττον, ἔλαττον ὑπ' ἐλάττονος τόξου περιοριζόμενον.

46. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Πᾶσα ἄρα χορδὴ ἡ ΠΑ ὑποτείνει δύω τόξα τὰ ΠΟΑ, ΠΨΑ.

47. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Χορδαὶ ἄρα ἴσαι ἐπὶ τȣ αὐτȣ κύκλȣ, ἢ ἐπὶ ἰσαλλήλων κύκλων, ἴσα τόξα ὑποτείνȣσιν· ἔσω γὰρ ἡ ΠΑ χορδὴ ἴση τῇ Ικ· ϗ δὴ τὸ ἔλαττον τόξον ΠΟΑ τὸ ὑποτεινόμενον ὑπὸ τῆς ΠΑ χορδῆς ἰσωθήσεται τῷ ἐλάττονι Ικψ τῷ ὑποτεινομένῳ ὑπὸ τὴς χορδῆς Ικ· αἱ δὲ ἄνισοι χορδαὶ ΠΑ, ΧΤ ὑποτείνȣσιν ἄνισα τόξα τὰ ΠΟΑ, ΤΨΧ· Α'λλὰ γὰρ ἐν δυσὶ κύκλοις διαφέρȣσιν ΟΠΨΑ, ΡΗΔ, χορδαὶ ἐξ ὑποθέσεως ἴσαι αἱ Ικ, ΗΔ, ὑποτενȣσι τόξα ἄνισα· φημὶ δὴ ὡς τὸ ΙΨκ τόξον μεῖζόν ἐςι τȣ ΗνΔ· ȣχ' ὅτι ἰσοδυναμεῖ γραμμῇ εὐθείᾳ μείζονι, ὡς φανήσεται ἐν τοῖς ἐφεξῆς, διὰ τὸ εἶναι καμπυλωτέραν, ἀλλ' ὅτι, καθὰ δεῖ ἐνταῦθα ἐκληφθῆναι, μεῖζόν ἐςι τȣτο μέρος τȣ ἐλάττονος κύκλȣ, ἢ ἔςι τὸ ΗνΔ τȣ μείζονος· τωόντι γὰρ ἐὰν τὸ ΙΨκ τὸ πέμπτον ᾖ φέρε τȣ ἐλάττονος κύκλȣ, τὸ ΗνΔ ἔλαττον ἔςαι ἢ πεμπτημόριον τȣ μείζονος (44).

48. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ε'ν τῷ ἡμικυκλίῳ τῷ ΖΨΚ τὸ μεῖζον τόξον ὑπὸ μείζονος χορδῆς ὑποτείνεται, τὸ δ' ἔλαττον ὑπ' ἐλάττονος, ϗ ἀντίςροφως· τὸ γὰρ τόξον ΙΨκ μεῖζόν ἐςι τȣ ΧΨΤ, ἡ δὲ χορδὴ Ικ μείζων τῆς ΧΤ.

49. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Ε'πεὶ ἄρα ἐν ἡμικυκλίῳ ἡ ἡ·

μιδιάμετρος τὸ μέγισον ὑποτείνει τόξον, ἔσαι ἄρα ἄυτη ἡ μεγίςη πασῶν τῶν χορδῶν.

50. ΠΟΡΙΣΜΑ ς΄. Ἐν ἡμικυκλίῳ ἄρα αἱ χορδαὶ ἀρχόμεναι ἀπὸ τόξȣ ἀπειροςȣ̃, ὃ καλέσαι δυνάμεθα ο ὡς πρὸς πεπερασμένον τι τόξον (Συμϐ. λογ. 530.). ϗ κατὰ μικρὸν αὔξȣσαι, τελευτῶσιν εἰς τόξον μοιρῶν 180, ἴσον τῷ ἡμίσει τῆς ὁλικῆς περιφερείας (37).

51. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Ἐν δυσίν ἄρα ἡμικυκλίοις ἴσοις τοῖς ΖΟΚ, ΖΨΚ, αἱ ἴσον ἀπέχȣσαι ἀπὸ τȣ̃ κέντρȣ χορδαὶ ΠΑ, Ικ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, ϗ αἱ ἴσαι ἴσον ἀπὸ τȣ̃ κέντρȣ ἀπέχȣσι (44).

52. ΠΟΡΙΣΜΑ Η΄. Ἐν κύκλῳ τῷ ΟΖΨΓ ἐὰν χορδὴ πρὸς χορδὴν παραϐληθῇ ὡς πρὸς τὰ μείζω, ὧν ἑκάςη ὑποτείνει, τόξα, ὅσῳ μεῖζόν ἐςι τὸ τόξον, τοσȣ́τῳ ἐλάσσων ἔσαι ἡ χορδή· ȣ̃τως ἡ ΧΤ χορδὴ τὸ μεῖζον ὑποτείνȣσα τόξον ΧΟΤ ἐλάττων ἔςι τῆς χορδῆς Ικ τῆς ἔλαττον ὑποτεινȣ́σης τόξον.

53. ΠΟΡΙΣΜΑ Θ΄. Ἐντεῦθεν ἄρα μετὰ τὸ παρελθεῖν τὰς 180°, εἰς ἃς τὰ τόξα αὔξονται, αἱ χορδαὶ φθίνȣσιν εἰ 360° (37).

54. ΣΧΟΛΙΟΝ. Συχνάκις συμϐαίνει αὐξȣ́σης τινὸς ποσότητος ϗ ἑτέραν συναύξειν, ȣ̉ μέντοι ἀναλόγως· ἐπιςάσεως ἄρα ἀτενȣ̃ς χρεία ἐπὶ τῶν τοιȣ́των ποσοτήτων· σαφὲς γὰρ φέρε, ὅτι ὅσῳ μείζων ἐςὶν ἀριθμός τις, τοσȣ́τῳ μειζων ὑπάρχει καὶ ὁ ἀπ αὐτȣ̃ τετράγωνος· ἀλλὰ γὰρ οὐκ εἰσὶ τετράγωνοι δύω ἀνάλογοι ταῖς αὐτῶν ῥίζαις. εἴγε τοῦ μὲν διπλασίȣ ὄντος, ἡ ἅτερος, ὁ ἀπὸ τȣ̃ πρώτȣ τετράγωνος, ὡς ἡ φύσις τῆς ἀναλογίας ἀπαιτεῖ, ȣ̉κ ἔσαι τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ δευτέρȣ τετραγώνȣ διπλάσιος, μᾶλλον μὲν ȣ̃ν τετραπλάσιος· ἐὰν δὲ ἕτερος ᾖ

ἑτέρε τριπλάσιος, ὁ ἀπὸ τε πρώτε τετράγωνος ἐννεαπλάσιος (Συμβ. λογ. 310) ἔςαι τε ἀπὸ τε δευτέρε, ἀλλ' ἐ τριπλάσιος· Ταυτὸν ἄρα παρατηρητέον κἀπί τε τῶν τόξων ϗ χορδῶν. συναύξεσι μὲν γὰρ αἱ χορδαὶ τοῖς τόξοις μέχρις 180°, τέτων τε αὐξομένων ἐκεῖναι φθίνεσιν εἰς τὰς 360°, ἥκιςα μέντοι κατ' ἀναλογίαν· ἐὰν γὰρ ἐν ἡμικυκλίῳ τόξον τι διπλάσιον ᾖ φέρε ἑτέρε (50), ἐ παρὰ τἔτο ϗ ἡ χορδὴ ἐκείνε διπλασία ἔσεται τῆς τέτε· Θῶμεν γὰρ (Σχ. 4.) δὴ τὸ τόξον ΠΟΑ διπλάσιον εἶναι τε τόξε ΠηΟ· ἔκεν παρὰ τἔτο ϗ ἡ ΠΑ χορδὴ διπλασία ἔσεται τῆς ΠΟ χορδῆς· διὰ γὰρ τὰ ἰσάλληλα τόξα ΟβΑ, ΠηΟ, ὥσπερ ἕκαςον ἥμισύ ἐςι τε ΠΟΑ τόξε, εἴπερ ἡ ΠΑ χορδὴ διπλασία ἦν τῆς ΠΟ, ἴσετ' ἂν ταῖς δυσὶ ΠΟ, ϗ ΟΑ, ἢ τῇ ὅλῃ γωνιώδει ΠΟΑ. ἀλλαμὴν τῆς τε ΠΑ εὐθείας ϗ τῆς ΠΟΑ γωνιώδες ἀπὸ τε αὐτοῦ π σημείε ἐπὶ τὸ αὐτὸ Α ἐπιζευγνυμένων, (17) ἡ εὐθεῖα τῆς γωνιώδες ἔςαι ἐλάττων· ἡ ἄρα ΠΑ χορδὴ καίτοι ὑποτείνεσα τόξον διπλάσιον τε ΠηΟ, ἐ μέντοι παρὰ τἔτο ἔςι διπλασία τῆς χορδῆς, ἢ ὑποτείνει τὸ ΠηΟ τόξον· ἐν γένει ἄρα ἐν ἡμικυκλίῳ τῶν χορδῶν τοῖς τόξοις συναυξεσῶν μὲν ἐς τὰς 180°, φθινεσῶν δὲ ἐν τῷ ἐκεῖνα αὔξειν ἐς τὰς 360°, ἐθ' ἡ αὔξησις τῇ αὐξήσει, ἐθ' ἡ μείωσις τῇ αὐξήσει ἀναλόγως γίνονται.

55. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι'. Ἐν κύκλῳ, ἢ ἐν δυσὶν ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι χορδαὶ ἴσον ἀπέχεσιν ἀπὸ τε κέντρε, ϗ ἀντιςρόφως.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΑ'. Τὸ γεννῶν σημεῖον Ζ (Σχ. 2) κατ' ἀνάγκην ἐν ἑκάςῳ διαβήματι παρεκτρέπεται τῆς προτε φορᾶς (25)· ἐκ διαδοχῆς ἄρα πάντα τὰ τῆς περιφερείας σημεῖα μεταβάλλεσι τὴν ἑαυτῶν φοράν.

56. ά. Ἄρα ἡ κυκλικὴ περιφέρεια ἐχ ἕξει τρία σημεῖα ἐπ' εὐθείας γραμμῆς· ἢ ταῦτα τὰ ἀλληλοδιάδοχα σημεῖα φορὰν ἐ μεταβαλῦσιν, ὅπερ ἄτοπον (ἀνωτ.).

57. β'. Χορδὴ ἡ ΑΠ (σχ. 3) ἐ δύναται τέμνειν τὸν κύκλον κατὰ σημεῖα πλείω, ἢ δύω τὰ Α, Π· ἄλλως γὰρ ἡ κυκλικὴ περιφέρεια ἕξει τρία σημεῖα κοινὰ τῇ ΑΠ εὐθείᾳ, δι' ὧν ὑποτεθήσεται τέμνειν τὸν κύκλον· ἀδύνατον δὲ τῦτο, ὡς ἤδη δέδεικται.

58. γ'. Εὐθεῖα ἡ ΑΠ (σχ. 5) ἐπὶ κύκλε περιφέρειαν προσπίπτεσα, αὐτὴν μέντοι μὴ τέμνεσα, καθ' ἓν μόνον σημεῖον τὸ Π αὐτῆς ἐφάψεται· εἰ γὰρ κατὰ δύω, προαχθεῖσα ἐπέκεινα τῦ Π, ἕως ἂν διελθῦσα ἐπ' εὐθείας μέρος τι κυκλικὸν, ἐπιψαύσῃ τῆς κυκλικῆς περιφερείας ἐκ νέε, ἅψεται κατὰ σημεῖα τρία αὐτῆς, ὅπερ ἤδη ἀδύνατον δέδεικται.

59. δ'. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εὐθεῖα ἡ ΞΡ κύκλον διαπερῶσα ἐ δύναται τεμεῖν αὐτὸν κατὰ πλείω ἢ δύω σημεῖα τὰ Ψ, τ.

60. έ. Κύκλος ὁ ΟΔΤ ἐ δύναται ἐπιψαύειν κύκλε τῦ ΔΖΨ κατὰ πλείω ἢ ἓν σημεῖον τὸ Δ.

61. ς'. Δύω κύκλοι ἔκκεντροι, ὧν ἀμέλει ἐκ ἔςι κέντρον κοινὸν, οἱ ΟΔΤ, ΟΤΠ κατὰ δύω μόνα τέμνονται σημεῖα τὰ Ο, Τ. Αὐτίκα γὰρ δῆλον, ὅτι τὸ τῦ ΔΖ κύκλε γεννητικὸν σημεῖον ἐπειδὰν κατὰ τὸ Δ συναντήσῃ τῷ τῦ ΟΔΤ κύκλε γεννητικῷ σημείῳ, εὐθὺς ἀλλήλων ἀποχωρήσεσι ϗ τὸ μὲν ἐνεχθήσεται πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Ζ, τὸ δὲ πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Τ.

62. ζ'. Δύω ἄρα κύκλοι τρία κοινὰ σημεῖα ἐχ' ἕξεσιν· εἰ γὰρ τῦτο, ἐν τρισὶ τμηθήσονται σημείοις, ὅπερ ἀδύνατον (61).

63. ή. Ἱκανὰ ἄρα τρία σημεῖα τὴν τῦ κύκλε θέ-

σιν ὁρίσαι· κατάδηλον δὲ ἐκ τέτε, ὅτι δύω κυκλικαὶ περιφέρειαι ἐν δυσὶ μόνον σημείοις διατέμνονται ὑπ' ἀλλήλων (61).

64. Δύω δὲ σημεῖα τὰ Ο, Τ ἐχ' ἱκανῶσιν ὁρίσαι τὴν τῶ κύκλω θέσιν, ὡς ὁρίζεσι τὴν τῆς εὐθείας· διὰ γὰρ δύω σημείων δύω διάφοροι κύκλοι οἱ ΟΔΤ, ΟΤΠ διϊέναι δύνανται.

65. Αἰτησόμεθα ἓν ἐν τοῖς ἐφεξῆς πρὸς κατασκευὴν, Παντὶ σημείῳ ὡς κέντρῳ, ϗ ἀκτῖνι τῇ τυχέσῃ, κύκλον γράφειν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ εὐθειῶν Καθέτων ϗ Πλαγίων.

66. Εὐθεῖα ἡ ηβ ἐφ' ἑτέραν τὴν κδ πίπτεσα (σχ. 6) ποιεῖ σὺν αὐτῇ δύω ἀνοίγματα, ἃ καλῶνται γωνίαι· τοιάδε εἰσὶ τὸ χωρίον β, ὃ ποιεῖ ἡ ηβ ϗ βδ, ϗ τὸ χωρίον χ, ὃ ποιεῖ ἡ αὐτὴ ηβ σὺν τῇ χκ.

67. Γωνία ἄρα ἐςι χωρίον ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ δυεῖν εὐθειῶν, ὧν ἁτέρα ἐπὶ τὴν ἑτέραν ἐφέςηκε· τὸ δὲ β σημεῖον, καθ' ὃ συνάπτονται αἱ δύω εὐθεῖαι, καλεῖται κορυφὴ τῆς γωνίας· αἱ δὲ εὐθεῖαι ηβ, βδ αἱ διειργόμεναι τῷ γωνιώδει χωρίῳ, πλευραὶ τῆς γωνίας· αἱ μὲν ὖν ηβ, βδ πλευραί εἰσι τῆς β γωνίας, αἱ δὲ ηβ, χκ τῆς χ.

68. Διτταχῶς σημαίνεται ἡ γωνία· ά. ἑνὶ μόνῳ γράμματι ἐπιχαρασσομένῳ τῇ τῆς γωνίας κορυφῇ, ἢ ἐντὸς αὐτῆς τῆς γωνίας· β΄. τρισὶ γράμμασιν, ὧν τὸ μὲν πρῶτον ϗ τρίτον ἐπιχαράσσεται τοῖς τῶν πλευρῶν πέρα-

σι, τὸ δὲ μέσον τῇ κορυφῇ τῆς γωνίας· οὕτω τὴν πρὸς τῷ β γωνίαν δυνάμεθα ἐκδηλοῦν λέγοντες: ἡ β γωνία, ἢ ϗ διὰ τῶν τριῶν γράμματων η, β, δ, τῷ μέντοι μέσῳ μάλιςα τὸν νοῦν προσέχοντες ὡς ἐκείνῳ ἀληθῶς τὴν γωνίαν ἐμφαίνοντι· ἀναγινώσκομεν δὲ οὕτως: ἡ ὑπὸ ηβδ γωνία, ἢ μόνον ἡ ηβδ γωνία.

69. Κάθετος ἢ πρὸς ὀρθὰς ἱςαμένη καλεῖται εὐθεῖα ἡ ηβ, ἣ πίπτουσα ἐφ' ἑτέρας εὐθείας τῆς κδ οὐ κλίνει μᾶλλον ἐπὶ θάτερα, ἢ ἐπὶ θάτερα, τάς τε ἐφεξῆς γωνίας χ ϗ β ἴσας ποιοῦσα, ϗ αὐταῖς παρασκευάζουσα καλεῖσθαι γωνίαις ὀρθαῖς.

70. Πλαγία δὲ εὐθεῖα καλεῖται ἡ ΠΔ (σχ. 7), ἡ ἐφ' ἑτέρας τῆς ΑΟ πίπτουσα κλίνει μᾶλλον ἐπὶ θάτερα, ἢ ἐπὶ θάτερα· αἱ δὲ ἐφεξῆς γωνίαι Δ ϗ Α, ἃς σὺν τῇ ἑτέρᾳ ποιεῖ ἡ πλαγία, εἰσὶν ἄνισοι· ἡ γὰρ πρὸς ἃ μᾶλλον ἡ πλαγία κλίνει γωνία ἐςι τῆς ἑτέρας ἐλάττων· τούτων δὲ ἡ μὲν ἐλάττων Δ καλεῖται Ὀξεῖα, ἡ δὲ μείζων Α, Ἀμβλεῖα.

71. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἡ πλαγία ἄρα ϗ οὕτως ὁρισθήσεται, ὡς ἐςιν ἀμέλει ἡ ἐφ' ἑτέρας γραμμῆς εὐθείας πίπτουσα, ϗ δύω ἀνίσους γωνίας συνιςῶσα.

72. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Τὸ αὐτὸ διάνοιγμα (σχ. 6), ὃ ἀφορίζει τὴν ἑτέραν τῆς ἑτέρας εὐθείας κοινόν ἐςι πάντως ἐμφοτέραις· οὐκοῦν ἐὰν εὐθεῖα ἡ κβ κάθετος ᾖ ἑτέρᾳ τῇ βδ, ϗ ἡ βδ ἔςαι ἀμοιβαδὸν κάθετος τῇ ηβ· ἢ, ὃ ταυτὸν, ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τῇ κβδ πίπτῃ ἡ ηβ, ἐξέςαι εἰπεῖν, ὅτι ϗ ἡ βδ πρὸς ὀρθὰς πίπτει τῇ ηβ προαχθείσῃ, ταυτὸν εἰπεῖν τῇ ηβΖ.

72. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἐὰν ἡ ΑΠ (σχ. 7)

πλαγία ἦ ἐπὶ τῆς ΑΟ, καὶ ἡ ΑΟ ἔσαι πλαγία ἐπὶ τῆς ΑΠ.

74. ΑΙΤΗΜΑ. Η' ΠΖ εὐθεῖα ἐπιτεθεῖσα τὸ κατ' ἀρχὰς τῇ ΠΟ (Σχ. 2) περιήχθω περὶ τὸ μένον σημεῖον Π ἡμικυκλικὴν περιαγωγὴν τὴν ΟΖΑβ· ἐκ ταύτης ἂν τῆς κινήσεως ἐκ τοῦ Ο ἕως τοῦ Α γεννηθήσονται πᾶσαι αἱ δυναταὶ ὀξεῖαι γωνίαι (*)· καὶ γὰρ μετὰ τὸ πρῶτον διάβημα, καθ' ὃ ἀποχωρίζεται τὸ Ζ σημεῖον τοῦ Ο, σχηματισθήσεται ἐκ τῆς κινηθείσης εὐθείας καὶ τῆς μενούσης ΠΟ γωνία ἀπειροςῶς ὀξεῖα· μεθ' ἕκασον δὲ τῶν ἐφεξῆς διαβημάτων ἡ ΠΖ μετὰ τῆς ΠΟ ἀεὶ ποιήσει καινὴν γωνίαν ὀξεῖαν μείζω τῆς πρὸ αὐτῆς· τέλος δὲ, πρὶν ἢ διανύσῃ τὴν αὐτῆς ὁδὸν ἡ ΠΖ, πρὶν ἢ τὸ ἑαυτῆς σημεῖον Ζ συμπέσῃ τῷ Α, ποιήσει μετὰ τῆς ΠΟ τὴν μεγίςην πασῶν ὀξεῖαν γωνίαν· ἐν δὲ τῷ διαβήματι, καθ' ὃ τὸ Ζ τῷ Α συναφθήσεται σημείῳ ἡ ὑπὸ ΑΠΟ γωνία τοῦ μὲν εἶναι ὀξεῖα παύσεται, γενήσεται δὲ ὀρθή· ὅ ἐςιν ἡ ὑπὸ ΑΠΟ συνισαμένη τηνικαῦτα ὑπὸ τῆς ΠΖ εὐθείας συμπιπτούσης τῇ ΠΑ ἰσωθήσεται τῇ βΠΑ γωνίᾳ (69).

Α'λλὰ γὰρ ἡ ΠΖ γραμμὴ ἐφικομένη ἐπὶ τῆς ΠΑ θέσεως ποιείτω ἔτι διάβημα ἓν πρὸς τὰ ἐπὶ β· οὐκοῦν ἡ νέα γωνία, ἣν ποιήσει μετὰ τῆς ΠΟ ἔσαι μείζων τῆς ὀρθῆς ΑΠΟ γωνίας, εἴτ' οὖν ποιήσει γωνίαν ἀπειροςῶς ἀμβλεῖαν, εἰ δεῖ οὕτω φάναι, εἴτ' οὖν γωνίαν ἀμβλεῖαν πασῶν τῶν ἀμβλειῶν ἐλαχίςην.

75. Η' ΠΖ οὕτω συνεχίζουσα τὴν ἑαυτῆς ὁδὸν ἐς ὃ

(*) Εὐθεῖα ἡ ΠΖ εὐθείᾳ ἑτέρᾳ ἐφισαμένη τῇ βΠΟ δύο μὲν γωνίας ποιεῖ· ἡμῖν δ' ἐνταῦθα μία μόνη ἐξετάζεται, εἴτ' οὖν ἡ ἐντοῖς δεξιοῖς κειμένη ὑπὸ ΖΠΟ.

συμπέσῃ τῇ Πβ παράξει ἐκ διαδοχῆς πάσας τὰς δυνατὰς ἀμβλείας γωνίας· ἐν ᾧ δὲ ἑνὸς μόνȣ διαβήματος δεῖ πρὸς τὸ τὴν ΠΖ συμπεσεῖν τῇ Πβ, ἐν τȣ́τῳ δὲ μετὰ τῆς ΠΟ εὐθείας ποιήσει ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἥτις ἐςὶ πασῶν μεγίςη τῶν ἀμβλειῶν.

76. Συμπεσȣ́σης δὲ ἤδη ἐν τῷ ἐχάτῳ τῷδε διαβήματι τῇ Πβ, ϗ ἓν γενόμεναι ἄμφω, ȣ̓δεμίαν τȣ̃ λοιπȣ̃ ποιήσȣσι γωνίαν.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Δῆλον ἄρα ἐντεῦθεν, ὡς ὅταν ποσότης, ὅσον ἂν ἐξῇ, αὐξηθῇ, ϗ ἐπὶ τὸ καλȣ́μενον Μέγιςον ἵκηται, ἐὰν τῷ τυχόντι ἔτι προσαυξηθῇ, ὑφ' ἑαυτῆς ἀφανίζεται· ἐὰν γὰρ τῇ μεγίςῃ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ προσεπιτεθῇ ἓν ἔτι διάβημα ϗ ἀπείρως μικρὸν, ἡ ἀμβλεῖα γωνία ἐπὶ τὸ μηδὲν τρέπεται· τοὐτ' ἔςιν ἡ πᾶσα γωνία ȣ̈τως ἐξȣδενȣ̃ται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ μέτρȣ τῶν γωνιῶν.

77. Εὔδηλον ἅπαντι ὡς ἡ ὑπὸ ΖΠΟ γωνία (σχ. 2) ἡ ὑπὸ τῶν ΠΖ, ΠΟ εὐθειῶν περιεχομένη, ἐςὶν ὁ ἀριθμὸς τῶν διαβημάτων, ὧν διήνυσεν ἡ ΠΖ ἵν' ἐκ τȣ̃ Ο ἐπὶ τὸ Ζ ἐφίκοιτο· ὃ δὲ δύναται ἀδιαφόρως ἐκτεθῆναι, εἴτε διὰ τȣ̃ ΖΟ τόξȣ, εἴτε διὰ τȣ̃ ΔΗ, εἴτε διὰ τȣ̃ ΙΓ κτ. δέδεικται γὰρ πρὸ μικρȣ̃, ὅτι ὅσα σημεῖα περιέχει τὸ ΟΖ, τοσαῦτα ϗ τὸ ΔΗ, ϗ τὸ ΙΓ, κτ., ϗ δὴ ὅτι ὁ τῶνδε τῶν σημείων ἀριθμὸς παρίςησι τὰ διαβήματα, ἃ διήνυσεν ἡ ΠΖ ἐκ τȣ̃ Ο ἕως τȣ̃ Ζ (38)· ἐντεῦθεν ἄρα.

78. α. Μέτρον γωνίας τῆς ν ἐςὶ τόξον τὸ ΖΟ, ἢ

μέρος ΖΟ τῦ ΖΟκ κύκλυ τῦ γεγραμμένυ περὶ τὴν ν κορυφὴν ταύτης τῆς γωνίας ὡς περὶ κέντρον, ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς ΠΖ, ΠΟ.

79. β΄. Ἡ γωνίας τῆς ν δύναμις ὐδ᾽ ἐκ τῦ μήκυς τῶν πλευρῶν αὐτῆς, ὐδ᾽ ἐκ τῦ μεγέθυς τῦ περὶ αὐτὴν γεγραμμένυ κύκλυ ἤρτηται· εἴδομεν γὰρ ὡς γωνία ἡ ν ἐπίσης ἔχοι μετρηθῆναι τῷτε τόξῳ ΖΟ τῷ ἀπολαμβανομένῳ ὑπὸ τῶν ΠΖ, ΠΟ πλευρῶν, καὶ τῷ τόξῳ ΔΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΠΔ, ΠΗ, αἵ ἐλάττυς τε εἰσι τῶν ΠΖ, ΠΟ, καὶ κύκλῳ ἐλάσσονι τῦ ΖΟκ ἐπανήκυσι (77).

80. γ΄. Εἰς καταμέτρησιν ὖν γωνίας ἁπάσης τῆς ν ἀποχρήσει ἔχειν ἡμικυκλιόντι, μεῖζον ἢ ἔλαττον, διῃρημένον μέντοι εἰς τὰς ἑαυτῦ 180 μοίρας· τιθεμένυ γὰρ τῦ μὲν κατ᾽ αὐτὸ κέντρυ ἐπὶ τῆς Π κορυφῆς τῆς γωνίας, τῶν δὲ πλευρῶν ΠΖ, ΠΟ μειώσει ἢ προαγωγῇ πρὸς τῇ περιφερείᾳ τῦ ἡμικυκλίυ ἐπερειωθεισῶν, αὐτίκα δὴ θηρευθήσεται ἡ δύναμις τῆς γωνίας· εἰ μὲν γὰρ φέρε αἱ ΠΖ, ΠΟ πλευραὶ περιέχυσι τόξον 50°, ἡ γωνία ἔσεται μοιρῶν 50.

Τῦτὶ δὲ τὸ ὕτω διῃρημένον ἡμικύκλιον Ἀ ν α γ ω γ ε ὺ ς λέγεται, ἢ Γ ρ α φ ό μ ε τ ρ ο ν.

Ἀναγωγεὺς ἐστὶν ἡμικύκλιον, οἷον τὸ ΖΑΗΚ (σχ. 8) ἐσκαμμένον τὰ ἐντὸς πρὸς τὸ δύνασθαι τὸν Γεωτέτρην ὁρᾶν ἐν τοῖς κενοῖς τὴν τῶν πλευρῶν τῆς εἰς καταμέτρησιν προκειμένης γωνίας διεύθυνσιν.

81. Τὸ δὲ Γραφόμετρον (σχ. 9) τὸ αὐτὸ τἆλλα ὂν τῷ Ἀναγωγεῖ ἔχει καὶ κανόνα τὸν ΟΓκ προσηρμοσμένον μὲν τῷ Κ κέντρῳ, κινητὸν μέντοι περὶ τὸ κέντρον, ὃς ἀκύει Γ ω ν ι ό μ ε τ ρ ο ν· πρὸς ὀρθὰς δὲ αὐτῷ ἐπὶ τῶν περάτων ἐστήκασι δύω κιωνίδια χάλυβος, ἢ ἑτέρας ὕλης,

τὰ κχ, πν· εἰσὶ δὲ τετρημένα δι᾽ ὅλȣ πρὸς τὸ διευθύνεσθαι αὐτόθεν τὸν ὀφθαλμόν· καλȣ͂νται δὲ Διόπραι.

82. Ἴδȣ δὴ νῦν αἱ ἀρχοειδέςεραι χρήσεις ἑκατέρȣ τῶνδε τῶν ὀργάνων· χρῶνται δ᾽ ἀεὶ ἐπὶ μὲν χάρτȣ τῷ Ἀναγωγεῖ, ἐπεὶ δὲ τῆς γῆς τῷ Γραφομέτρῳ.

83. Ἐπὶ μὲν ȣ͂ν χάρτȣ, τιθεμένȣ τȣ͂ κατὰ τὸν Ἀναγωγέα κέντρȣ ἐπὶ τῆς κατὰ τὴν γωνίαν κορυφῆς, ὁρῶμεν πόσας μοίρας περιέχȣσιν ἐπὶ τȣ͂ Ἀναγωγέως αἱ τῆς γωνίας πλευραὶ, ὡς ϗ ἤδη εἴρηται (80).

84. Ἵνα δὲ τὴν ἐπιταχθεῖσαν γωνίαν ἐν χάρτῃ γράψωμεν (σχ. 7), τὴν 25° φέρε· α΄. ἤχθω εὐθεῖα ἡ ΑΟ· β΄. τὸ τȣ͂ Ἀναγωγέως κέντρον τεθείσθω ἐπὶ τȣ͂ Α πέρατος ταύτης τῆς εὐθείας, ϗ σημειωθήτω τὸ Ο σημεῖον τῆς περιφερείας τȣ͂ Ἀναγωγέως, ἔνθα ἐπαριθμȣ͂νται 25°· σημειωθήτω δὲ αὐτῷ ἀντίςοιχον ἐπὶ τȣ͂ χάρτȣ τὸ Π, ἐξ ȣ͂ ἐπὶ τὸ Α ἤχθω ἡ ΑΠ εὐθεῖα· εὔδηλον ȣ͂ν ὡς ἡ ΑΠ σὺν τῇ προτȣ͂ ΑΟ περιέξȣσι γωνίαν τὴν ὑπὸ ΠΑΟ μετρȣμένην ὑπὸ τόξȣ 25°.

85. Ἐὰν δὲ ζητῆται γωνίαν συςῆσαι (σχ. 10) ἴσην τῇ δοθείσῃ ΑΠΖ, ληφθείσης διὰ τȣ͂ Ἀναγωγέως τῆς κατὰ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν δυνάμεως, μοιρῶν φέρ᾽ εἰπεῖν ȣ͂σης 40, συςήσομεν ἑτέραν μοιρῶν 40 κατὰ τὸν ἄρτι εἰρημένον τρόπον.

Ἐξέςαι δὲ γωνίαν συςήσασθαι καινὴν τὴν ΓΘΧ ἴσην τῇ δοθείσῃ ΑΠΖ ϗ κατὰ τόνδε τὸν τρόπον.

86. α΄. Ἤχθω γὰρ διὰ τȣ͂ κανόνος εὐθεῖα ἡ ΓΘ β΄. κέντρῳ μὲν τῷ Θ ἀκτῖνι δὲ τῇ ΘΓ γεγράφθω ἀόριςον τόξον τὸ ΕΟΔ (65)· γ΄. κέντρῳ μὲν τῇ Π κορυφῇ τῆς δοθείσης ὑπὸ ΑΠΖ γωνίας, διαςήματι δὲ τῷ αὐτῷ, ᾧ ϗ πρὶν, γεγράφθω τὸ ΗΙ τόξον· δ΄. εἰλήφθω τῷ διαβή-

τῇ τὸ μῆκος τῦ ΗΙ τόξυ, ϗ μεταβιβασθήτω ἐκ τῦ Ε ἐπὶ τῦ ἀορίςυ τόξυ ΕΟΔ, ϗ σεσημειώσθω τὸ Ο σημεῖον, ἐφ᾽ ὗ ἵςαται τὸ σκέλος τῦ διαβήτυ· έ. ἐπεζεύχθω ἡ ΘΟΧ, ἥτις σὺν τῇ ΓΘ εὐθείᾳ ποιήσει γωνίαν τὴν ὑπὸ ΓΘΧ ἴσην τῇ ὑπὸ ΑΠΖ.

Ἐκ γὰρ τῆς τῦ σχήματος κατασκευῆς τὰ τόξα ΗΙ, ΕΟ εἰσὶν ἰσάλληλα· ἐπεὶ ὗν μέρη εἰσὶν ἴσα δυοῖν ἰσαλλήλων κύκλων γεγραμμένων περὶ τὰς κορυφὰς τῶν Π, Θ γωνιῶν· ϗ αἱ γωνίαι ἄρα ΑΠΖ, ΓΘΧ, ἃς αὐτὰ μετρῦσιν, εἰσὶν ἰσάλληλοι (78).

87. Εἰς καταμέτρησιν δὲ γωνίας τῆς ὑπὸ ΑΠΖ (σχ. 10) ἐπὶ τῆς γῆς γεγραμμένης, πρᾶξις δὴ αὕτη χρησιμωτάτη τῶν τῆς Γεωμετρίας, ϗ συχνάκις ἐπαναλαμβανομένη, χρηςέον τῷ Γραφομέτρῳ· ά. κειμένυ τῦ κατὰ τὸ Γραφόμετρον ποδὸς ἐπὶ τῆς Π κορυφῆς τῆς εἰς καταμέτρησιν προκειμένης γωνίας, τιθέσθω τὸ ἐπίπεδον αὐτῦ ὅσον ὖ παραλλήλως τῷ τῆς καταμετρηθησομένης γωνίας ἐπιπέδῳ· β΄. διευθυνέσθω ὕτω τὸ Γωνιόμετρον, ὡς εἶναι ὁρᾷν διὰ τῶν διοπτρῶν ἀντικείμενόν τι ἐπὶ τῆς ΠΑ γραμμῆς, οἰκοδόμημά τι φέρε κείμενον ἐπὶ τῦ Α, ϗ σημειὔσθω ἐπὶ τῆς περιφερείας τῦ Γραφομέτρυ τὸ σημεῖον, ἢ ὁ Η ἀριθμὸς, ᾧ ἀντιςοιχεῖ τὸ Γωνιόμετρον· γ΄. περιςρεφέσθω πρὸς τὸ Ζ τὸ Γωνιόμετρον, ἕς τ᾽ ἂν ἴδῃ ὁ θεατὴς ὁρατόντι κείμενον ἐπὶ τῆς ΠΖ γραμμῆς, ἄνθρωπον φέρε ἱςάμενον ἐν τῷ Ζ· δ΄. ζητείσθω ἐπὶ τῦ Γραφομέτρυ πόσας μοίρας διῆλθε τὸ Γωνιόμετρον ἐν τῇ περιφερείᾳ ἵν᾽ ἡ διεύθυνσις ΠΑ εὑρεθείη ἐπὶ τῆς διευθύνσεως ΠΖ· ὗτος ὗν ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν, ἢ ἡ δύναμις τῦ ΗΙ τόξυ τῦ ἐν τῷ Γραφομέτρῳ ὑπὸ δυεῖν διευθύνσεων ΠΑ, ΠΖ τῦ Γωνιομέτρυ περιεχομένυ, ἐμφανεῖ ὄντως ἐν μοίραις

δύναμιν τῆς ὑπὸ ΑΠΖ κατὰ γῆν προκειμένης εἰς καταμέτρησιν γωνίας, ὅπερ ἐκ τῶν ἄρτι εἰρημένων κατάδηλον.

88. Ἵνα δὲ συςαθῇ κατὰ γῆς ἐν τῷ Π γωνία ἴση τῇ δοθείσῃ, φέρ' εἰπεῖν 40°, τιθέσθω τὸ γραφόμετρον ἐπὶ τȣ͂ σημείȣ Π, ϗ προσπηγνύσθω πάσσαλος κατὰ τὴν φορὰν ΠΑ, ἣν ἠνέχθη τὸ Γωνιόμετρον· ἐκ τȣ́τȣ δὲ περιςρεφέσθω ἡ διόπτρα πρὸς τὸ Ζ φέρε μέχρις ἂν διέλθῃ μοίρας τȣ͂ Γραφομέτρȣ 40· ἑξῆς δὲ προσπηγνύσθω πάσσαλος κατὰ τὴν ΠΙΖ φορὰν, ἐφ' ἧς ὁρίζονται αἱ 40 μοῖραι, φέρ' εἰπεῖν ἐπὶ τȣ͂ Ι. Τέλος δὲ αἱ ἐκ τȣ͂ Π ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι, ἡ μὲν πρὸς τὸν Α πάσσαλον, ἡ δὲ πρὸς τὸν Ζ, περιέξȣσι τὴν ζητȣμένην 40° γωνίαν· μετρηθήσεται γὰρ αὕτη ὑπὸ τȣ͂ κατὰ τὸ Γραφόμετρον τόξȣ ΗΙ, ὅ ἐςι μοιρῶν 40.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Παντοίων γωνιῶν ἐκτίμησις.

89. Ἡνίκ' ἂν εὐθεῖα ἡ ΚΖ (σχ. 11) ἐφ' ἑτέρας τῆς βΚΟ ςαθῇ, τὸ ἄθροισμα τῶν δυεῖν γωνιῶν ΖΚΟ, ΖΚβ, τῶν ἐπ' αὐτῆς γινομένων, ἀεὶ καταμετρεῖται διὰ ἡμικυκλίȣ, εἴτ' ȣ͂ν μοιρῶν 180· εἴγε ἡ μὲν ὀξεῖα γωνία ΖΚΟ μετρεῖται ὑπὸ τȣ͂ τόξȣ ΖΟ, ἡ δ' ἀμβλεῖα ΖΚβ ὑπὸ τȣ͂ ΖΑβ· ἔςι δὲ ΖΟ + ΖΚβ = ΟΖΑβ = 180°.

90. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Πᾶσαι ἄρα αἱ γωνίαι, αἱ ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἐκ πολλῶν ἐφ' ἑνὸς αὐτῆς σημείȣ συνιȣσῶν εὐθειῶν συνιςάμεναι, ἀεὶ ἔσονται 180°· εἴγε αἱ γωνίαι ΖΚΟ + ΖΚΑ + ΑΚβ καταμετρȣ͂νται ἀκριβῶς ὑπὸ τȣ͂ ἡμικυκλίȣ βΑΟ.

91. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Τῆς ΑΠ (σχ. 2) πρὸς ὀρθὰς ἱςαμένης τῇ Πβ, ἡ ὑπὸ ΑΠβ γωνία ἔςαι ὀρθὴ (69) καὶ ἴση τῇ ὑπὸ ΑΠΟ· ἐπεὶ δὲ τῶν δυεῖν ὀμοῦ μέτρον ἐςὶ τὸ βΑΟ ἡμικύκλιον, μιᾶς ὀρθῆς τῆς βΠΑ ἔςαι μέτρον τὸ βΑ τεταρτημόριον· ἀλλὰ πᾶς ὁ κύκλος διήρηται εἰς 360°· ἄρα τὸ Αβ κυκλικὸν τεταρτημόριον ἔςαι μοιρῶν 90· ἐξέςαι ἄρα ὁρίσαι τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ὅτι ἔςιν ἡ ὑπὸ τόξȣ 90° μετρȣμένη· ȣ̓κȣ̃ν διάφορα εἴδη γωνίας ὀρθῆς ȣ̓κ εἰσὶν, ἀλλ' εἰσὶν ἅπασαι ἰσάλληλοι.

92. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Τὸ ὀξείας γωνίας τῆς ΖΠΟ μέτρον ἔςι τόξον ἔλαττον τȣ̃ κυκλικȣ̃ τεταρτημορίȣ· ὁρισθῆναι ἄρα δύναται ἡ ὀξεῖα γωνία, ὡς ἔςιν ἡ καταμετρȣμένη τόξῳ ἐλάττονι ἢ 90°· ȣ̓κȣ̃ν αὔξεσθαι δύναται ἡ ὀξεῖα ἀπὸ ἀπειροςῆς ἐς τὴν παραλήγȣσαν τῶν 90°· ἄπειρα ἄρα τὰ τῆς ὀξείας γωνίας εἴδη.

93. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Τὸ δὲ τῆς ἀμβλείας γωνίας ΖΠβ μέτρον ἔςι τόξον τὸ βΑΖ μεῖζον, ἢ τὸ κυκλικὸν τεταρτημόριον Αβ, καὶ δὴ μεῖζον τῶν 90°· ἐξέςαι ἄρα καὶ περὶ αὐτῆς εἰπεῖν, ὡς ἀμβλεῖα γωνία ἔςιν ἡ ὑπὸ τόξȣ μείζονι ἢ 90° μετρȣμένη· αὔξεσθαι ἄρα δύναται ἡ ἀμβλεῖα ἀπὸ 90° μέχρι τȣ̃ παραλήγοντος τῶ 180°· δύνανται ἄρα ὑπάρχειν καὶ ταύτης εἴδη ἀπειράριθμα.

94. Εἴρηται δὲ αὔξεσθαι μέχρι τȣ̃ παραλήγοντος λεπτȣ̃ τῶν 180°· ἡ γὰρ ΠΖ εὐθεῖα μετὰ τῆς βΠΟ γωνίαν μοιρῶν 180 συςήσασθαι ȣ̓ δύναται· εἰ γὰρ συμπέσῃ τῇ βΠΟ, ἓν ἔσεται αὐτῇ, καὶ ὡς μία εὐθεῖα γραμμὴ λογισθήσεται, μηδεμίαν περιέχȣσα γωνίαν· ἕπεται δὲ τȣ̃το ἐκ τȣ̃ ἄρτι εἰρημένȣ (76).

95. Ὅταν δύω εὐθεῖαι βΚΟ, κΚΖ (σχ. 12) ὑπ' ἀλλήλων τέμνωνται, τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπ' αὐτῶν συνιςα-

μένων γωνιῶν α, η, Γ, χ μετρεῖται ὑφ' ὅλης τῆς κυκλικῆς περιφερείας ΟΖβκΥ, ὃ καθ' ἑαυτὸ δῆλον. Τὸ ἄρα ἄθροισμα τεσσάρων ὡντινωνδήποτε γωνιῶν, αἱ συνίςανται ὑπὸ δύω εὐθειῶν ἀλλήλαις διατεμνομένων, ἐςὶν ἴσον μοίραις 360.

96. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ ἄρα ἄθροισμα ἀπειραρίθμων γωνιῶν (σχ. 2) περὶ ἓν σημεῖον συνιςαμένων ὑφ' ὅσων ἄντις βέληται εὐθειῶν τῶν ΑΠ, βΠ, κΠ, ΟΠ, ΖΠ ἔςαι ἀεὶ ἴσον 360°· πᾶσαι γὰρ ἅμα ὑφ' ὅλης τῆς κυκλικῆς καταμετρᾶνται περιφερείας.

97. Ἐὰν ἄρα πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι ἴσον ἀλλήλων ἀπέχωσιν, ἑκάςη γωνία ἴση ἔςαι τῷ 360 διαιρεθέντι διὰ τᾶ τῶν γωνιῶν ἁπασῶν ἀριθμᾶ.

Δυεῖν εὐθειῶν ὑπ' ἀλλήλων διατεμνομένων (σχ. 12), αἱ ἐπὶ τῆς αὐτῆς κείμεναι εὐθείας γωνίαι καλᾶνται γωνίαι ἐφεξῆς· ἕτως αἱ α, η, ἢ αἱ Κ, χ εἰσὶν ἐφεξῆς γωνίαι ἐπὶ τῆς κΖ· αἱ δὲ α, χ ἢ η, Κ εἰσὶν ἐφεξῆς ἐπὶ τῆς βΟ γραμμῆς· λέγονται δὲ γωνίαι κατὰ κορυφὴν αἱ διακρινόμεναι ὑπὸ τῆς τῶν εὐθειῶν διατομῆς· ἕτως αἱ α, Κ γωνίαι εἰσὶ κατὰ κορυφὴν, ὡσαύτως καὶ αἱ η, χ.

Ἐπὶ τέτων ἂν τῶν γωνιῶν ῥᾷςα δειχθήσεται τάδε.

98. α΄. Τὸ ἄθροισμα δύω ἐφεξῆς γωνιῶν ἴσον ἐςὶ μοίραις 180· καὶ γὰρ α + η μετρᾶνται τῷ ἡμικυκλίῳ κβΖ· αἱ δὲ η + Γ, τῷ ἡμικυκλίῳ βκΟ καὶ ἕτως ἑξῆς.

99. β΄. Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· καὶ γὰρ τὸ ἡμικύκλιον βΖΟ = ΖΟκ· ἄρα βΖΟ — ΖΟ = ΖΟκ — ΖΟ· ἄρα βτΖ = κΥΟ· ἄρα καὶ α = Κ. Ὡσαύτως δειχθήσεται ὅτι καὶ ἡ γωνία η ἴση ἐςὶ τῇ χ.

100. γ΄. Μιᾶς ἄρα γνωσθείσης τῶν τεσσάρων γω-

νιῶν, τῶν συνισαμένων ὑπὸ δύω ἀλλήλαις διατεμνομένων εὐθειῶν, ϗ αἱ ἄλλαι τρεῖς γνωσθήσονται· ἔσω γὰρ ἡ α = 150°· ϗ ἡ κατὰ κορυφὴν ἄρα αὐτῇ Γ = 150°· εἰσὶ δὲ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι α, η ὁμȣ̃ ἴσαι μοίραις 180· ἀλλ' α = 150°· ἄρα η = 30°· ἄρα ϗ χ = 30°.

101. δ'. Μιᾶς ἄρα τȣ́των τῆς χ ὀρθῆς ȣ̓́σης (92, 6), ϗ ἑκάςη τῶν ἄλλων τριῶν ὀρθὴ ἔσεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ τῆς Καθέτȣ.

102. Τῆς ηβ εὐθείας καθέτȣ τῇ κδ ἐφεςώσης, ἐὰν ληφθῶσι δύω σημεῖα τὰ κ, Ι ἰσοδιεςῶτα τȣ̃ σημείȣ β, ὅ ἐςι κοινὸν τῆς τε βη, ϗ τῆς κδ, ὡς εἶναι βκ = βΙ, φημὶ δὴ, ὡς ϗ ἅπαν ἄλλο σημεῖον τῆς βη καθέτȣ ἴσον ἀπέχει τῶν δύω σημείων κ, Ι τῆς κδ εὐθείας· ἴσον φέρȣ ἀπέχει τὸ η τῶν κ, Ι, ϗ ἔςιν ηκ = ηΙ· εἰ μὴ γάρ· ἔσω ἐγγύτερον τῷ κ, ἢ τῷ Ι· ϗ ἐπεὶ, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ β σημεῖον ταύτης τῆς καθέτȣ ἴσον ἀπέχει τȣ̃ τε κ ϗ τȣ̃ Ι· ἀναγκαίως ἡ κάθετος βη μᾶλλον ῥέψει πρὸς τὰ ἐπὶ κ, ἢ πρὸς τὰ ἐπὶ Ι· ȣ̓κ ἔςιν ἄρα κάθετος, ὅπερ ἄτοπον· ὡσαύτως δὲ ϗ ἅπαν σημεῖον τῆς καθέτȣ ἴσον ἀπέχει τῶν δύω τȣ́των σημείων· εἴτ' ȣ̓̃ν ἔςιν Οκ = ΟΙ ϗ ἑξῆς ὁμοίως.

103. Ἐὰν κάθετος ἡ ηβ προαχθῇ ἐπὶ τὸ Ζ, ἡ αὐτὴ ἀεὶ ἐκληφθήσεται εὐθεῖα (19)· ϗ τοίνυν δύω σημεῖα ἱκανά εἰσιν ὁρίσασθαι τὴν θέσιν τῆς εὐθείας (20)· ἐπεὶ ȣ̓̃ν δύω σημεῖα β, η τῆς καθέτȣ ηβΖ ἴσον ἀπέχȣσιν ἕκαςον

τῶν δύω σημείων κ, Ι τῆς εὐθείας κδ, ἅπαν ἄρα τῶν ἄλλων ταύτης τῆς καθέτȣ σημείων, εἴτ' ȣ̂ν ϗ τῶν πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Ζ, ϗ αὐτὸ δὴ τὸ Ζ, ἴσον ἀπέχει τῶν κ, Ι, ϗ δὴ ἐςι Ζκ = ΖΙ. Τȣ̓ναντίον δὲ, ἐὰν δύω σημεῖα εὐθείας ἴσον ἀπέχωσιν ἕκαςον δύω σημείων ἑτέρας εὐθείας, ἐκείνη ταύτῃ πρὸς ὀρθὰς ἐφέςηκεν· ἐὰν γὰρ τῆς ηβ εὐθείας τὸ β σημεῖον ἴσον ἀπέχῃ τȣ̂ κ ϗ Ι, ἕτερόν τι σημεῖον τὸ η τῆς αὐτῆς εὐθείας ȣ̓ μὴ δυνήσεται ἴσον ἀπέχειν τῶν κ, Ι, εἰ μὴ, ἐὰν ἡ βη εὐθεῖα μὴ μᾶλλον ῥέπῃ ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ η, ἢ ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ Ι, ἢ ϗ τȣ̓μπαλιν· ἄρα ἡ βη κάθετος ἔςαι τῇ κδ (69), ἔχȣσα δύω σημεῖα ἴσον ἕκαςον ἀπέχοντα δύω σημείων τῆς εὐθείας κδ.

104. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἀφ' ἑνὸς ἄρα σημείȣ τȣ̂ Α (σχ. 13) ὃ ȣ̓κ ἔςιν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΟ, δοθέντος, κάθετον αὐτῇ ςησόμεθα κατὰ τάδε. α΄. κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαςήματι δὲ τῷ τυχόντι (65), σημειωθήτωσαν δύω σημεῖα τὰ Ζ, Ο ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΟ· β΄. κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαςήματι δὲ βραχύτι ἐλάσσονι τȣ̂ ΑΖ, γεγράφθω τόξον κυκλικὸν ἀόριςον τὸ ΠΔ· γ΄. κέντρῳ μὲν θατέρῳ τῶν σημείων Ο, διαςήματι δὲ τῷ αὐτῷ, γεγράφθω ἕτερον τόξον ἀόριςον τὸ ΓΘ· δ΄. ἤχθω διὰ τῶν σημείων Α ϗ κ, καθ' ὃ τέμνȣσιν ἄλληλα τὰ δύω τόξα, ἡ εὐθεῖα ΑκΕ, ἥτις ἔςαι ἡ ἐπιταχθεῖσα κάθετος, ὡς φανήσεται.

Ἐκ γὰρ τῆς κατασκευῆς τό,τε Α σημεῖον αὐτῆς ἴσον ἀπέχει δυοῖν σημείοιν Ζ, Ο τῆς εὐθείας ΖΟ· ϗ τὸ κ δὲ τῆς αὐτῆς ΖΟ ἀπέχει ἴσον τῶν αὐτῶν σημείων Ζ, Ο· εἰσὶ γὰρ ἀκτῖνες ἴσων κύκλων αἱ Ζκ, Οκ· ἐπεὶ ȣ̂ν τῇ ΑκΕ εὐθείᾳ ἔςι σημεῖα δύω, ἕκαςον ἴσως ἀφιςάμενον δυοῖν σημείων Ζ, Ο τῆς ΖΟ εὐθείας· ἡ ἄρα ΑκΕ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΖΟ ἐφέςηκε (103).

105. Τὐναντίον δὲ ἵν᾽ ἐκ τοῦ σημείου Ε εὐθείας δεδομένης τῆς ΖΟΕ κάθετος ἐγερθῇ· α΄. κέντρῳ μὲν τῷ Ε, διαστήματι δὲ τῷ τυχόντι, σεσημειώσθων δύω σημεῖα Ζ, Ο· β΄. κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ μικρῷ μείζονι ἢ τὸ ΕΖ, γεγράφθω τόξον κύκλου τὸ ΠΔ· γ΄. κέντρῳ μὲν τῷ Ο, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ, γεγράφθω τόξον τὸ ΓΘ· δ΄. ἀπὸ τοῦ σημείου κ, καθ᾽ ὃ διατέμνουσιν ἄλληλα τὰ τόξα, ἐπὶ τὸ δοθὲν σημεῖον Ε ἐπεζεύχθω ἡ κΕ, ἥτις ἔσαι κάθετος τῇ ΖΟ ἐπὶ τοῦ Ε σημείου· ἐκ γὰρ τῆς κατασκευῆς τοῦ σχήματος τό,τε σημεῖον αὐτῆς Ε ἴσον ἀπέχει δυοῖν σημείων τῶν Ζ, Ο, καὶ τὸ κ τῶν αὐτῶν ἴσον ἀφίσαται (103).

106. Τῇ αὐτῇ (σχ. 14) μικροῦ δεῖν χρησάμενοι κατασκευῇ δίχα τεμοῦμεν εὐθεῖαν δοθεῖσαν τὴν Δβ· κέντρῳ μὲν γὰρ τῷ Δ πέρατι τῆς δοθείσης εὐθείας, διαστήματι δὲ μείζονι, ἢ τῷ ἡμίσει αὐτῆς, γεγράφθω κύκλου τόξον ἀόρισον τὸ πΕΧ· κέντρῳ δ᾽ αὖ θατέρῳ πέρατι τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ, γεγράφθω τόξον τὸ κΚΓ· εὐθεῖα οὖν ἡ ἀπὸ τοῦ Ο ἐπὶ τὸ Η, καθ᾽ ἃ διατέμνονται ὑπ᾽ ἀλλήλων τὰ τόξα, ἀχθεῖσα, τεμεῖ δίχα τὴν Δβ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Ζ.

Τὸ γὰρ τοῦ Ο ἀπὸ τοῦ Δ καὶ ἀπὸ τοῦ β ἀπόστημα ἐστι τὸ αὐτὸ, ὡς ὂν τὸ διάστημα, δι᾽ οὗ ἐγράφησαν τὰ κυκλικὰ τόξα· διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ Η ἴσον ἀπέχει τοῦ τε Δ, καὶ τοῦ β· οὐκοῦν εὐθείας τῆς ΟΖΗ δυοῖν σημείοιν τοῖν Δ, Η ἴσον ἀπεχόντοιν ἀπὸ δύω σημείων τῶν Δ, Β, καὶ τὸ Ζ αὐτῆς σημεῖον ἴσον ἀπέχει τῶν Δ, β (102, 103)· ἄρα τὸ Ζ ἐσι τὸ μέσον σημεῖον τῆς Δβ εὐθείας· ἄρα οὕτως ἡ Δβ δίχα τέτμηται.

107. Ἀλλὰ γὰρ ἵνα τὰ αὐτὰ κἀπὶ τῆς γῆς ἐργασώμεθα, μετιτέον τὰ ἑξῆς.

108. Ἵν' ἀπὸ σημείου δοθέντος τοῦ Α κάθετος ἀχθῇ τῇ εὐθείᾳ ΖΟ (σχ. 13), γνώμονος ἐπιμηκεστέρου ἡ μὲν κορυφὴ τεθήτω ἐπὶ τὸ Ε, ἡ δ' ἑτέρα τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἐφηρμόσθω τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀτέρα δὲ τεινάτω ἐπὶ τὸ Α· εὐθεῖα οὖν ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Ε ἀχθεῖσα ἔσεται ἡ ζητουμένη κάθετος· ὁ δὲ λόγος καθ' ἑαυτὸν σαφής· ὁ γὰρ γνώμων οὐδὲν ἀλλ' ἢ εὐθεῖά τις ἐστὶ κάθετος ἑτέρᾳ εὐθείᾳ τῇ ΖΕ· αἱ δὲ πλευραὶ αὐτοῦ τῶν ἐπὶ γῆς εὐθειῶν οὐδενὶ διαφέρουσιν, ἀλλ' ἢ τῷ μήκει.

109. Ἵν' ἐπὶ γῆς ἐγερθῇ κάθετός τις εὐθείᾳ τῇ ΖΟ ἀφ' ἑνὸς αὐτῆς δοθέντος σημείου τοῦ Ε, τῆς τοῦ γνώμονος κορυφῆς τεθείσης ἐπὶ τοῦ δοθέντος σημείου Ε, καὶ μιᾶς αὐτοῦ πλευρᾶς ἐφηρμοσμένης τῇ ΖΟ, διευθυνέσθω ἀτέρα πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Α, καὶ προσπηγνύσθω πάσσαλος ἐπὶ ταύτης τῆς φορᾶς ἐνδεικνυμένης τῇ τοῦ γνώμονος πλευρᾷ κατὰ τὸ Α φέρε· εὐθεῖα οὖν ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Ε ἀχθεῖσα ἔσται ἡ ζητουμένη κάθετος· ὃ καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον.

110. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Τοῦ γνώμονος χρησιμωτάτου ὄντος ὀργάνου, οὐκ ἄχρηστον ἂν εἴη ἀποδοῦναι, ὅπως ἂν δειχθείη ἡ κατ' αὐτὸν ἀκρίβεια.

α'. Ἤχθω εὐθεῖα ἅλις ἐπιμήκης ἡ ΖΟ ἐπὶ λείου πίνακος· β'. ἐπιτεθείσης ἀκριβῶς μιᾶς τῶν τοῦ γνώμονος πλευρῶν τῷ μέρει ΕΟ ταύτης τῆς εὐθείας, ἤχθω ἐπὶ τοῦ πίνακος εὐθεῖα ἡ ΑΕ κατὰ μῆκος τῆς ἑτέρας πλευρᾶς ΑΕ· γ'. τῆς κορυφῆς τοῦ γνώμονος ἐπὶ τοῦ Ε μενούσης, περιήχθω ἐκ δεξιῶν ἐπὶ τὰ λαιὰ ἡ τῇ ΕΟ ἐπιτεθειμένη πλευρά, καὶ ἣν ἐφαρμοσθῇ ἀκριβῶς τῇ ΖΕ, ἡ μὲν πλευρὰ ΑΕ συμπεσεῖται τῇ κατ' ἀρχὰς ἀχθείσῃ κατὰ μῆκος τὸ ταύτης εὐθείᾳ ΑΕ, συναχθήσεται δέ, ὡς ὁ γνώμων ἐστὶν ἀσφα-

λής· κείσθω γάρ, ὅτι ἡ τȣ̃ γνώμονος γωνία ὀφείλȣσα ἐπ' ἀκριβὲς εἶναι 90°, ἔςιν < 90°· ἐκεῖν ἡ ΑΕ εὐθεῖα ἡ κατ' ἀρχὰς ἀχθεῖσα ἐπὶ τȣ̃ πίνακος, ποιήσει ἐπὶ τῆς ΕΟ γωνίαν < 90°, ϗ δὴ ῥέψει πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Ο· ἐπιτιθεμένȣ ἄρα τȣ̃ γνώμονος ἐπὶ θάτερα, ϗ τῆς κορυφῆς αὐτȣ̃ μενȣ́σης ἐπὶ τȣ̃ Ε, τὸ πέρας τῆς ἑτέρας τῶν πλευρῶν ἀντὶ τȣ̃ συμπεσεῖν τῇ ΑΕ ἀποςήσεται αὐτῆς δὶς τοσȣ́τῳ, ὅσῳ ἡ τȣ̃ γνώμονος γωνία ἐλασσȣ̃ται τῶν 90°: ϗ γὰρ ἡ πρὸς δεξιὰν γωνία σὺν τῇ πρὸς ἀριςερὰν συνιςάμεναι ἀμφότεραι ἐπὶ τῆς ΖΟ εὐθείας διὰ τῆς πλευρᾶς ΑΕ τȣ̃ γνώμονος ἰσοδυναμȣ̃σι 180° (89) αἱ δύω ἄρα πλευραὶ τȣ̃ γνώμονος ἐμὴ ἐφαρμοσθήσονται τῇ ΑΕ καὶ ΕΟ, εἶτα τῇ ΑΕ ϗ ΕΖ, εἰ μὴ περιέχοιεν γωνίαν ἐπ' ἀκριβὲς = 90°.

111. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Ἐπείπερ ἡ τȣ̃ γραφομέτρȣ εὐθεῖα ΑΓ (σχ. 9), ἐφ' ἧς τῷ πέρατι Α σεσημείωται 90, σὺν τῇ ΓΗ εὐθείᾳ συνιςῶσιν ὀρθὴν γωνίαν, ϗ ἐκ τȣ̃ ἀκολȣ́θȣ γνώμονα, εὐμαρέςερον χρησόμεθα ἐπὶ τῶν προλαβȣσῶν πράξεων τῷ γραφομέτρῳ, ἢ τῷ γνώμονι.

112. Ἵνα δίχα τμηθῇ εὐθεῖα ἐπὶ γῆς, ἢ, ὃ ταυτὸν, ἵν' εὑρεθῇ τὸ μεσαίτατον ταύτης μέρος, ἐκτείναντες ἐπ' αὐτῆς ἅλυσιν σιδηρᾶν (ἢ σχοῖνον) συνάπτομεν τὰ δύω πέρατα τῆς ἁλύσεως, τὰ συμπεπτωκότα τοῖς πέρασι τῆς εὐθείας· τῆς ἁλύσεως τοίνυν ȣ̃τω διπλασιαθείσης, τὸ μέσον ἐμφανεῖ τῆς εὐθείας τὸ μεσαίτατον· ὃ καθ' ἑαυτὸ σαφές.

113. ά. Ἡ κάθετος ΠΓ (σχ. 15) ἐκ τȣ̃ Π ἐπὶ τῆς ΑΔ καταχθεῖσα, ἡ ἐλαχίςη ἐςὶ πασῶν τῶν ἀχθεῖναι δυναμένων ἀπὸ τȣ̃ αὐτȣ̃ σημείȣ ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν· πᾶ-

σα γὰρ ἄλλη εὐθεῖα ἡ ΠΖ πλαγία πίπτουσα ἐπὶ τῆς ΑΔ μείζων ἔσται τῆς ΠΓ.

114. β΄. Τὸ ἀληθὲς μέτρον τοῦ ἀποστήματος, ᾧ σημεῖον ἀπέχει ἀπ' εὐθείας, ὀφείλει εἶναι ἐπάναγκες ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα τῶν ἀπ' αὐτοῦ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ἀχθῆναι δυναμένων· ἄλλως γάρ, ἐπεὶ ἐκ σημείου ἐπ' εὐθεῖαν ἀπειράριθμοί εἰσιν ὁδοί, βραχύτεραι, ἢ ἐπιμηκέστεραι, εἴτις ἄλλη παρὰ τὴν ἐλαχίστην ληφθείη, οὐκ ἂν γένοιτο μέτρον μόνιμον τοῦδε τοῦ ἀπὸ τῆς εὐθείας ἀποστήματος· ἀλλὰ ἡ κάθετος ἔστιν ἡ ἐπιτομωτάτη ὁδὸς τῶν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ εὐθεῖαν διατεινουσῶν (113), ἔστιν ἄρα τὸ ἀληθὲς μέτρον τοῦ σημείου ἀπ' εὐθείας ἀποστήματος.

115. γ΄. Τοὐναντίον δέ, ἐὰν εὐθεῖα ἐπιτομωτάτη ᾖ ὁδὸς τῶν ἀπὸ σημείου τινὸς ἐπ' εὐθεῖαν τεινουσῶν, αὕτη κάθετος αὐτῇ ἐφέστηκε.

116. δ΄. Μία ἄρα κάθετος ἀπὸ σημείου ἐπ' εὐθεῖαν ἀχθῆναι δύναται.

117. ε΄. Δύω πλάγιαι (σχ. 16) αἱ ΑΓ, ΑΟ ἀχθεῖσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΒΕ, ἐὰν ἴσον ἀπέχωσι τῆς καθέτου ΑΔ, ὅ ἐστιν ἐὰν ἴσον ὦσι κεκλιμέναι, εἰσὶν ἰσάλληλοι, καὶ τ' ἀνάπαλιν.

118. ϛ΄. Ἐὰν δὲ δυεῖν πλαγίων ΑΕ, ΑΟ, ἡ ΑΕ μᾶλλον ἀπέχῃ τῆς καθέτου, ἢ ἡ ΑΟ, ἡ μᾶλλον ἀπέχουσα μείζων ἔσται τῆς ἧττον· καὶ τ' ἀνάπαλιν, ἡ μείζων μᾶλλον τῆς καθέτου ἀπέχει, ἢ ἡ ἐλάττων.

119. Ἐντεῦθεν ἄρα σημείου τοῦ Α ἐκτὸς εὐθείας τῆς ΒΕ δοθέντος, ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, κάθετον μὲν μίαν, πλαγίας δὲ μονονοὐκ ἀπείρους ἐφ' ἑκάτερα τῆς καθέτου ἀγαγεῖν δυνησόμεθα ἴσας, ἀνὰ δύω λαμβανομένας· ὥσπερ εἰσὶν ΑΓ = ΑΟ, ΑΒ = ΑΕ, κτλ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ Παραλλήλων εὐθειῶν.

120. Παράλληλοι λέγονται δύω γραμμαὶ αἱ ΠΔ, Ικ, (σχ. 17) ὅταν μεταξὺ πάντων τῶν ἐν αὐταῖς ἀντισοίχων σημείων τὸ αὐτὸ ᾖ απόσημα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι, καὶ ἐπ' ἄπειρον ἢν προαχθῶσιν, ἐδέποτε συμπεσῦνται ἀλλήλαις· ἐὰν γὰρ ὑποτεθῶσιν, ὅτι ἔντινι σημείῳ συμπίπτεσι, ψευδὲς ἔσαι, ὅτι ἐν αὐτῷ τῷ σημείῳ ἔχεσι πρὸς ἀλλήλας τὸ αὐτὸ ἀπόσημα, ὃ καὶ ἐν τοῖς ἄλλοις· παύσονται ἄρα ὅτως ἔσαι παράλληλοι.

121. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐξέσαι ἄρα τὰς παραλλήλες ὁρίσαι ὅτω „παράλληλοί εἰσιν αἱ, καὶ ἐπ' ἄπειρον „προαγόμεναι, ἀλλήλαις μὴ συμπίπτεσαι.“

122. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Καίπερ δύω παράλληλοι ἀκριβῶς συμπεσεῖν ἀλλήλαις ἐδύνανται, κἂν ἐπ' ἄπειρον προαχθῶσι· μετὰ γεμὴν ἄπειρον μόνην προαγωγὴν συμπίπτειν ἀλλήλαις ὑποτεθεῖσαι, ἀεὶ ἐκλαμβάνεσθαι ὡς παράλληλοι αὖθις δύνανται· ἐπεὶ γὰρ, ἐν ταύτῃ τῇ ὑποθέσει, προαχθῆναι ἐπ' ἄπειρον ὀφείλεσιν, ἵν' ἀφανισθῇ τὸ μεταξὺ αὐτῶν πεπερασμένον ἀπόσημα, ὅσῃ ἂν αὐταῖς πεπερασμένῃ προαγωγὴ προσυποτεθείη, ἀπειροσόντι ἀλλήλαις πελάσεσιν· ἐὰν ἄρα ὡς παράλληλοι ἐκληφθῶσιν, ὅ,τι δὴ μῆκος ἂν ἔχωσι πεπερασμένον, τὸ διάπτωμα ἔσαι ἀπειροσὸν, καὶ παροραπέον ἐν τῷ λογισμῷ τῶνδε τῶν εὐθειῶν· πολλάκις δὲ εἰς χρῆσιν ἥκει τῇ ὑψηλοτέρᾳ Γεωμετρίᾳ αὕτη ἡ σημείωσις.

123. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ἀλλὰ δὴ τȣ͂ ἀποςήματος, ἐν ᾧ συνίασι δύω εὐθεῖαι αἱ ΠΔ, Ικ, μὴ ὄντος μὲν πράγματι ἀπείρȣ, ἀσυγκρίτως δὲ μείζονος, ἢ τὸ ἀπόςημα Γχ, ᾧ ἀλλήλων ἀπέχȣσιν, ἐξέςαι ταύτας ὡς παραλλήλȣς ἐκδέξαϑαι· τὸ γὰρ διάπτωμα, ὅτως ἐκληφθεισῶν, ἔςαι ἀνεπαίσθητον· αὕτη δὲ ἡ σημείωσις εἰς χρῆσιν ἥκει πολλάκις τῇτε Φυσικῇ, ϗ τῇ καλȣμένῃ Μικτῇ Μαθηματικῇ.

124. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐπεὶ δύω σημεῖα ἱκανά εἰσιν ὁρίσαι τὴν θέσιν εὐθείας, δῆλον, ὅτι δύω εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν, ἐὰν δύω σημεῖα μιᾶς ἴσον ἀπέχωσι δύω σημείων τῆς ἑτέρας· ἐντεῦθεν γὰρ συνάγεται, ὡς ἅπαντα τὰ μιᾶς σημεῖα ἴσον ἀπέχȣσι τῶν σφίσιν ἀντιςοίχων σημείων τῆς ἑτέρας.

125. Δύω παραλλήλων δοθεισῶν τῶν ΠΔ, Ικ, ἐὰν τρίτη τις ἡ ΚΖ παράλληλος ᾖ τῇ δευτέρᾳ Ικ, ἔςαι παράλληλος ϗ τῇ πρώτῃ ΠΔ· ϗ γὰρ τὸ ἑκάςȣ σημείȣ τῆς ΠΖ ἀφ᾽ ἑκάςȣ κατὰ κάθετον οἱ ἀπέχοντος τῆς ΠΔ ἀπόςημα ἐςὶν ἴσον τῷ ΓΧ + ΓΟ· πάντα ἄρα τὰ τῆς ΚΖ ἀπὸ ΠΔ ἀποςήματα ἰσάλληλα ἔσονται· ΚΖ ϗ ΠΔ ἄρα εἰσὶ παράλληλοι.

126. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐν γένει ἄρα, ἐὰν εὐθεῖα παράλληλος ᾖ ἑτέρᾳ, ἔςαι παράλληλος ϗ πάσαις ταῖς ἄλλαις εὐθείαις, αἳ ἂν εἶεν θατέρᾳ παράλληλοι.

127. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Δύω παράλληλοι, μεταξὺ δύω ἑτέρων παραλλήλων ἐμπεριλαμβανόμεναι, ἰσάλληλοί εἰσιν.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἤτοι γάρ εἰσι κάθετοι ταῖς ἑτέραις παραλλήλοις (§. 18), αἷς ἐμπεριλαμβάνονται, ἢ πλάγιαι· εἰ μὲν ȣ͂ν ἐκεῖνο, ὡς αἱ ηΧ, Γδ, ἔσονται δήπȣ μέτρα

τῶν ἀποςημάτων τῶν δυοῖν σημείων χ, δ τῆς ΙΧ εὐθείας, καθ' ἃ ἀφίςανται δυοῖν σφίσιν ἀντιςοίχων σημείων Γ, η τῆς παραλλήλυ ΜΔ· ἄρα ἀλλήλαις ἴσαι ἔσονται (120)· ἐὰν δὲ ὦσι πλάγιαι, ὡς αἱ ΓΙ, ηδ, ϗ ὅτως ἰσάλληλοι ἔσονται· ϗ γὰρ ὡς παράλληλοι ἔσονται ἐπίσης κεκλιμέναι ἐπὶ τῶν ΜΔ, ΙΧ παραλλήλων, καὶ ἴσον ἀποςήσονται τῶν καθέτων Γδ, ηΧ, αἵτινες ἰσάλληλοί εἰσιν, ὡς ἤδη δέδεικται· ϗ αὗται ἄρα αἱ πλάγιαι (117) ἰσάλληλοι ἔσονται. Ο. Ε. Δ.

128. ΠΟΡΙΣΜΑ. Δύω πλάγιαι αἱ ηδ, δΑ, ἐμπεριειλημμέναι μεταξὺ διαφόρων παραλλήλων, ὧν ἴσον τὸ ἀπόςημα, ϗ ἴσον κεκλιμέναι ἐπ' αὐτὰς, ἰσάλληλοι ἔσονται· ά. αἱ γὰρ κάθετοι ηΧ, δκ εἰσὶν ἴσαι· ὑπετέθησαν γὰρ αἱ τρεῖς παράλληλοι ἴσον ἀλλήλων ἀπέχυσαι· β'. αἱ πλάγιαι ηδ, δΑ ἴσον ἀπέχυσι τῶν καθέτων κατὰ τὸν ἀνωτέρω συλλογισμὸν (127)· ἄρα αἱ πλάγιαι ηδ, δΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν (117).

129. ΟΡΙΣΜΟΣ Α'. Ὅταν εὐθεῖα (σχ. 19) εἰς δύω παραλλήλυς ἐμπέσῃ, γωνίαι ἀντίςοιχοι καλῦνται αἱ ὁμοίως κείμεναι πρὸς τὰς παραλλήλυς καὶ τὴν ἐμπεσῦσαν εὐθεῖαν· ὅτω τῆς ΓΘ εὐθείας ἐμπεσύσης εἰς δύω παραλλήλυς τὰς δΤ, ηΚ, αἱ γωνίαι Α ϗ ο εἰσὶν ἀντίςοιχοι· ἑκατέρα γὰρ κεῖται ὑπὸ τὴν ἑτέραν τῶν παραλλήλων, ϗ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ἐμπεσύσης εὐθείας ΓΘ· ἀλλὰ ϗ αἱ Ε, Ι καὶ αἱ β, Ζ εἰσὶν ἀντίςοιχοι.

130. ΟΡΙΣΜΟΣ Β'. Ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι καλῦνται αἱ μεταξὺ μὲν δύω παραλλήλων κείμεναι, ὧν μέντοι ἡ μὲν ἐπὶ θάτερα, ἡ δ' ἐπὶ θάτερα τῆς ἐμπεσύσης ἐμφιλοχωρεῖ· ὅτως αἱ δύω γωνίαι Ζ, ο κά-

λῦνται ἐντὸς ἐναλλὰξ, ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ Ι, ρ· ἐκτὸς δ' ἐναλλὰξ καλῦνται δύω γωνίαι, αἵτινες κεῖνται ἐκτὸς τῦ χώρυ τῶν παραλλήλων, ἡ μὲν ἐπὶ τάδε, ἡ δ' ἐπ' ἐκεῖνα τῆς ἐμπεσύσης· τοιαίδε εἰσὶν αἱ ν, Ε, καὶ β, Α.

131. ΟΡΙΣΜΟΣ Γ'. Δύω εὐθεῖαι ἐπὶ τῦ αὐτῦ ἐπιπέδυ κείμεναι, μίαν τῶν τριῶν τῶνδε σχέσεων πρὸς ἀλλήλας τηρήσυσιν· ἤτοι γὰρ συγκλίνυσιν ἀλλήλαις, ἢ ἀποχωρῦσιν ἀλλήλων, ἢ τέλος πρὸς ἀλλήλας εἰσὶ παράλληλοι (σχ. 15)· δύω γάρτινες φέρ' εἰπεῖν κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον ὁδεύοντες, ὁ μὲν ἐκ τῦ Γ, ὁ δ' ἐκ τῦ Ζ, ἐὰν μὲν εἰς τὸ Ζ βαδίσωσι, αἱ αὐτῶν ὁδοὶ ΓΠ, ΖΠ ἔσονται συγκλίνυσαι· ἐὰν δὲ πρὸς τἀναντία τῦ Π, ὁ μὲν δηλονότι βαδίζῃ τὴν ΠΓ, ὁ δὲ τὴν ΠΖ, αἱ δύω αὗται ὁδοὶ, ἢ γραμμαὶ εὐθεῖαι, προδήλως εἰσὶν ἀποχωρῦσαι ἀλλήλων· τελευταῖον δὲ, ἐὰν ὁ μὲν ὁδεύῃ ἐκ τῦ Π τὴν ὁδὸν ΠΔ, ὁ δὲ ἐκ τῦ Ι τὴν Ικ, (σχ. 17) αὗται αἱ εὐθεῖαι προδήλως ἔσονται παράλληλοι, ὐδὲ συναντηθήσονται οἱ δύω ὗτοι, κἂν ἐς ἄπειρον προχωρῶσιν ὁδεύοντες.

132. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Εὐθεῖα, εἰς δύω παραλλήλυς ἐμπίπτυσα, τὰς ἀντιςοίχυς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςωσαν αἱ δΤ, ηΚ παράλληλοι (σχ. 19), καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπιπτέτω ἡ ΓΘ, ἣν αὐτοὶ τέμνυσαν ὀνομάζομεν· φημὶ δὴ, ὡς ἡ β γωνία φέρε, συνιςαμένη ὑπὸ τῆς τεμνύσης ΓΘ ἐπὶ τῆς δΤ, ἴση ἐςὶ τῇ αὐτῆς ἀντιςοίχῳ Ζ τῇ ἐπὶ τῆς ηΚ· εἰ μὴ γὰρ, ἔςαι πάντως ἤτοι $\beta < Z$, ἢ $\beta > Z$ ἔςω ά. $\beta < Z$· ἀλλὰ τυτὶ ὐκ ἂν γένοιτο, εἰμὴ ἡ δβΤ εὐθεῖα ἀποχωροίη μὲν κατὰ τὸ Τ ἀπὸ τῦ τῆς ηΚ ἀντιςοίχυ σημείυ Κ, πελάζοι δὲ κατὰ τὸ δ πρὸς τὸ η σημεῖον· ὅ ἐςιν, ἡνίκα ἡ δβΤ εὐθεῖα μᾶλλον ἀπέχει κατὰ τὸ Τ

ἀπὸ τῆς ηΚ, ἢ κατὰ τὸ δ· ἐὰν ἦ ἄρα $\beta < Z$, αἱ εὐθεῖαι δβ, Ζη προαχθεῖσαι πρὸς τὰ λαιὰ τῆς ΓΘ τεμνέσης, συμπεσῦνται· ἔσονται ἄρα συμπίπτυσαι· ἐτέθησαν δὲ παράλληλοι· ἔσονται ἄρα αἱ αὐταὶ συμπίπτυσαί τε ϗ παράλληλοι· ὅπερ ἀδύνατον.

Ἔςω δὲ β΄. $\beta > Z$· ἐκῦν ἡ δΤ ἐγγυτέρα ἔςι τῇ ηΚ κατὰ τὸ Κ, ἢ κατὰ τὸ η, ϗ προαχθεῖσαι κατὰ τὰ δεξιὰ τῆς τεμνέσης συμπεσῦνται, ϗ δὴ ἐκ ἔσονται παράλληλοι· ἔτε ἐλάττων ὢν, ἔτε μείζων ἡ β ὑποτεθῆναι δύναται τῆς ἀντιςοίχυ αὐτῆς Ζ, ἐὰν μὴ παύσωνται παράλληλοι ἦσαι αἱ δΤ, ηΤ· ἄρα παραλλήλων ἐσῶν, αἱ ἀντίςοιχοι γωνίαι ἐξ ἀνάγκης ἰσάλληλοι ἔσονται. Ο. Ε. Δ.

133. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Εὐθείας εἰς δύω παραλλήλυς ἐμπιπτέσης, αἵτε ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι, ϗ αἱ ἐκτὸς ἰσάλληλοι ἔσονται.

134. ά. Αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ εἰσὶν ἴσαι, εἴτ᾽ ἦν $\varrho = I$· ϗ γὰρ $\varrho + Z = 180^\circ$ (98)· ἄρα $\varrho = 180^\circ - Z$· ὡσαύτως δὲ ϗ $I = 180^\circ - \beta$· ἀλλὰ $\beta = Z$ (132) ἄρα $\varrho = I$· ἐφόδῳ δ᾽ ὁμοία συλλογισμῦ δειχθήσεται ὅτι, $o = Z$.

135. β΄. Ὡσαύτως ἀποδεῖξαι δυνατὸν ἴσας ϗ τὰς ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίας· ϗ γὰρ $\beta = 180^\circ - I$, ϗ $A = 180^\circ - E$· ἀλλὰ $E = I$· ἄρα ϗ $\beta = A$· διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ϗ $\nu = E$.

136. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Αἱ δύω ἐντὸς ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἰσὶν $= 180^\circ$· ἐπεὶ $o + I = 180^\circ$ (98) ἀλλὰ $I = \varrho$· ἄρα $o + \varrho = 180^\circ$· τῷ δ᾽ αὐτῷ τρόπῳ δειχθήσεται ά., ὅτι ϗ $I + Z = 180^\circ$· β΄. ὅτι ϗ αἱ δύω ἐκτὸς ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη β, Ε, ἢ δύω ἄλλαι ἐκτὸς ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ν ϗ Α, εἰσὶν ἴσαι 180°.

137. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Εὐθεῖαι παράλληλοι ἔσον-

ται, ἐὰν εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἓν τῶν πέντε ποιῇ· α΄. ἰσαλλήλους τὰς ἀντισοίχους γωνίας· β΄. ἰσαλλήλους τὰς ἐντὸς ἐναλλάξ· γ΄. ἰσαλλήλους τὰς ἐκτὸς ἐναλλάξ· δ΄. τὰς ἐντὸς ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη = 180°· ε΄. τὰς ἐκτὸς ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη = 180°· τῳόντι γὰρ αἱ ἀντίσοιχοι γωνίαι φέρε β, ϗ Ζ ἰσάλληλοι οὐδύνανται εἶναι, ἐὰν αἱ γραμμαὶ βΤ, ΖΚ μὴ ὦσι μήτε συγκλίνουσαι μήτε ἀποχωροῦσαι (131, 132), ὅ ἐσιν ἐὰν μὴ ὦσι παράλληλοι· ἀλλ' ἕκασον τῶν ἄλλων τεσσάρων οὐκ ἂν κρατοίη, εἰμὴ ἰσῷντο ἀλλήλαις αἱ ἀντίσοιχοι γωνίαι· αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ φέρ' εἰπεῖν γωνίαι ρ ϗ Ι οὐκ ἂν εἴησαν ἰσάλληλοι, εἰμὴ ἡ Ζ γωνία, ἥτις σὺν τῇ ρ ἐσιν = 180°, ἴση εἴη τῇ ἀντισοίχῳ β, ἥτις σὺν τῇ Ι ὀφείλει ποιεῖν 180°.

138. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Εὐθεῖαι ἄρα δύω αἱ δΤ ηΚ κάθετοι, ἢ ἐπίσης πλάγιαι ἐπί τινος ἄλλης, παράλληλοί εἰσιν· ἐπὶ γὰρ τῆς τρίτης συςαθήσονται ἴσαι αἱ ἀντίσοιχοι γωνίαι.

139. ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ΄. Σημείου δοθέντος τοῦ Γ (σχ. 20) ἐκτὸς τῆς εὐθείας Δδ, εὐθεῖαν παράλληλον αὐτῇ διὰ τοῦδε τοῦ σημείου διάξομεν· α΄. κέντρῳ μὲν τῷ Γ διασήματι δὲ τυχόντι τῷ ΓΕ γεγράφθω τόξον τὸ ΕΖ· β΄. κέντρῳ μὲν τῷ Ε, διασήματι δὲ τῷ αὐτῷ γεγράφθω τόξον τὸ ΓΟ· γ΄. διὰ τοῦ διαβήτου μετηνέχθω τὸ ΓΟ τόξον ἐπὶ τοῦ ἀδιορίσου ΕΖ· ἔσαι ἐντεῦθεν τὸ τόξον ΕΠ· δ΄. διὰ τοῦ Π, οὕτως ὁρισθέντος, ϗ διὰ τοῦ δοθέντος Γ ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἔσεται παράλληλος τῇ Δδ.

Εἰς δὲ τὴν τούτου δεῖξιν ἤχθω ἡ κατεσιγμένη ΓΕ, καὶ ἐπείπερ αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΠΓΕ καὶ ΓΕΟ, εἰσὶν ἴσαι, ὡς ἴσοις τόξοις τοῖς ΠΕ, ϗ ΓΟ, ἐκ

κατασκευῆς, μετρȣμεναι· ἄρα αἱ δύω εὐθεῖαι ΠΓ, Δδ εἰσὶ παράλληλοι (137).

140. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Βȣλομένοις δὲ διὰ τȣ̃ δοθέντος κατὰ γῆς σημείȣ Ε εὐθεῖαν παράλληλον ἀγαγεῖν τὴν Δδ εὐθείᾳ τῇ ΠΓ, ὥσπερ ζητεῖται κήπȣ τȣ̀ς παραλλήλȣς τῶν ἀνθέων χώρȣς προσδιορίσαι, τῶν δένδρων τὰς παραλλήλȣς τάξεις κτ., καθείσθω ἐκ τȣ̃ δοθέντος Ε σημείȣ (108) πρὸς ὀρθὰς τῇ δοθείσῃ ΠΓ ἡ ΕΧ, ἐκ δὲ τȣ̃ Ε ἐςάσθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ΕΧ ἡ ΕΟ, ἥτις παράλληλος ἔςαι τῇ δοθείσῃ ΠΓ· ϗ γὰρ αἱ δύω εὐθεῖαι ΠΓ, ΕΟ ποιȣ̃σιν ἐπὶ τῆς ΕΧ, τὴν αὐτὴν ἀντίςοιχον γωνίαν, ὅ ἐςιν, ὀρθήν· εἰσὶν ἄρα παράλληλοι (137).

141. ΠΟΡΙΣΜΑ Η΄. Ἐκ τȣ́των ἄρα εὐθεῖαν ἅπασαν τὴν ΑΕ (σχ. 21) εἰς ὅσα βȣλόμεθα ἰσάλληλα μέρη τέμνειν μεμαθήκαμεν· κείσθω γὰρ τὴν ΑΕ εἰς πέντε τεμεῖν μέρη ἰσάλληλα· α΄. ȣ̃ν ἐκ τȣ̃ Α πέρατος τῆς δοθείσης εὐθείας ὑφ᾽ ἡντιναȣ̃ν γωνίαν ἤχθω ἀδιορίςως ἡ ΑΤ. β΄. διὰ τȣ̃ διαβήτȣ εἰλήφθω πέντε ἰσοδιεςῶτα σημεῖα ἐπὶ τῆς ἀπεράντȣ εὐθείας ΑΤ, εἴτ᾽ ȣ̃ν γενέσθω ΑΡ = ΡΓ = ΓΔ, κτλ., ϗ ἐπεζεύχθω τὸ ἔσχατον σημεῖον Θ, ϗ τὸ Ε πέρας τῆς δοθείσης ΑΕ εὐθείας διὰ τῆς ΘΕ. γ΄. ἤχθω δἰ ἑκάςȣ τῶν πέντε σημείων εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΘΕ εὐθείᾳ (139)· ϗ δὴ γενήσεται τὸ ἐπιταχθέν· αἱ γὰρ μεταξὺ ἰσοδιεςωσῶν παραλλήλων περιεχόμεναι εὐθεῖαι, ϗ ἐπ᾽ ἴσης πλάγιαι ἐπ᾽ αὐτῶν, εἰσὶν ἰσάλληλοι (128)· ἀλλαμὴν αἱ παράλληλοι ΖΡ, ΙΓ, κτλ. ἐκ κατασκευῆς ἴσον ἀλλήλων ἀπέχȣσι, ϗ τὰ μέρη ΑΖ, ΖΙ τῆς πάσας τὰς παραλλήλȣς τεμνȣ́σης ΑΕ συνιςῶσιν ἐπ᾽ αὐτῶν ἀντιςοίχȣς γωνίας ἰσαλλήλȣς, εἴτ᾽ ȣ̃ν εἰσὶν ἴσον ἐπ᾽ αὐτῶν πλάγιαι· ἄρα ταῦτα τὰ μέρη εἰσὶν ἰσάλληλα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ ἰδιοτήτων τινῶν εὐθειῶν ἀναφερομένων πρὸς τὸν κύκλον.

142. Πᾶσα εὐθεῖα εἰς τὴν κυκλικὴν περιφέρειαν ἐμπίπτȣσα (σχ. 22) Τέμνȣσα ἀκȣει· ϗ ἐὰν μὲν ἀπὸ σημείȣ ἐντὸς τȣ̃ κύκλȣ κειμένȣ ἐμπίπτῃ, ἐσωτερική· ἐὰν δ' ἀπ' ἐκτὸς, ἐξωτερική· κἀκείνως μὲν ἐμπίπτει ἡ πΤ, ὅτω δὲ ἡ ΔΖ.

Ἐκ τῆς ἁπανταχῆ ὁμοίας τȣ̃ κύκλȣ καμπυλότητος (44) ἐποπτείᾳ μόνῃ τȣ̃ σχήματος, τὰ ταῖς τεμνȣ́σαις ἐπανήκοντα ἐναργῶς ὑποσυνάψομεν.

143. α΄. Ἐὰν αἱ τέμνȣσαι ἀπὸ τȣ̃ κέντρȣ ἀχθῶσιν, ὡς αἱ ΚΓ, ΚΙ, ΚΜ, πᾶσαι ἰσάλληλοι ἔσονται· εἰσὶ γὰρ ἐπιεικῶς κυκλικαὶ ἀκτῖνες (44).

144. β΄. Ἐὰν δύω τέμνȣσαι ἀπὸ σημείȣ ὕπερθεν τȣ̃ κέντρȣ κειμένȣ ἀχθῶσιν, ὥσπερ αἱ ΤΗ, Τπ, ἐλάττων ἔςαι, ἡ προαχθεῖσα διὰ τȣ̃ κέντρȣ διήξει, οἷα ἡ ΤΗ(α).

145. γ΄. Ἐὰν δύω τεμνȣσαι αι ΕΓ, Εν ἀχθῶσιν ἀπὸ σημείȣ ὕπερθεν τȣ̃ κέντρȣ κειμένȣ τȣ̃ Ε, μείζων ἐςὶν ἡ διὰ τȣ̃ κέντρȣ διήκȣσα, οἷα ἡ ΕΚ (β).

(α) Πρὸς μέντοι μείζω πληροφορίαν τῶν πρωτοπείρων ἡ δεῖξις ϗ ὅτω γενήσεται· ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ἀκτὶς Κπ· ȣ̓κȣ̃ν ἔςαι $KT\pi > K\pi$ (17)· ἐπεὶ δὲ $K\pi = KH$ (41)· ἄρα ϗ $KT\pi > KH$· ἄρα ϗ $KT\pi - KT > KH - KT$, εἴτ' ȣ̓̃ν $T\pi > TH$.

(β) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ἀκτὶς Κν· κοινῇ δὲ προςεθεί-

146. δ΄. Δυεῖν τεμνȣσῶν ἐξωτερικῶν ἐπὶ τὴν κοίλην διαγομένων περιφέρειαν, οἷαι αἱ Δκ, ΔΖ, μείζων ἐςὶν ἡ διὰ τȣ̃ κέντρȣ διήκȣσα, οἷα ἡ Δκ (γ).

147. ε΄. Δυεῖν ἐξωτερικῶν τεμνȣσῶν ἀπὸ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀγομένων σημείȣ ἐπὶ τὴν κυρτὴν περιφέρειαν, οἷαι αἱ Δϐ, Δα, ἐλάττων ἐςὶν, ἣ προαχθεῖσα διὰ τȣ̃ κέντρȣ δίεισιν, οἷα ἡ Δϐ (δ).

148. Ἐὰν ἡ ΑΔ διάμετρος, ἡ τῇ Κο ἀκτῖνι κάθετος (σχ. 23), παραλλήλως ἑαυτῇ ἑρπύσῃ τὴν ὁδὸν Γο κατὰ βραχὺ ὑποσμικρυνομένη, ἕςτ᾽ ἂν τὰ αὐτῆς Α, Δ πέρατα συμπέσωσι τῷ ο σημείῳ τῆς περιφερείας, σαφὲς ὡς αὕτη ἡ εὐθεῖα, ὅσῳ μὲν ἂν ἐπὶ δεξιὰ προαχθῇ, ὅσῳ δ᾽ ἂν ἐπ᾽ ἀριςερὰ, ȣ̓δέποτε διελθεῖν τὸν κύκλον δυνήσεται, ȣ̓δ᾽ ἅψασθαι αὐτȣ̃, ὅτι μὴ καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον τὸ ο· τοιάδε ȣ̃ν εὐθεῖα, οἷα ἡ οΠ, ἢ οΤ, Ἁπτομένη ἀκȣ́ει.

149. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Δυνατὸν ἄρα ὁρίσασθαι τὴν ἁπτομένην, ὅτι ἔςιν εὐθεῖα ἐπιψαύȣσα τῆς κυκλικῆς περιφερείας καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον, ϗ ὅσῳ ἂν προαχθῇ ἐφ᾽ ἑκάτερα, τὸν κύκλον εἰσδῦναι μὴ δυναμένη.

σης τῆς ΕΚ ἔςαι ΕΚν = ΕΚΓ (Ἀριθ. 13)· ἔςι δὲ ΕΚν > Εν (17)· ἄρα ϗ ΕΚΓ > Εν.

(γ) Ἐὰν γὰρ ταῖς ἀκτῖσι ΚΖ, Κκ κοινῇ προςεθῇ ἡ ΔΚ, ἔςαι ΔΚΖ = ΔΚκ (Ἀριθ. 13)· ἀλλὰ ΔΚΖ > ΔΖ (17)· ἄρα ϗ ΔΚκ, εἴτ᾽ ȣ̃ν Δκ > ΔΖ.

(δ) Ἀχθείσης γὰρ τῆς Κα ἀκτῖνος, ἔςαι ΚαΔ > ΚβΔ (17)· ἄρα ΚαΔ — Κα > ΚβΔ — Δβ, εἴτ᾽ ȣ̃ν Δα > Δβ, τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἐφαρμοσθῆναι ἐνταῦθα δύναται ϗ ὅσα Εὐκλείδῃ δέδεικται, ἐν Προτάσεσιν Ζ, καὶ Η τῶν τȣ̃ Γ βιβλίȣ.

150. Τὸ δὲ σημεῖον ο, καθ᾽ ὃ ἡ ἀπτομένη ἐπιψαύει τῦ κύκλυ, σημεῖον ἀφῆς ὀνομάζεται.

151. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἡ ἀπτομένη οΠ παράλληλός ἐςι τῇ διαμέτρῳ ΑΔ· εἴγε αὐτὴ ἡ ΑΔ, παραλλήλως ἑαυτῇ ἑρπύσασα, ἀφίκετο ἐς τὸ ο ἐνεχθεῖσα πρὸς τὴν οΠ· ἀλλ᾽ ἡ Κο ἀχθεῖσα ἐκ τῦ κέντρυ ἐπὶ τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον κάθετός ἐςι τῇ διαμέτρῳ ΑΔ ἐξ ὑποθέσεως (148)· ἔςιν ἄρα ϗ τῇ οΠ ἀπτομένῃ κάθετος, ϗ ἀντιςρόφως ἡ οΠ ἀπτομένη ἔςι κάθετος τῇ Κο ἀκτῖνι (72)· ἀλλ᾽ εὔδηλον, ὅτι εἴληπται ἐν τῷ κύκλῳ κατὰ τὸ δοκῦν τὸ σημεῖον ο, ϗ δὴ ϗ ἡ ΔΑ διάμετρος κάθετος τῇ Κο ἀκτῖνι περατυμένη πρὸς τῷ ο σημείῳ, κἂν δὲ ϗ ἄλλο σημεῖον ο ληφθῇ, δειχθήσεται τὰ αὐτὰ ἀπαραλλάκτως· δυνατὸν ἄρα γενικῶς εἰπεῖν „τὴν ἀπτομένην τῦ κύκλυ „κάθετον ἐφεςάναι τῇ ἐκ τῦ κέντρυ, ϗ τὴν ἐκ τῦ κέν„τρυ ὡσαύτως τῇ ἀπτομένῃ.“

152. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἡ ἀπειροςὴ εὐθεῖα, εἰς ἣν ἀφίκετο ἡ ΑΔ διάμετρος, ἑνὶ σημείῳ ἀπέχυσα τῦ σημείυ ο, ἔςιν ὡσαύτως κάθετος τῇ ἀκτῖνι Κο, καὶ τανάπαλιν. Αὕτη δὲ ἡ ἀπειροςὴ εὐθεῖα ἔςιν ἐνταῦθα τὸ τῆς κυκλικῆς περιφερείας ςοιχεῖον· μᾶλλον δὲ, μία τῶν ἀπειροςῶν εὐθειῶν, ἐξ ὧν συγκροτεῖται ὁ κύκλος· ἐξέςαι ἄρα ἐν γένει εἰπεῖν „ὡς ἡ ἀκτὶς ἔςι κάθετος τῷ τῦ κύκλυ „ςοιχείῳ, ναὶ μὴν ϗ πᾶσα ἐκ τῦ κέντρυ εὐθεῖα, ἐφ᾽ ἓν ἀ„γομένη τῆς κυκλικῆς περιφερείας σημεῖον, κάθετος ἐφέ„ςηκε τῇ περιφερείᾳ κατ᾽ ἐκεῖνο τὸ σημεῖον.“

153. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἵνα, σημείυ δοθέντος τῦ ο, ἀπτομένη κατ᾽ αὐτὸ τῆς κυκλικῆς ἀχθῇ περιφερείας· α΄. ἤχθω ἡ Κο ἀκτίς· β΄. προήχθω πρὸς τὰ ἐκτὸς, ἵν᾽ ἐκ τῦ κατ᾽ αὐτὴν πέρατος ἑξῆ κάθετον ἀνεγεῖραι τὴν Πο κατὰ

τὰ κανονισθέντα (105)· αὕτη δὴ παντὶ δῆλον ἐκ τῶν ἄρτι εἰρημένων, ὡς ἔςαι ἁπτομένη, ἣ ἐζητεῖτο.

154. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ἁπτομένης οΠ ϗ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα ὀ παρεμπεσεῖται· πᾶσα γὰρ ἄλλη εὐθεῖα ἡ οΖ πλαγία ςήσεται τῇ ἀκτῖνι (116)· πᾶσα ἄρα κάθετος ἐκ τοῦ κέντρου Κ ἐπ' αὐτὴν ἀγομένη τὴν εὐθεῖαν ἐλάττων ἔςαι, ἡ ἀκτὶς (113)· εἰσελεύσεται ἄρα αὕτη ἡ εὐθεῖα εἰς τὸν κύκλον, ϗ δὴ ὀ παρεμπεσεῖται εἰς τὸν μεταξὺ τῆς ἁπτομένης οΠ ϗ τῆς περιφερείας τόπον, κατὰ τῆς ὑποθέσεως.

155. Ἀλλὰ γὰρ διὰ τοῦ τῆς ἀφῆς σημείου μεταξὺ τῆς ἁπτομένης ϗ τῆς περιφερείας ἄπειροι καμπύλαι διήξουσι· προήχθω γὰρ ἡ Κο ἀκτὶς πρὸς τὰ ἐπὶ Ι ἐπ' ἄπειρον· ἐὰν οὖν κέντρῳ μὲν τῷ τυχόντι β, εἰλημμένῳ ἐπὶ τῆς οΚΙ εὐθείας ὕπερθεν τοῦ Κ, διαςήματι δὲ τῷ βο, γραφῇ τόξον τὸ οκ, τουτὶ οὔτε τῇ ἁπτομένῃ οτ, οὔτε τῇ περιφερείᾳ Αο συμπεσεῖται, εἰμὴ καθ' ἓν σημεῖον τὸ ο· τὸ γὰρ καταγράφον σημεῖον μεθ' ἕκαςον ἀπειροςὸν διάβημα παρεκτρέπεται τῆς εὐθείας· ἐντεῦθεν ἄρα α΄. τῆς βο ἀκτῖνος μείζονος οὔσης, ἢ ἡ Κο, εἰς τοῦ διαβήτου ποῦς μετενεχθεὶς ἐπὶ τὸ ο, θατέρου ἀκινήτου μένοντος ἐν τῷ β, μετὰ τὸ πρῶτον ἀπειροςὸν διάβημα ἐκπεσεῖται τῆς οΑΔ κυκλικῆς περιφερείας· β΄. ἐν τούτῳ δὲ ϗ τῆς ἁπτομένης ἀποςήσεται, ϗ καταγράψει καινὴν ἀπειροςὴν εὐθεῖαν· ἐπεὶ γὰρ ἡ βο κάθετος ἐφέςηκε τῇ ἁπτομένῃ, ἅπαν ἄλλο σημεῖον τῆς ἁπτομένης παρὰ τὸ ο, ἀποςήσεται τοῦ β ἀποςήματι μείζονι τοῦ βο (113)· ὁ ἄρα ποὺς τοῦ διαβήτου ὁ τὸν κύκλον καταγράφων οὐ δύναται τῆς ἁπτομένης ἐπιψαῦσαι κατ' ἄλλο σημεῖον, εἰμὴ κατὰ τὸ ο.

Ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ β, διαςήματι δὲ τῷ βο κα-

ταγραφεὶς κύκλος, ὔτε τῦ κύκλυ οΑΔ, ὔτε τῆς ἀπτομένης, ἐπιψαῦσαι δύναται, ὅτι μὴ κατὰ τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον ο.

156. Ὁμοίᾳ ἐφόδῳ συλλογισμῦ δειχθήσεται, ὡς ἐὰν κέντρῳ μὲν τῷ ν, διαςήματι δὲ τῷ νο, καταγραφῇ τόξον τὸ οΧ, ϗ κέντρῳ μὲν τῷ Ι, διαςήματι δὲ τῷ Ιο, γραφῇ τὸ οΕ, ϗ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἄπειρα ἄλλα κυκλικὰ τόξα γραφῶσιν, ἕκασον τύτων, δι' ὃν λόγον ϗ τὸ οκ, ὐμὴ ἐπιψαύσει ὔτε τῆς ἀπτομένης, ὔτε τῶν ἄλλων περιφερειῶν ὐδεμιᾶς, εἰμὴ κατὰ μόνον τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον ο.

157. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐν κύκλῳ ἀκτὶς πρὸς ὀρθὰς χορδῇ ἀγομένη, δίχα αὐτὴν τέμνει.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἤχθω γὰρ ἡ ΚΕ ἀκτὶς κάθετος τῇ ΠΧ χορδῇ (σχ. 24)· φημὶ ὖν ὡς δίχα τὴν χορδὴν τεμεῖ κατὰ τὸ ν· τὸ γὰρ Κ σημεῖον τῆς ΚΕ ἀκτῖνος ἴσον ἀπέχει τῶν δύω σημείων Π, Χ τῆς ΠΧ χορδῆς διὰ τὰς ἰσαλλήλυς ἀκτῖνας ΚΠ, ΚΧ· ἀλλ' ἐὰν εὐθείας εὐθείᾳ καθέτυ ἐφισαμένης ἓν σημεῖον τὸ Κ ἴσον ἀπέχῃ δυοῖν σημείων Π, Χ τῆς ἐφ' ἣν ἐφέςηκε, ϗ ἕκασον τῶν ἄλλων τῆς καθέτυ σημείων ἴσον ἀποσήσεται τῶν αὐτῶν δύω σημείων Π, Χ (84)· ἄρα πάντα τὰ τῆς ΚνΕ εὐθείας σημεῖα, ϗ ἐκ τῦ ἀκολύθυ ϗ τὸ ν, ἴσον ἀπέχυσι τῶν Π, Χ σημείων, περάτων τῆς εὐθείας ΠΧ· ἄρα τὸ ν ἔςι τὸ μεσαίτατον σημεῖον τῆς ΠΧ εὐθείας· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

158. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Καὶ τὸ τῇ χορδῇ δὲ ὑποτεινόμενον τόξον ΠΕΧ δίχα τέμνει· εἴδομεν γὰρ ἤδη, ὡς ἕκασον τῶν σημείων τῆς πρὸς ὀρθὰς τῇ ΠΧ χορδῇ ἱςαμένης ἀκτῖνος ἴσον ἀπέχει τῶν Π, Χ αὐτῆς περάτων· ἄρα ϗ τὸ Ε σημεῖον, ὃ κοινὸν ἔχει τῷ τόξῳ ΠΕΧ, ἴσον

τῶν αὐτῶν Π, Χ ἀπέχει· ἄρα αἱ χορδαὶ ΠΕ, ΕΧ, αἱ τὰ ἴσα παρισῶσαι ἀποσήματα, ἰσάλληλοί εἰσιν· ἄρα καὶ τὰ τόξα ΠΗΕ, ΕκΧ, τὰ ὑπὸ ἴσων χορδῶν ὑποτεινόμενα, εἰσὶν ἰσάλληλα (47)· ἄρα τὸ Ε σημεῖον ἐστὶ τὸ μεσαίτατον τῶν τοῦ ὁλικοῦ τόξου ΠΕΧ· ἄρα ἡ ΚΕ ἀκτὶς τέμνει τὸ ΠΕΧ τόξον δίχα.

159. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἀλλὰ καὶ τὴν ὑπὸ ΠΚΧ γωνίαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν ἀκτίνων ΠΚ, ΚΧ, τῶν περατουμένων πρὸς τοῖς πέρασι ταύτης τῆς χορδῆς, δίχα τέμνει· δέδεικται γὰρ ἤδη ἰσάλληλα τὰ τόξα ΠΗΕ, ΕκΧ· ἀλλὰ τὸ μὲν ΠΗΕ μετρεῖ τὴν ὑπὸ ΠΚΕ γωνίαν, τὸ δὲ ΕκΧ τὴν ὑπὸ ΕΚΧ· ἄρα ΠΚΕ = ΕκΧ.

160. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἵνα οὖν δίχα τμηθῇ χορδή τις ἡ ΠΧ (σχ. 24), μία τις τῶν ἀκτίνων ἐσάσθω αὐτῇ κάθετος (104).

161. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἵνα τόξον, οὗ τὸ κέντρον ἔγνωσαι, τὸ ΠΕΧ δίχα τμηθῇ, ἐπεζεύχθω μὲν ἡ χορδὴ αὐτοῦ ΠΧ, ἐσάσθω δ' αὐτῇ κάθετος ἡ ΚΕ ἀκτίς· τὸ δὲ Ε σημεῖον τῆς ἀκτῖνος ἔσαι τοῦ τόξου τὸ μεσαίτατον (158).

162. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Ἵνα γωνία ἡ ὑπὸ ΠΚΧ δίχα τμηθῇ, κέντρῳ τῷ Κ γεγράφθω τόξον τὸ ΠΕΧ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ χορδὴ ΠΧ, καὶ ἠγέρθω ἡ ΚΕ ἀκτὶς αὐτῇ πρὸς ὀρθάς· ἐκ δὲ δὴ τούτων συςαθήσονται γωνίαι δύω, ἥτε ὑπὸ ΠΚΕ, καὶ ἡ ὑπὸ ΕΚΧ, ὧν ἑκάςη ἡμισεία ἐςὶ τῆς ὑπὸ ΠΚΧ γωνίας (159).

163. ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ΄. (σχ. 25) Ἐντεῦθεν ἄρα δυνατὸν διελεῖν τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν, ἢ τόξον τὸ ΑΔΓ, εἰς ὅσα μέρη ἴσα βουλόμεθα, κατὰ τήνδε μέντοι τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον ÷ 2· 4· 8· 16· κτλ. ἡ μὲν γὰρ κάθετος ΒΔ τεμεῖ δίχα τὸ τόξον, καὶ δὴ καὶ τὴν γωνίαν

εἰς δύω γωνίας ἰσαλλήλȣς ΑΕΔ, ϗ ΔοΓ· ἡ δὲ ΒΕ κάθετος, τὸ τόξον ΑΔ, ἡ δὲ ΒΙ κάθετος, τὸ ΑΕ τόξον· ὅθεν τὸ ΑΙ ἔςαι $\frac{1}{8}$ τȣ̃ ΑΔΓ τόξȣ, ϗ ἑξῆς ὁμοίως.

164. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Τ' ἀνάπαλιν δὲ, ἐὰν ἀκτὶς ἡ ΚΕ (σχ. 24) δίχα τέμνῃ τὴν χορδὴν ΠΧ, ἢ τὸ ὑφ' ὃ ὑποτείνει τόξον, ἢ τὴν γωνίαν τὴν τῷ τόξῳ μετρȣμένην, πρὸς ὀρθὰς ἐφέςηκε τῇδε τῇ χορδῇ· ϗ γὰρ α΄. ἐὰν ἡ ΚΕ ἀκτὶς δίχα τέμνῃ τὴν ΠΧ, τὸ ν αὐτῆς σημεῖον ἴσον ἀπέχει τῶν Π, Χ· β΄. ἀπέχει δὲ ϗ τὸ Κ, ὡς κέντρον τȣ̃ κύκλȣ, ἴσον τῶν Π, Χ (41)· ἡ ἄρα ΚΕ ἀκτὶς ἔχει δύω σημεῖα, ὧν ἑκάτερον ἴσον ἀπέχει δύω σημείων Π, Χ τῆς ΠΧ χορδῆς· ἄρα ἡ ΚΕ κάθετος ἐφέςηκεν αὐτῇ (102).

Ὡσαύτως ἐὰν ἡ ΚΕ ἀκτὶς δίχα τέμνῃ τὸ ΠΕΧ τόξον, ἢ τὴν ὑπὸ ΠΚΧ γωνίαν, δύω σημεῖα αὐτῆς, προαχθείσης εἰς τὸ τόξον ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει, τὰ Κ, Ε ἴσον ἀπέχȣσι δύω σημείων τῆς χορδῆς ΠΧ, τῶν Π, Χ· κάθετος ἄρα αὐτῇ ἐςήξει.

165. ΠΟΡΙΣΜΑ Η΄. Ἐὰν κάθετος ἡ ΚΕ δίχα τέμνῃ χορδὴν τὴν ΠΧ, διὰ τȣ̃ κέντρȣ διήξει· ἐπεὶ γὰρ τὸ ν σημεῖον τῆς ΚΕ καθέτȣ ἴσον ἀπέχει τῶν Π, Χ, ἡ κάθετος ΚΕ προαχθεῖσα πρὸς τὸ Κ διελεύσεται διὰ σημείων ἴσον ἀπεχόντων τȣ̃ Π, ϗ τȣ̃ Χ, ϗ δὴ ϗ διὰ τȣ̃ κέντρȣ (41).

166. ΠΟΡΙΣΜΑ Θ΄. Δυνατὸν ἄρα διὰ τριῶν σημείων τῶν Π, Ε, Χ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων κύκλον καταγράψαι· ἐπιζευγνύτωσαν γὰρ τὰ τρία ταῦτα σημεῖα δύω εὐθεῖαι αἱ ΠΕ, ΕΧ, ϗ τȣ́των ἑκατέρα τετμήσθω δίχα διὰ τῶν καθέτων Κδ, Κο (106) αἵτινες προαχθεῖσαι συμπεσȣ̃νται ἀλλήλαις κατὰ τὸ κέντρον τȣ̃ γραφησο-

μένε κύκλε· ὡς ἐν ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ἔτως εὑρεθέντι Κ, διαςήματι δὲ τῷ ΚΠ, γραφεὶς κύκλος, ἢ δὶ ἑκατέρε τῶν λοιπῶν δύω σημείων Ε, Χ διελεύσεται, ἐκ τῶν προειρημένων εὐμαρέςατα συνάγεται.

167. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι΄. Ι῞ν᾽ ἄρα τε δοθέντος κύκλε ΠΕΧμ τὸ κέντρον εὑρεθείη, ἤχθωσαν μὲν πρὸς τὸ δοκεν δύω χορδαὶ αἱ ΠΕ, ΕΧ, ἢ τέτων ἑκατέρα δίχα τετμήσθω διὰ καθέτων τῶν Κδ, Κο, αἵτινες προαχθεῖσαι δείξεσι τὸ ζητέμενον κέντρον Κ.

168. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΑ΄. Τόξε ἄρα δοθέντος τε ΠΕΧ, ἵν᾽ ἀναπληρωθῇ ὁ κύκλος α΄. ἤχθωσαν δύω χορδαὶ αἱ ΠΕ, ΕΧ· β΄. εὑρεθήτω τὸ τε τόξε κέντρον, ὡς ἀνωτέρω· τε δὲ κέντρε εὑρεθέντος, ῥᾷςα ὁ κύκλος ἀναπληρωθήσεται.

169. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δύω τόξα μεταξὺ δύω παραλλήλων εὐθειῶν κείμενα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί.

ΔΕΙΞΙΣ. Ε῎ςωσαν δύω τόξα τὰ ΠΖ, ΑΔ (σχ. 26) κείμενα μεταξὺ δύω παραλλήλων τῶν ΠΑ, ΖΔ· ἀχθεῖσα ἐν ἡ ΚΟ ἀκτὶς κάθετος ταῖς χορδαῖς ΠΑ, ΖΔ, α΄. ποιήσει ΟΑ = ΟΠ· β΄. ΟΔ = ΟΖ (158)· ἐὰν ἄρα δύω ἰσάλληλα τόξα τὰ ΟΔ, ΟΖ ἀπὸ δυοῖν ἰσαλλήλων τόξων τῶν ΟΑ, ΟΠ ἀφαιρεθῶσι τὰ κατάλοιπα ΑΔ, ΠΖ εἴτ᾽ ἐν τὰ μεταξὺ δύω παραλλήλων τῶν ΠΑ, ΖΔ κείμενα ἴσα ἔσονται Ο. Ε. Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ τῆς δυνάμεως τῶν γωνιῶν τῶν περιεχομένων ὑπὸ εὐθειῶν παντοίων τῶν ἐν τῷ κύκλῳ.

170. Γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ καλεῖται, ἧς ἡ κορυφὴ Κ ἐςὶν ἐν τῷ τȣ̃ κύκλȣ κέντρῳ, οἷα ἡ ὑπὸ βΚΤ (σχ. 27).

171. Σαφὲς ἄρα, ὅτι μέτρον ταύτης τῆς γωνίας ἐςὶν ἀκριβῶς τὸ βΤ τόξον τὸ ἐναπολαμβανόμενον ὑπὸ τῶν δυοῖν πλευρῶν βγ, ΤΚ ταύτης τῆς γωνίας (78)· καὶ δὴ τούτῳ μέτρῳ χρησόμεθα εἰς τὸ ὁρίσασθαι πάντα τὰ εἴδη τῶν γωνιῶν, περὶ ὧν ἐρȣ̃μεν ἐνταῦθα.

172. Αφῆς γωνίαν καλῶ τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς ἁπτομένης ηΤ, ϗ τῆς περιφερείας δΤ· ἐκ τῶν εἰρημένων ἄρα δῆλον, ὡς ἡ τῆς ἀφῆς γωνία πασῶν ἐλαχίςη ὑπάρχει· ȣ̉δὲν γὰρ ἄλλο ἐςὶν, εἰμὴ γωνία περιεχομένη ὑπὸ ςοιχείȣ κυκλικȣ̃ τῶν ὧν καταγράφει τὸ γεννῶν σημεῖον, ϗ τȣ̃ ἀμέσως ἐγγὺς κειμένȣ ςοιχείȣ· ἀλλὰ τὸ γεννητικὸν σημεῖον ȣ̉ περεκτρέπεται τῆς εὐθείας μεθ᾽ ἕκαςον διάβημα, ὅτι μὴ ἀπειροςῶς (25)· ἄρα δύω ςοιχεῖα κυκλικὰ ȣ̉ δύναται ποιεῖν, εἰμὴ γωνίαν ἀπειροςὴν, εἴτ᾽ ȣ̉ν ἁπάσης δεδομένης ἐλάττονα· ἡ ἄρα τῆς ἀφῆς γωνία πασῶν ἐςιν ἐλαχίςη.

173. Η῾ ὑπὸ δύω χορδῶν περιεχομένη γωνία, καὶ πρὸς τῷ κοίλῳ κύκλῳ τελευτῶσα, γωνία πρὸς τῇ περιφερείᾳ καλεῖται· οἷα ἐςὶν ἡ ὑπὸ ΘΑΔ.

174. Τμήματος γωνία ἐςὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ χορδῆς, ϗ ἀπτομένης, ϗ κορυφὴν ἔχουσα τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον· οἷα ἡ ὑπὸ ΔΑχ, ἢ ΔΑΤ (σχ. 28.)· πᾶσα ἄρα χορδὴ συνάμα τῇ διὰ τοῦ πέρατος ταύτης τῆς χορδῆς διϊούσῃ ποιεῖ δύω γωνίας τμήματος, τὴν μὲν μείζω τὴν ὑπὸ ΔΑχ, ἥτις ἀντιςοιχεῖ τῷ μείζονι τμήματι ΔτΑΚ (43), τὴν δὲ ἐλάττω τὴν ἐλάττονι ἀντιςοιχοῦσαν τμήματι τῷ ΔρΑϐ· καίτοι τῆς χορδοῦς διαμέτρου οὔσης, ἐπεὶ ἡ ἀκτὶς, ταὐτὸν εἰπεῖν ἡ διάμετρος, ἡ πρὸς τῷ σημείῳ τῆς ἀφῆς περατουμένη, κάθετος ἐφέςηκε τῇ ἀπτομένῃ (151), αἱ δύω γωνίαι τοῦ τμήματος ἰσάλληλοι ἔσονται, ὥσπερ ϗ τὰ κατ' αὐτὰς τμήματα (45)· εἴτ' οὖν ἑκατέρα ἔσεται ὀρθή.

175. Γωνία ἐκτὸς περιφερείας ἐςὶν, ἧς ἡ κορυφὴ ἐκτὸς κεῖται τοῦ κύκλου· οἷον ἡ ΓΑΠ (σχ. 29.) γωνία δὲ ἔκκεντρος, ἧς ἡ κορυφὴ μεταξὺ κεῖται τοῦ κέντρου ϗ τῆς περιφερείας, οἷον ἡ ΧΑΔ (σχ. 30).

176. Θεώρημα ςοιχειῶδες. Τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίας μέτρον ἐςὶ τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου, ἐφ' οὗ βέβηκε.

ΔΕΙΞΙΣ. Διερχέσθω πρῶτον ἡ ἑτέρα τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν διὰ τοῦ κέντρου, εἴτ' οὖν ἔσω πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ἡ ὑπὸ ΘΑΔ (σχ. 31.)· φημὶ οὖν, ὡς ταύτης μέτρον ἐςὶ τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΘΔ, ἐφ' οὗ βέβηκε, ταὐτὸν εἰπεῖν, ἐφ' οὗ τοῖς πέρασι τελευτῶσιν αἱ ΑΘ, ΑΔ χορδαὶ, αἱ τὴν γωνίαν περιέχουσαι.

Ἤχθω γὰρ ἡ ΠΙ παράλληλος τῇ ΑΔ, ϗ ἡ ΑΘ χορδὴ ἐμπιπτέτω εἰς δύω παραλλήλους, ϗ ἐπὶ τῆς ΠΚΙ παραλλήλου ποιείτω γωνίαν πρὸς τῷ κέντρῳ τὴν ὑπὸ ΘΚΙ· αὕτη οὖν ἀκριβῶς μετρηθήσεται ὑπὸ τοῦ τόξου ΘΙ, ἐφ' οὗ βέβηκε (171)· ἀλλὰ ΘΚΙ = ΘΑΔ (132)· καὶ

τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας μέτρον τὸ ΘΙ τόξον· ἄρα ϗ τῆς ἴσης αὐτῇ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ ὑπὸ ΘΑΔ μέτρον ἐςὶ τὸ αὐτὸ τόξον ΘΙ.

Ἀλλὰ ΘΙ = $\frac{1}{2}$ ΘΔ, ἐφ' ȣ̃ βέβηκεν ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ΘΑΔ· ϗ γὰρ ΘΚΙ = ΠΚΑ (99)· ἄρα ϗ ΘΙ = ΠΑ· ἔςι δὲ ϗ ΠΑ = ΙΔ (169)· ȣ̓κȣ̃ν 2 ΘΓ = ΘΔ ϗ ΘΙ = $\frac{1}{2}$ ΘΓ ἄρα ΘΙ ἥμισύ ἐςι τȣ̃ τόξȣ ΘΔ, ἐφ' ȣ̃ βέβηκεν ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ὑπὸ ΘΑΔ.

Διερχέσθωσαν εἶτα ἑκάτεραι αἱ τὴν πρὸς τῇ περιφερείᾳ περιέχȣσαι γωνίαν ἐκ τῶν ἑτέρων τȣ̃ κέντρȣ, ὡς αἱ ΠΖ, Πκ (σχ. 32.)· δειχθήσεται ȣ̃ν ϗ ἐπὶ ταύτης τὸ αὐτό.

Ἀχθείσης γὰρ τῆς κατεςιγμένης Πν διὰ τȣ̃ Κ κέντρȣ, τῆς ὑπὸ νΠκ γωνίας μέτρον ἔςαι τὸ ἥμισυ τȣ̃ νΖκ τόξȣ, ἐφ' ȣ̃ βέβηκεν, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται· ἀλλὰ $\frac{1}{2}$ νΖκ = $\frac{1}{2}$ νΖ + $\frac{1}{2}$ Ζκ· ἡ δὲ γωνία νΠΖ, ἧς ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν νΠ δίεισι διὰ τȣ̃ κέντρȣ, μετρεῖται ὑπὸ τȣ̃ ἡμίσεως τȣ̃ τόξȣ νΖ, ἐφ' ȣ̃ βέβηκε, συλλογιȣ̃μεθα τοίνυν ȣ̃τως: ὅλης τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ γεγραμμένης γωνίας νΠκ μέτρον ἐςὶ τὸ ἥμισυ τȣ̃ τόξȣ νΖ σὺν τῷ ἡμίσει τȣ̃ τόξȣ Ζκ· ἀλλὰ τῆς μερικῆς γωνίας νΠΖ μέτρον ἐςὶ τὸ ἥμισυ τȣ̃ νΖ τόξȣ· λέιπεται ἄρα τῆς μερικῆς γωνίας ὑπὸ ΖΠκ μέτρον τὸ ἥμισυ τȣ̃ Ζκ τόξȣ· ἄρα ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ΖΠκ μετρεῖται ὑπὸ τȣ̃ ἡμίσεως τȣ̃ Ζκ τόξȣ, ἐφ' ȣ̃ βέβηκε.

Τέλος δὲ διερχέσθωσαν ἡ μὲν τῶν πλευρῶν ἔνθεν, ἡ δὲ ἔνθεν τȣ̃ κέντρȣ, ὡς αἱ τὴν ὑπὸ ΒΑΓ περιέχȣσαι· τοιγαρȣ̃ν ἀχθείσης διὰ τȣ̃ κέντρȣ τῆς ΑΔ κατεςιγμένης, τῆς μὲν ὑπὸ ΔΑΓ γωνίας μέτρον ἔςαι τὸ ἥμισυ τȣ̃

ΔΓ τόξȣ, τῆς δ' ὑπὸ ΒΑΔ τὸ ἥμισυ τȣ̃ ΒΔ (176)· ὅλης ἄρα τῆς ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας μέτρον ἐςὶ τὸ $\frac{1}{2}$ ΒΔ + $\frac{1}{2}$ ΔΓ· ὅ ἐςι τὸ ἥμισυ τοῦ ὁλικοῦ τόξου ΒΔΓ, ἐφ' οὗ βέβηκεν.

Ἐντεῦθεν ἄρα ἐποίσομεν ἐν γένει: ἁπάσης πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίας, κἂν ἡ ἑτέρα τῶν περιεχȣσῶν αὐτὴν πλευρῶν διήκει διὰ τȣ̃ κέντρȣ, κἂν ἑκατέρα κέηται ἐπὶ τῶν αὐτῶν μερῶν τȣ̃ κέντρȣ, ἢ ἡ μὲν ἔνθεν, ἡ δ' ἔνθεν τȣ̃ κέντρȣ διΐωσιν· ἐφ' ἑκάςης τῶν τριῶν τῶνδε περιπτώσεων, μέτρον τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίας τὸ ἥμισύ ἐςι τȣ̃ τόξȣ, ἐφ' ȣ̃ βέβηκεν· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

177· ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐὰν ἄρα δύω, ἢ πλείȣς γωνίαι πρὸς τῇ περιφερείᾳ ἐπὶ τȣ̃ αὐτȣ̃, ἢ ἐπὶ ἴσων τόξων, βαίνωσιν, ἰσάλληλοι ὑπάρχȣσι.

178. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασία ἐςὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι (σχ. 34)· τῆς γὰρ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας ΕΚΔ μέτρον ἐςὶν ὅλον τὸ τόξον ΕΠΔ, ἐφ' ȣ̃ βέβηκεν (171)· τῆς δὲ πρὸς τῇ περιφερείᾳ ΕΒΔ, ἥτις βέβηκεν ἐπὶ τȣ̃ αὐτȣ̃ ΕΠΔ τόξȣ, μέτρον ἐςι τὸ ἥμισυ τȣ̃ αὐτȣ̃ τόξȣ (176).

ΣΧΟΛΙΟΝ. Τίνος δὲ χάριν, ἐρεῖτις τυχὸν τῶν πρωτοπείρων, τῆς μὲν πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας μέτρον ἐςὶ τὸ τόξον, ἐφ' ȣ̃ βέβηκε, πᾶν δὲ τόξον, ἐφ' ȣ̃ γωνία τὴν βάσιν ἴσχει, ὡς μέτρον αὐτῆς, ἥκιςα παραλαμβάνεται;

ΛΥΣΙΣ. Ἐὰν μὲν γὰρ ὑποτεθῇ γωνία τις πρὸς τῷ κέντρῳ, μονίμως καὶ ὡρισμένως χαίνȣσα, τὸ μέτρον αὐτῆς, ὡς ἤδη ἐμάθομεν, ἔςαι ἀεὶ ἄτρεπτον, εἴτ' ȣ̃ν μέρος ὅμοιον τῆς κυκλικῆς περιφερείας, ἧς ὑποτίθεται τὸ

κέντρον, ὁποσονῦν ἂν ὑποτεθῇ τὸ μέγεθος τῆς κατὰ ταύτην τὴν περιφέρειαν ἀκτῖνος, εἴτ' ἓν τῶν αὐτὴν περιεχουσῶν πλευρῶν (78, 79). τῆς δὲ γωνίας, ἧς ἐκ ἔςιν ἡ κορυφὴ πρὸς τῷ κέντρῳ τῦ κύκλυ, ἐφ' ῦ τῦ τόξυ βέβηκε, τὸ μέτρον ποικίλλεσθαι δύναται ἐπ' ἄπειρον, καίτοι τῦ τόξυ ἀτρέπτυ μένοντος. Θῶμεν γὰρ πλείυς ἑξῆς γωνίας τὰς ΑΒΔ, ΑΚΔ, ΑΖΔ, κτλ. (σχ. 35.) ἁπάσας βεβηκυίας ἐπὶ τῦ αὐτῦ τόξυ ΑΧΔ, ϗ κορυφὰς κατὰ συνέχειαν ἐχύσας τὰς Β, Κ, Ζ, κτλ. ἐπὶ τῆς ἀπεράντυ εὐθείας χρ· ἐκῦν τὸ μὲν ἄνοιγμα τῆς ὕπερθεν τῦ κέντρυ γωνίας ΑΒΔ, ἐπαισθητῶς ἐςι μεῖζον τῦ τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας ΑΚΔ, αὐτῆς δὲ μεῖζον, ἢ τὸ τῆς ὕπερθεν τοῦ κέντρου ΑΖΔ· ταύτης δὲ μεῖζον, ἢ τὸ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ ΑΙΔ· ϗ ὕτως ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον· ἐπείπερ τοίνυν ἀπειράριθμοι γωνίαι, μᾶλλον ἢ ἧττον χαίνυσαι, ἐπὶ τῦ αὐτῦ τόξυ τῦ αὐτῦ κύκλυ βεβηκέναι δύνανται, τυτὶ τὸ τόξον ὑδόλως ξυντελεῖ πρὸς τὸ εἶναι κοινὸν μέτρον πασῶν τῶν διαφερυσῶν γωνιῶν· ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ ἄρα γωνία, ἧς ἥκιςα μεταλλοιῦται τὸ μέτρον, εἰμὴ ϗ τῆς γωνίας ἀλλοιωθείη ἡ ἀνοιγὴ (78, ϗ ἑξῆς), δύναται παραλαμβάνεσθαι ὡς ὅρος παραθέσεως ἁπασῶν τῶν ἄλλων γωνιῶν.

179. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασία ἐςὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ἐὰν ἐπὶ τῦ αὐτῦ βαίνωσιν αἱ γωνίαι τόξυ, ἐντεῦθεν ὑποσυνάψομεν θεωρήματι, ἁπάσῃ μὲν τῇ Φυσικῇ, ἐξαιρέτως δὲ τῇ Ἀςρονομίᾳ, πρυργιαίτατον. Ἔςω μέγεθος τὸ ΑΓ (σχ. 36.) ἡ διάμετρος φέρ' εἰπεῖν, ἢ ὁ ἄξων ἑνὸς τῶν πλανητῶν, ὁρώμενος ἐκ δύω διαφόρων ἀποςημάτων τῶν Ο, Η, ὧν τὸ ἔλαττον Οτ ἔςω ἥμισυ τῦ μείζονος Ητ, μᾶλλον ἐμπης ἐπαισθητότερον, ἢ τὸ μέγεθος τῦ ὁρατῦ ΑΓ.

Γωνία ὀπτικὴ καλεῖται ἡ ἐν τῷ τȣ̃ θεατȣ̃ ὀφθαλμῷ συνιςαμένη ὑπὸ δύω φωτοφυῶν ἀκτίνων, ὡς εὐθειῶν ἐξερχομένων ἐκ τῶν δύω περάτων τȣ̃ ὑποκειμένȣ· ὁ ἐμὸς φέρε ὀφθαλμὸς, τιθέμενος ἐν τῷ Ο, ὁρᾷ τὸν ὄγκον, ἢ τὴν διάμετρον τȣ̃ ΑΓ πλανήτȣ· αἱ δ᾽ ἀκτῖνες ΓΟ, ΑΟ ἀρχόμεναι ἀπὸ τῶν περάτων Γ, Α τȣ̃ ὄγκȣ τȣ́τȣ, ἢ τῆς τȣ̃ πλανήτȣ διαμέτρȣ, ϗ ἀφικνȣ́μεναι εἰς τὸν ἐμὸν ὀφθαλμὸν, ἐν αὐτῷ ἀλλήλαις συμπίπτȣσαι, τὴν ὀπτικὴν καλȣμένην συνιςῶσι γωνίαν, εἴτ᾽ ȣ̃ν γωνίαν τῆς ὁράσεως τὴν ὑπὸ ΓΟΑ· τȣ̃ δ᾽ ὀφθαλμȣ̃ τιθεμένȣ ἐπὶ τȣ̃ Η, ἡ ὀπτικὴ γωνία ΓΗΑ ἔςαι ἐλάττων τῆς ΓΟΑ. Ἐὰν ȣ̃ν κέντρῳ μὲν τῷ Ο, διαςήματι δὲ τῷ τΟ = ΟΗ, κύκλος γραφῇ ὁ ΖΗΔρκ, ȣ̃ ἐν τῷ σχήματι δύω μόνα τόξα ὁρῶνται τό, τε ἄνωθι κρ, ϗ τὸ κάτωθι ΖΔ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία ΓΟΑ διπλασία ἔςαι τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίας ΓΗΑ (178).

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ γωνία, δι᾽ ἧς τὸ ΑΓ μέγεθος ὁρᾶται ἀπὸ ἀποςήματος, ὅ ἐςι διπλάσιον ἢ τὸ τΗ, ὑπάρχει ἡμισεία τῆς ὑπὸ ΓΗΑ, τὸ τέταρτον μέρος ἐκ τȣ̃ ἀκολȣ́θȣ τῆς ὑπὸ ΓΟΑ γωνίας, ϗ ȣ̃τως ἑξῆς. ὃ ἐςιν, αἱ γωνίαι, δι᾽ ὧν ὁρᾶται τὸ μέγεθος ὑποκειμένȣ τινὸς ἐκ διαφόρων ἀποςημάτων, εἰσὶν ἐν λόγῳ ἀντιπεπονθότι τῶν ἀποςημάτων· ἀλλαμὴν τὰ τῶν σωμάτων μεγέθη φυσικῶς κρίνονται ὑπὸ τῆς γωνίας, ἣν ἐν τῷ ὀφθαλμῷ ποιȣ̃σιν αἱ προβαλλόμεναι ἀκτῖνες ἐκ τῶν περάτων αὐτῶν, τȣτέςιν ὑπὸ τῆς ὀπτικῆς γωνίας· τὸ ἄρα ἐκ διαφόρων ἀποςημάτων φαινόμενον σώματός τινος μέγεθος ἔςιν ἐν λόγῳ ἀντιςρόφῳ τῶν ἀποςημάτων· εἴτ᾽ ȣ̃ν ἀπὸ μὲν διπλȣ̃ ἀποςήματος ὑποδιπλάσιον, ἀπὸ δὲ τετραπλȣ̃ ὑποτετραπλάσιον, ὁρᾶται, ϗ ȣ̃τως ἑξῆς.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὑποτεθῆναι ἔδει τὸν τȣ̃ θεατȣ̃ ὀφθαλμὸν Ο ἀφίςαϑαι τȣ̃ ὑποκειμένȣ ἀποςήματι τῷ Οτ μείζονι τȣ̃ κατὰ τὸ ὑποκείμενον αὐτὸ μεγέθȣς (σχ. 37.)· εἰ γὰρ ἰσῷτο τὸ τȣ̃ ὑποκειμενȣ μέγεθος ΑΓ τῷ Οτ ἀποςήματι, ἢ ϗ εἴη ΑΓ>Οτ, ὥσπερ, ὅταν φέρε τοῖχον τινὰ οἴκȣ ὁρῶμεν ἀπὸ τινῶν ποδῶν ἀποςήματος, ȣ̓κ ἂν κρατήσειεν, ὃ πρότερον ἀπεδείξαμεν· ἐν γὰρ τῷ 37 σχήματι κατάδηλον, ὡς αἱ δύω εὐθεῖαι ΓΗ, ΑΗ περιέχȣσιν ἐν τῷ κύκλῳ τόξον μεῖζον τȣ̃ περιεχομένȣ ὑπὸ τῶν ΓΟ, ΑΟ εὐθειῶν· ϗ ἐπεὶ ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ΓΗΑ βέϐηκεν ἐπὶ τόξȣ μείζονος, ἢ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ ΓΟΑ, ἡ πρώτη γωνία ἔςαι μείζων ἢ ἡμισεία τῆς δευτέρας· ϗ δὴ τὸ φαινόμενον μέγεθος τȣ̃ ὑποκειμένȣ ὁρώμενον ἐκ τȣ̃ Η μεῖζον ἔςαι, ἢ τὸ ἥμισυ τȣ̃ φαινομένȣ μεγέθȣς τȣ̃ αὐτȣ̃ ὁρωμένȣ ἐκ τȣ̃ Ο· ἐντεῦθεν ἄρα συνάγεται.

α΄. Τὸ φαινόμενον μέγεθος ὁρατȣ̃ τινος ȣ̓δέποτέ ἐςι, κυρίως εἰπεῖν, ἐν λόγῳ ἀντιπεπονθότι τῶν ἀποςημάτων· εἴγε τὸ τόξον, ἐφ᾽ ȣ̃ βέϐηκεν ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ΓΗΑ ἀεί ἐςι βραχύτι μεῖζον τȣ̃, ἐφ ȣ̃ βέϐηκεν ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ ΓΟΑ.

β΄. Ὅσῳ μέντοι τὸ Οτ ἀπόςημα πλεονάκις περιέχει τὸ τȣ̃ ὑποκειμένȣ μέγεθος ΓΑ (σχ. 36.) τοσȣ́τῳ ἡ μεταξὺ τῶν δύω εἰρημένων τόξων διαφορὰ ἔςιν ἀνεπαίσθητος· ϗ δὴ τοσȣ́τῳ ἡ πρότασις „τὸ φαινόμενον μέγεθος ὑποκειμένȣ τινὸς ἔςὶν ἐν λόγῳ ἀντιθέτῳ τῶν ἀποςημάτων“ τȣ̃ ἀληθȣ̃ς ἔγγιον γίγνεται· ἐὰν γὰρ προκέηται τοῖχον φέρε, ὀργυᾶς πλάτος ἔχοντα, πρῶτον μὲν ὁρᾷν ἐξ ἀποςήματος ὀργυῶν 100, εἶτα ἐκ 200, τὸ δεύτερον φαινόμενον μέγεθος τῆς ὀργυᾶς ἔςαι ὡς πρὸς αἴσθησιν ἀκριϐῶς ὑποδιπλάσιον τȣ̃ πρώτȣ.

γʹ. Περὶ δὲ τῶν ἀπὸ τῆς γῆς ὁρωμένων οὐρανίων σωμάτων, ἐπεὶ τὸ ἀπόϛημα, ᾧ ἀπέχει ἀϛήρτις ἀπὸ τῆς γῆς, ἀπαραβλήτως ἔϛι μεῖζον τῆς πραγματικῆς διαμέτρȣ τȣ̃ ἀϛέρος, ἐξέϛαι ἐν ἀπάτῃ ὅσον ȣ̓κ ἀπειροϛῇ, ὡς ἀληθεῖ χρήσασθαι ἐπὶ τῆς ἀϛρονομίας τῇ προειρημένῃ προτάσει, ϗ ὡς ἀρχῇ μονιμωτάτῃ „τὰ φαινόμενα μεγέθη, „ἢ αἱ φαινόμεναι διάμετροι τῶν ἀϛέρων, ἀντιπεπονθότως „ἀνάλογά εἰσι τοῖς αὐτῶν ἀπὸ τῆς γῆς ἀποϛήμασι.“

180. ΠΟΡΙΣΜΑ Δʹ. Ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία, ἐὰν βάσιν ἔχῃ τὴν διάμετρον, ὡς ἡ ηΑβ, ἢ ηΧβ, ἔϛιν ὀρθή (𝔖. 40.)· βεβηκυῖα γὰρ ἐπὶ τῆς διαμέτρȣ, βέβηκεν ἐπὶ τȣ̃ ἡμικυκλίȣ ηΤΟβ· τὸ δὲ ἥμισυ τȣ́τȣ ἔϛιν 90°, ὅ ἐϛι μέτρον γωνίας ὀρθῆς (91).

181. ΠΟΡΙΣΜΑ Εʹ. Διὰ κύκλȣ ἄρα γραφέντος γωνίαν ὀρθὴν ἐξέϛαι συϛήσασθαι· ἀπό γὰρ τȣ̃ η ϗ δ περάτων μιᾶς τῶν διαμέτρων, εὐθειῶν γραμμῶν ἀχθεισῶν πρὸς ἕν τι σημεῖον τῆς περιφερείας, γέγονε τὸ ζητȣ́μενον.

182. ΠΟΡΙΣΜΑ ϛʹ. Ἐκ τȣ̃ Βʹ. πορίσματος μεμαθήκαμεν, ὅπως ἀπὸ σημείȣ ἐκτὸς κειμένȣ τȣ̃ Ο εὐθεῖαν ἁπτομένην τȣ̃ κύκλȣ ἀγαγεῖν δυνησόμεθα (𝔖. 39.)· αʹ. κέντρῳ μὲν τῷ μεσαιτάτῳ σημείῳ τῆς ΚΟ εὐθείας, διαϛήματι δὲ τῷ ΚΠ, γεγράφθω νέος κύκλος ὁ ΚΡΟΝ· βʹ. ἐκ τȣ̃ σημείȣ Ρ, καθ' ὃ τέμνȣσιν ἀλλήλȣς οἱ κύκλοι ἐπεζεύχθω ἡ εὐθεῖα ΡΟ, ἥτις ἐφάψεται τȣ̃ δοθέντος κύκλου.

Καὶ γὰρ τῆς ὑπὸ ΟΡΚ γωνίας, διὰ τὸ βεβηκέναι ἐπὶ τῆς ΚΟ διαμέτρȣ, ȣ̓́σης ὀρθῆς, ἡ ἀκτὶς ΚΡ τȣ̃ πρώτȣ κύκλȣ ὀρθὴν γωνίαν μετὰ τῆς ΡΟ εὐθείας ποιεῖ, ϗ δὴ ἔϛι κάθετος τῷ τῆς ἁφῆς σημείῳ Ρ· ἡ ἄρα ΡΟ εὐθεῖα ἀληθῶς ἅπτεται τȣ̃ προτέρȣ κύκλȣ (151).

Ἐὰν δὲ ἐκ τȣ̃ δοθέντος Ο σημείȣ ἀχθῇ πρὸς τὸ ἕτερον σημεῖον Ν, καθ᾽ ὃ οἱ κύκλοι τέμνȣσιν ἀλλήλȣς, ἡ ΝΟ εὐθεῖα, ἡ μὲν ὑπὸ ΟΝΚ γωνία ἔσεται ὀρθὴ, ἡ δὲ ΟΝ ϗ αὐτὴ ἐφάψεται τȣ̃ κύκλȣ· ἄρα κύκλȣ ἐκτὸς σημείȣ δοθέντος τȣ̃ Ο, ἀεὶ ἐξέςαι δύω ἁπτομένας τοῦ κύκλȣ ἀγαγεῖν.

183. ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ΄. Πᾶσαι αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίαι (σχ. 40), ἐὰν βάσιν ἔχωσι τόξον ἡμικυκλίȣ μεῖζον, οἷα ἡ ηΑΔ, εἰσὶν ἀμβλεῖαι· ὀξεῖαι δὲ τȣ̓ναντίον αἱ ἐπὶ τόξȣ ἐλάττονος ἢ ἡμικύκλιον βεβηκυῖαι, ὡς ἡ ηΑΟ· ἐκείνων μὲν γὰρ μέτρον ὂν τὸ ἥμισυ τῆς ἐφ᾽ ἧς βεβήκασι περιφερείας, ἔςι $> 90^{\circ}$, τȣ́των δὲ $< 90^{\circ}$.

184. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Ἡ τȣ̃ τμήματος γωνία μετρεῖται ὑπὸ τȣ̃ ἡμίσεως τόξȣ, ὃ ὑποτείνει ἡ σὺν τῇ ἐφαπτομένῃ τὴν γωνίαν περιέχȣσα χορδή· εἴτε γὰρ αὕτη διὰ τȣ̃ κέντρȣ δίεισιν, εἴτε μὴ, (σχ. 28.)· ϗ εἰ μὲν ἐκεῖνο, ὡς ἡ Αν, τηνικαῦτα ἡ γωνία τȣ̃ τμήματος ἔςαι ὀρθὴ (174), ϗ δὴ μετρηθήσεται ὑπὸ τȣ̃ ἡμίσεως ἡμικυκλίȣ, ὑφ᾽ ὃ ὑποτείνει ἡ Αν χορδὴ (91)· εἰ δὲ τȣ̃το, ὡς ἡ ΑΔ, ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς κατὰ τὴν ἁφὴν γωνίας ἀχθείσης τῆς διαμέτρȣ ΑΚν, ἡ ὀρθὴ γωνία ὑπὸ νΑΤ μετρηθήσεται ὑπὸ τȣ̃ ἡμίσεως τȣ̃ τόξȣ Δν σὺν τῷ ἡμίσει τȣ̃ τόξȣ ΔρΑ, ὡς μετρȣμένη ὑπὸ τȣ̃ ἡμικυκλίȣ νρΑ· ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΔΑν ὡς πρὸς τῇ περιφερείᾳ μετρεῖται ὑπὸ τȣ̃ ἡμίσεως τȣ̃ Δν τόξȣ (176)· ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΤ, εἴτ᾽ ȣ̓ν ἡ γωνία τȣ̃ τμήματος, μετρηθήσεται ὑπὸ τȣ̃ ἡμίσεως τȣ̃ ΔρΑ τόξȣ, ὃ ὑποτείνει ἡ ΔΑ χορδή.

Καὶ ἡ τȣ̃ μείζονος δὲ τμήματος γωνία ΔΑχ ϗ αὐτὴ μετρεῖται ὑπὸ τȣ̃ ἡμίσεως τȣ̃ μείζονος τόξȣ ΔνΑ, ὑφ᾽ ὃ ἡ χορδὴ αὕτη ὑποτείνει· ϗ γὰρ ΔΑχ=νΑχ+

νΑΔ· ἀλλὰ τῆς μὲν ὀρθῆς γωνίας νΑχ μέτρον τὸ $\frac{1}{2}$ Ατν, τῆς δὲ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίας νΑΔ, τὸ $\frac{1}{2}$ Δν· ὅλης ἄρα τῆς ΔΑχ, εἴτ' ἒν τῆς τῦ μείζονος τμήματος γωνίας, μέτρον ἐςὶ τὸ $\frac{1}{2}$ Ατν + $\frac{1}{2}$ Δν = $\frac{1}{2}$ ΑτΔ· ἐν γένει ἄρα μέτρον τῆς τῦ τμήματος γωνίας ἀεί ἐςι τὸ ἥμισυ τῦ τόξυ, ὑφ' ὃ ὑποτείνει ἡ χορδὴ, ἡ μετὰ τῆς ἐφαπτομένης τὴν γωνίαν περιέχυσα.

185. ΠΟΡΙΣΜΑ Η'. Γωνία ἐκτὸς περιφερείας ἡ ΓΑΠ (σχ. 29.) μετρεῖται ὑπὸ τῦ ἡμίσεως τῦ τόξυ ΠΓ πλὴν τῦ ἡμίσεως τῦ τόξυ Δδ τῦ περιεχομένυ μεταξὺ τῶν δύω αὐτῆς πλευρῶν· ἀχθείσης γὰρ τῆς ΔΧ παραλλήλυ τῇ ΑΠ, ἔςαι ΓΔΧ = ΓΑΠ (132)· ἀλλὰ ά. ἡ ὑπὸ ΓΔΧ μετρεῖται ὑπὸ τῦ ἡμισεως τῦ ΓΧ τόξυ, ϗ δὴ ὑπὸ τῦ ἡμίσεως τῦ ΓΠ τόξυ πλὴν τῦ ἡμίσεως τῦ ΠΧ τόξυ, εἴγε ΓΧ = ΓΠ — ΠΧ, καὶ δὴ καὶ $\frac{\Gamma X}{2}$ =

$$\frac{\Gamma\Pi - \Pi X}{2} = \frac{\Gamma\Pi}{2} - \frac{\Pi X}{2}.$$ β'. ΠΧ = Δδ (169)·

ἄρα κτλ.

186. ΠΟΡΙΣΜΑ Θ'. Ἡ ἁπτομένη ΑΒ (σχ. 38.) θεωρηθῆναι δύναται ὡς τέμνυσα κατὰ τὴν ΑΓ, ἥτις κινεῖται περὶ τὸ ἀκίνητον Α, ἔςτ' ἂν ἐφίκηται τῦ Β, ϗ τὸ μέρος αὐτῆς ΖΓ ἴσα ϗ μηδὲν γένηται· ὡσαύτως ἡ ΑΕ ἐκληφθῆναι δύναται ὡς ἡ τέμνυσα ΑΔ, ἥτις ἐλαττῦται μέχρι τῦ Ε· ἀλλὰ ἡ ΒΑΕ, ὡς γωνία ἐκτὸς τῦ κύκλυ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ὕτω τεμνυσῶν, μετρεῖται ὑπὸ τῦ ἡμίσεως τῦ ΒΗΕ τόξυ πλὴν τῦ ἡμίσεως τῦ ΒοΕ (185)· ἄρα ἡ ΒΑΕ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ δύω ἁπτομένων, μετρεῖται

ὑπὸ τȣ̃ ἡμίσεως τȣ̃ κοίλȣ τόξȣ ΒΗΕ, πλὴν τȣ̃ ἡμίσεως τȣ̃ κυρτȣ̃ τόξȣ ΒοΕ, ἐφ' ὧν ἄυτη βέβηκε.

187. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι'. Γωνία ἔκκεντρος ἡ ὑπὸ ΧΑΔ (σχ. 30.) μετρεῖται ὑπὸ τȣ̃ ἡμιαθροίσματος τῶν τόξων ΧΔ, Πη, τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς προαχθεισῶν· ἀχθείσης γὰρ τῆς Γη παραλλήλȣ τῇ ΑΔ ἐκ τοῦ η πέρατος τῆς προαχθείσης ΑΧ, ἔςαι ΧηΓ = ΧΑΔ (132)· ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΧηΓ· μετρεῖται ὑπὸ τȣ̃ ἡμίσεως τȣ̃ ΧΓ· μετρεῖται ἄρα ὑπὸ $\frac{1}{2}$ ΧΔ + $\frac{1}{2}$ ΓΔ· ἀλλα ΓΔ = Πη (169)· ἄρα ἡ ΧηΓ = ΧΑΔ μετρεῖται ὑπὸ $\frac{1}{2}$ ΧΔ + $\frac{1}{2}$ Πη, ἃ περιέχεται ὑπὸ τῶν ἀυτῆς πλευρῶν προαχθεισῶν.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Ἐπιπεδομετρία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Περὶ σχημάτων.

188. Αἱ γραμμαὶ, ἐπ' ἀλλήλας μὲν πίπτȣσαι, συνιςᾶσι τὰς γωνίας· χωρίον δέ τι περικλείȣσαι, ποιȣ̃σι τὸ καλȣ́μενον σχῆμα. Τοιγαρȣ̃ν ἐν τῇ ἐπιπεδομετρίᾳ τῇ λέξει σχῆμα σημαίνεται χωρίον τι κατ' ἐπιφάνειαν μόνον πανταχόθεν περικλειόμενον· καὶ αἱ μὲν γραμμαὶ πλευ-

ραὶ τȣ͂ σχήματος λέγονται· τὸ δὲ ἄθροισμα πασῶν τȣ́των τῶν γραμμῶν, περίμετρος ἀκȣ́ει· τὸ δὲ περιπεφραγμένον χωρίον, ἐμβαδὸν ἢ ἐπιφάνεια τȣ͂ σχήματος· ὃ ϗ συντομίας χάριν σχῆμα ἁπλῶς καλέσομεν, ϗ τρίγωνον δὲ, τετράγωνον κ.τ.λ. εἰπόντες, τὰς αὐτῶν ἐπιφανείας ἐκληψόμεθα.

189. Ἐπιφάνεια ἐπίπεδος μὲν, ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδον, ὀνομάζεται, ὅταν τὰ ἐπ᾽ αὐτȣ͂ σημεῖα, ὔτε ταπείνωμα, ὔθ᾽ ὕψωμα, σχηματίζȣσι· κοίλη δὲ, ὅταν ταπείνωμα· κυρτὴ δὲ τέλος, ὅταν ὕψωμα· ἐπίπεδος μὲν τὰ πολλὰ ἐςὶν ἡ τȣ͂ κατόπτρȣ ἐπιφάνεια· κυρτὴ δὲ ἡ ἄγγȣς τινὸς ὑαλίνȣ, κύλικος φέρε, ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια· κοίλη δὲ, ἡ ἐσωτερικὴ αὐτῆς κενῆς ὔσης.

Τρίγωνον ἀκȣ́ει τὸ ὑπὸ τριῶν πλευρῶν περιεχόμενον σχῆμα· (σχ. 41).

190. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τρία ἁτιναȣ͂ν σημεῖα, μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κείμενα, διὰ τριῶν ἐπιζευγνύμενα εὐθειῶν, ποιȣ͂σιν ἀεὶ τὸ τρίγωνον· λέγω μὴ ἐπ᾽ εὐθείας· ἡ γὰρ εὐθεῖα περικλείειν χωρίον ȣ̓ δύναται, ὔτε σχῆμα περιέχειν (188), ὔτε τρίγωνον ἑπομένως.

191. Τετράπλευρον δὲ ὀνομάζεται τὸ ὑπὸ τεττάρων πλευρῶν περιεχόμενον σχῆμα (σχ. 52.)· πεντάγωνον δὲ τὸ ὑπὸ πέντε· ἑξάγωνον δὲ, τὸ ὑπὸ ἓξ· ἑπτάγωνον δὲ, τὸ ὑπὸ ἑπτά· ὀκτάγωνον δὲ, τὸ ὑπὸ ὀκτώ. Τέλος δὲ, ἐὰν τὸ σχῆμα ὑπ᾽ ἀπειραρίθμων πλευρῶν ἰσαλλήλων περιέχηται, ϗ ἀπειροςῶν δὲ τῶν αὐτῶν, ϗ ἀπειροςῶς δὲ ἐπ᾽ ἀλλήλας κεκλιμένων, τὸ σχῆμα κληθῆναι κύκλος δυνηθήσεται (25, 34).

192. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἆρα α΄. τὸ μὲν τρίγωνον ἁπλȣςατόν ἐςι πάντων τῶν σχημάτων· β΄. τὸ τρίγωνον ϗ ὁ

κύκλος ὥσπερ δύω ἄκροι ὅροι ἑςήκασι μεταξὺ τῶν ἀπειραρίθμων δυνατῶν σχημάτων, συμποικιλλομένων τῷ τῶν πλευρῶν ἀριθμῷ.

193. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δίκην ἓν παραθέσεως ὅρων ξυντελῦσι τὰ δύω ταῦτα σχήματα πᾶσι τοῖς ἄλλοις· ϗ τοίνυν τὰς ἰδιότητας τῶν παντοίων ἑτεροειδῶν σχημάτων, ὡς ἐκ τῶν κατ᾽ αὐτὰ γωνιῶν ϗ πλευρῶν, ϗ τῆς αὐτῶν ἐπιφανείας, γνωσόμεθα διά τε τῶν τριγωνικῶν, ϗ τῶν κυκλικῶν ἰδιοτήτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τριγώνου.

194. Τὸ τρίγωνον, ὡς μὲν ἐκ τῶν ἐν αὐτῷ γωνιῶν θεωρέμενον, ἐὰν μὲν ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθὴν, ὀρθογώνιον (σχ. 41.)· ἐὰν δὲ μίαν ἀμβλεῖαν, ἀμβλυγώνιον (σχ. 42.)· ἐὰν δὲ πάσας ὀξείας, ὀξυγώνιον ἤκεσε (σχ. 43.).

195. Ἐκ δὲ τῶν πλευρῶν, ἰσόπλευρον μέν ἐςιν, ἐὰν ὦσι πᾶσαι αἱ πλευραὶ αὐτῦ ἰσάλληλοι (σχ. 44)· ἰσοσκελὲς δὲ, ἐὰν δύω· σκαληνὸν δὲ, ἐὰν πᾶσαι ὦσιν ἀλλήλαις ἄνισοι (σχ. 42, 43.).

196. Τριγώνυ ὕψος καλεῖται κάθετος ἀγομένη ἀπό τινος γωνίας ἐπὶ τὴν ὑποτείνυσαν αὐτὴν πλευρὰν, ἣ τηνικαῦτα ἰδίῳ ὀνόματι καλεῖται βάσις· ἐν ὖν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΔΓ (σχ. 41.), τιθεμένης ὡς βάσεως τῆς ΔΓ πλευρᾶς, τὸ ὕψος αὐτῦ ἔσαι ἡ ΑΔ πλευρὰ, ἡ τῇ βάσει κάθετος ἐφεςηκῦα. Τὸ παντὸς μέντοι ἄλλυ τριγώνυ τῦ ΑΓΠ (σχ. 42.) ὕψος θηρεύεται, καταγομένης κα-

θέτε ἔκτινος γωνίας τῆς Α ἐπὶ τὴν ἀντίθετον αὐτῇ πλευρὰν ΑΓ, ὡς βάσιν λαμβανομένην, ἥτις, εἴπῃ παρείκοι, ϗ προάγεται εἰς τὸ τὴν κάθετον αὐτῇ ἐμπεσεῖν.

197. Δύω τρίγωνα, ἀλλήλοις παραβαλλόμενα, ἴσα καλῦνται, ὅταν τὰς πλευρὰς ϗ τὰς γωνίας ἴσας ἔχωσιν ἑκάςην ἑκάςῃ (σχ. 45.).

198. Ὅμοια τρίγωνα λέγονται, ὅταν τὰς γωνίας μόνον ἴσας ἔχωσιν ἑκάςην ἑκάςῃ, τοῦ κατὰ τὰς πλευρὰς μεγέθες ἀλογεμένε· ὅτως (σχ. 46.) ἐὰν παρὰ τὴν Α κοινὴν γωνίαν τῶν δυοῖν τριγώνων ΑοΗ, ΑΖΔ, ᾖ $o=Z$, ϗ $H=\Delta$, τὸ τρίγωνον ΑοΗ ἔςαι ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΑΖΔ διὰ τὴν ἰσότητα πασῶν τῶν ἀντιςοίχων γωνιῶν, καίτοι ἄνισον αὐτῷ ὂν διὰ τὴν ἀνισότητα τῶν ἀντιςοίχων πλευρῶν.

Τριγώνῳ κύκλος ἐγγεγραμμένος ἐςὶν, ὅταν κύκλος διήκῃ διὰ τῶν ἐν αὐτῷ τριῶν κορυφῶν (σχ. 43.).

199. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Εἴδομεν ἤδη ὡς τρία σημεῖα συνιςῶντα τὰς τρεῖς τῦ τριγώνε κορυφὰς, ἐπ᾽ εὐθείας κεῖσθαι ἐδέποτε δύνανται (190)· ἀλλὰ διὰ τριῶν σημείων μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων κύκλος ἀεὶ διϊέναι δύναται (166)· διὰ τῶν τριῶν ἄρα κορυφῶν παντὸς τριγώνε κύκλος διελθεῖν δύναται, ὅ ἐςι πᾶν τρίγωνον κύκλω ἐγγραφῆναι δύναται.

200. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Πᾶν ἄρα τρίγωνον ὡσπερεὶ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον νοῆσαι ἔχομεν, κύκλον τὰς τρεῖς αὐτῦ κορυφὰς διήκοντα ἐπενθυμέμενοι.

201. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἔςω ἔν τρίγωνον ἅπαν τὸ ΑΠΓ (σχ. 43), ἐγγεγραμμένον κύκλῳ τῷ ΑΠΓδ· ἡ ἔν ἑκάςην τῦ τριγώνε γωνίαν ὑποτείνεσα πλευρὰ ἔςαι χορδὴ τόξε, ἔ τὸ ἥμισυ ἔςι μέτρον αὐτῆς τῆς γωνίας· ἡ τὴν Γ γω-

νίαν ὑποτείνȣσα ΑΠ ἔςαι χορδὴ τȣ͂ ΠΒΑ τόξȣ, ȣ͂ τὸ ἥμισυ καταμετρεῖ τὴν πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίαν ΠΓΑ (176)· ἡ δὲ ΠΓ πλευρὰ χορδὴ ἔςαι τȣ͂ ΠδΓ τόξȣ, ȣ͂ τὸ ἥμισυ τὴν ὑπὸ ΠΑΓ καταμετρεῖ γωνίαν, ὑφ᾽ ἣν ἡ ΠΓ πλευρὰ ὑποτείνει· ὡσαύτως δὲ ϗ ἡ ΑΓ.

202. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Πᾶσα ἄρα τριγώνȣ κύκλῳ ἐγγεγραμμένȣ πλευρὰ ἐκληφθείη ἂν ὡς χορδὴ τόξȣ διπλασίȣ, ἢ τȣ͂ μετρȣ͂ντος τὴν γωνίαν, ὑφ᾽ ἣν ἡ πλευρὰ ὑποτείνει· ϗ δὴ ἐξέςαι περὶ ἑκάςης πλευρᾶς τȣ͂ τριγώνȣ, παραβαλλομένης πρὸς ἣν ὑποτείνει γωνίαν, εἰπεῖν πάνθ᾽ ὅσα εἴρηται περὶ πάσης χορδῆς τȣ͂ κύκλȣ, παραβαλλομένης πρὸς ὃ ὑποτείνει τόξον· ἐντεῦθεν ἄρα ἐπαγαγεῖν εὐθέως ἐξέςαι.

203. ά. Ἐν παντὶ τριγώνῳ τῷ ΑΠΓ ἡ μείζων πλευρὰ ὑπὸ τὴν μείζω γωνίαν ὑποτείνει, ὥσπερ ϗ ὑπὸ τὸ μεῖζον τόξον ἡ μείζων χορδή· ϗ τȣ̓ναντίον, ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· ἡ γὰρ ΠΓ ἔςι, φέρ᾽ εἰπεῖν, ἡ μείζων πασῶν τῶν πλευρῶν· ϗ ἡ Α δὲ γωνία ἔςι τῶν ἄλλων μείζων, ὑφ᾽ ἣν αὕτη ὑποτείνει· τῆς δὲ ΑΓ ἐλάττονος ȣ̓́σης ἑκατέρας τῶν δύω ἄλλων πλευρῶν, ϗ ἡ Π γωνία, ὑφ᾽ ἣν ὑποτείνει ἡ ΑΓ, ἐλάττων ἐςὶν ἑκατέρας τῶν δύω λοιπῶν γωνιῶν.

204. β΄. Τριγώνȣ δύω πλευραὶ ἴσαι ὑπὸ δύω γωνίας ἴσας ὑποτείνȣσιν, ὡς ϗ δύω ἴσαι χορδαὶ κύκλȣ ὑπὸ ἴσα τόξα ὑποτείνȣσι· ϗ τ᾽ ἀνάπαλιν, δύω γωνίαι τριγώνȣ ἴσαι ἴσαις πλευραῖς ὑποτείνονται.

205. γ΄. Ἄρα τριγώνȣ ἰσοπλεύρȣ τȣ͂ ΠΓΑ (σχ. 44) αἱ τρεῖς γωνίαι Π, Γ, Α ἰσάλληλοί εἰσιν ἐξ ἀνάγκης· ϗ τȣ̓ναντίον, ȣ͂ τριγώνȣ αἱ τρεῖς γωνίαι ἰσάλληλοί εἰσιν, ἐκεῖνο ἰσόπλευρόν ἐςι.

206. δ΄. Τριγώνου ἰσοσκελοῦς ἐξ ἀνάγκης δύω γωνίαι ἴσαι εἰσί· καὶ δύω γωνιῶν ἰσαλλήλων οὐσῶν ἐν τριγώνῳ, ἰσοσκελές ἐστι τὸ τρίγωνον.

207. ε΄. Τριγώνου σκαληνοῦ (σχ. 43) αἱ τρεῖς γωνίαι ἄνισοι ἀλλήλαις εἰσί· καὶ οὗ τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι ἄνισοί εἰσιν, ἐκεῖνο σκαληνόν ἐστι.

208. Σημειώσεως ἄξιον, ὡς αἱ πλευραὶ οὐκ εἰσὶν ἀνάλογοι ταῖς, ὑφ' ἃς ὑποτείνουσι, γωνίαις· ὥσπερ ἀμέλει καὶ αἱ χορδαὶ συναύξουσι μὲν καὶ συναπομειοῦνται τοῖς τόξοις, αὐτοῖς μέντοι ἀναλογοῦσιν ἥκιστα (54).

209. Θεώρημα στοιχειῶδες. Παντὸς τριγώνου τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ὑπὸ ἡμικυκλίου μετρεῖται, ὅ ἐστιν, αἱ τρεῖς παντὸς τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἅπαν τρίγωνον, ὅσον ἂν ᾖ ἀκανόνιστον, ἐγγεγραμμένον ὑποτεθῆναι δύναται κύκλῳ (199), ὡς τὸ ΠΓΑ· ἀλλὰ τῆς μὲν Π γωνίας μέτρον ἐστὶ τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑνΓ (176)· τῆς δὲ Α, τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΠδΓ· τῆς δὲ Γ, τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΠΒΑ· ἄρα τῶν τριῶν γωνιῶν ὁμοῦ Π, Γ, Α μέτρον ἐστὶ τὸ $\frac{1}{2}$ ΑνΓ + $\frac{1}{2}$ ΠδΓ, + $\frac{1}{2}$ ΠΒΑ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου κύκλου ΠΒΑΓΔ, εἴτ' οὖν τὸ μέτρον τῶν δύω ὀρθῶν γωνιῶν (91) Ο. Ε. Δ.

210. ΠΟΡΙΣΜΑ. Α΄. α. Ἐὰν τριγώνου μία γωνία ᾖ ὀρθὴ, αἱ λοιπαὶ δύω ἐξ ἀνάγκης ἔσονται ἑκατέρα ὀξεῖα· μιᾶς γὰρ οὔσης ὀρθῆς, αἱ λοιπαὶ δύω ὀρθῇ μιᾷ ἰσωθήσονται· ἑκατέρα ἄρα ὀρθῆς ἔσται ἐλάττων, ὅ ἐστιν ὀξεῖα· β΄. τῶν δύω γωνιῶν ἐγνωσμένων, ἀφαιρέσει τούτων ἀπὸ 180°, γνωσθήσεται καὶ ἡ τρίτη· γ΄. μιᾶς ἐγνωσμένης, ἀφαιρέσει ταύτης ἀπὸ 180°, γνωσθήσεται τὸ ἄθροισμα τῶν λοιπῶν δύω.

211. ΟΡΙΣΜΟΣ. Γωνίας καλεῖται παραπλήρωμα γωνία, ἣ σὺν γωνίᾳ δοθείσῃ, γωνίαν ὀρθὴν συμπληροίη, ἢ ἡ μετὰ δοθείσης γωνίας ἰσȣμένη 90°· ἀναπλήρωμα δὲ, ἡ μετὰ γωνίας δοθείσης ἀναπληρȣ̃σα τὸ ἄθροισμα ὀρθῶν γωνιῶν δύω (σχ. 2)· ὅτως ἡ μὲν ὑπὸ ΑΠΖ γωνία παραπλήρωμά ἐςι τῆς ὑπὸ ΖΠΟ γωνίας, ὡς ἐκείνη σὺν ταύτῃ γωνίαν παραπληρȣ̃σα 90°· ἡ δὲ ΖΠΟ ἀναπλήρωμά ἐςι τῆς ΖΠβ, ἅτε δὴ ὁμȣ̃ ἄμφω ἀναπληρȣ̃σαι δύω ὀρθὰς, ὧν μέτρον ἐςὶν 180°.

212. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Τριγώνȣ ὀρθογωνίȣ τȣ̃ ΑΓΔ (σχ. 41) τῶν δύω ὀξειῶν γωνιῶν Α, Γ ἑκατέρα μὲν παραπλήρωμά ἐςι θατέρᾳ· ἄμφω δὲ ἀναπλήρωμα τῆς ὀρθῆς Δ.

213. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Εἴπερ παντὸς ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ αἱ παρὰ τὴν ὀρθὴν εἰσὶν ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ὀξεῖα, πολλῷ μᾶλλον ἔσονται τȣ̃το ἑκατέρα τῶν παρὰ τὴν ἀμβλεῖαν γωνιῶν παντὸς ἀμβλυγωνίȣ τριγώνȣ· ἄρα α΄. πᾶν τρίγωνον ȣ̓ δύναται ἔχειν ὀρθὰς γωνίας δύω, μήτι γε δύω ἀμβλείας, ȣ̓́τε μὴν ὀρθὴν μίαν, καὶ μίαν ἀμβλεῖαν· β΄. ἀμβλυγωνίȣ παντὸς τριγώνȣ τὸ μέτρον τȣ̃ ἀθροίσματος τῶν δύω ὀξειῶν γωνιῶν ἔςαι ἔλαττον ἢ 90°.

214. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τριγώνȣ ἀμβλυγωνίȣ ἡ ἀμβλεῖα γωνία ἐπαύξεσθαι δύναται μέχρι τȣ̃ παραλήγοντος λεπτȣ̃ τῶν 180° (93), εἶτ᾽ ȣ̓͂ν δύναται εἶναι ἀπείρως μείζων τȣ̃ ἀθροίσματος τῶν δύω ἄλλων γωνιῶν· ἐκ τȣ́τȣ μέντοι ȣ̓ δύναται καὶ ἡ τὴν ἀμβλεῖαν ὑποτείνȣσα πλευρὰ ἀπείρως εἶναι μείζων τȣ̃ ἀθροίσματος τῶν δυεῖν ἄλλων πλευρῶν, ἀλλ᾽ ȣ̓δ᾽ ἐξισȣ̃σθαι αὐταῖς ἔχει· ἔςι μὲν γὰρ ἡ Π γωνία (σχ. 48) πολλῷ μείζων τῶν δυεῖν λοιπῶν ἅμα ληφθεισῶν Α, Γ· ἀλλ᾽ ἡ ταύτην ὑποτείνȣ-

σα πλευρὰ ΑΓ, πρὸς τῷ μὴ εἶναι μείζων, ϗ ἐλάττων ἐςὶν ἀναγκαίως τȣ̃ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν πλευρῶν ΑΠ, ΠΓ τῶν τὰς δύω λοιπὰς ὑποτεινȣσῶν γωνιας· ἡ μὲν γὰρ ΑΓ ἔςιν εὐθεῖα, ἡ δὲ ΑΠ + ΠΓ = ΑΠΓ ἔςι γραμμὴ γωνιώδης, ϗ δὴ μείζων τῆς ΑΓ εὐθείας (17)· ἐντεῦθεν μᾶλλον καταφαίνεται, ὡς τριγώνȣ ὑπὸ τὴν μείζω μὲν γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ȣ̓ μέντοι παρὰ τȣ̃το αἱ γωνίαι ἀνάλογοι ὑπάρχȣσι ταῖς αὐτὰς ὑποτεινȣ́σαις πλευραῖς.

215. ΟΡΙΣΜΟΣ. Γωνία ἐκτὸς τριγώνȣ καλεῖται ἡ περιεχομένη ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς ΠΓ ϗ ἑτέρας προεκβληθείσης τῆς ΑΠ· προσκειμένη δὲ ἡ ἐφεξῆς τῆς ἐκτὸς, ἥπερ ἐντὸς τȣ̃ τριγώνȣ κεῖται· οἷα ἡ Ρ.

216. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἡ ἐκτὸς γωνία παντὸς τριγώνȣ ἡ ε ἴση ἐςὶ ταῖς παρὰ τὴν προσκειμένην δυσὶν ἐντὸς τȣ̃ τριγώνȣ γωνίαις Α, Γ· ϗ γὰρ $\varepsilon + P = 180^\circ$ (98)· ἀλλὰ $P + A + \Gamma = 180^\circ$ (220)· ἄρα $A + \Gamma = 180^\circ - P$· ἀλλὰ $\varepsilon = 180^\circ - P$· ἄρα $\varepsilon = A + \Gamma$.

217. ΘΕΩΡΗΜΑ. Παντὸς ἰσοσκελȣ̃ς τριγώνȣ ΑΠΓ ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς τῇ βάσει κάθετος ἀγομένη ΑΘ (σχ. 42) δίχα τέμνει α΄. τὴν βάσιν ΠΓ· β΄. τὴν γωνίαν Α.

ΔΕΙΞΙΣ. Κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαςήματι δὲ τῷ ΑΠ γεγράφθω τόξον τὸ ΓοΠ· εὔδηλον ȣ̓̃ν ὡς ἡ ΑΘο ἀκτὶς, κάθετος τῇ ΠΓ χορδὴ, δίχα τέμνει α΄. τὴν χορδὴν αὐτὴν ΠΓ· β΄. τὴν γωνίαν Α (157, 159)· Ο. Ε. Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ ὁμοίων τριγώνων.

218. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τρίγωνα, ὧν δύω γωνίαι δυσὶ γωνίαις εἰσὶν ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅμοιά εἰσιν.

ΔΕΙΞΙΣ. Δύω γὰρ τριγώνων τῶν ΑΖΔ, ηΧδ (Σχ. 46) ἔςω Α=η ϗ Δ=δ· ἔςαι δὴ ϗ Ζ=χ, κἀκ τούτου τὰ δύω τρίγωνα ὅμοια (198)· ἔςι γὰρ ἐν τῷ μὲν ΑΖΔ τριγώνῳ Α+Ζ+Δ=180° (209)· ἐν δὲ τῷ ηΧδ τριγώνῳ η+Χ+δ=180°· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως Α+Δ =η+δ· ἄρα 180°—Α—Δ=180°—η—δ (Ἀριθ. 14), ὅ ἐςι Ζ=Χ. Ο. Ε. Δ.

219. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἵν' οὖν ἐπὶ χάρτου ποιήσωμεν τρίγωνον ὅμοιον τῷ κατὰ γῆν ΑΖΔ, πρᾶξις συχνὴ ἐν τῇ πρακτικῇ Γεωμετρίᾳ· α΄. διὰ τοῦ γραφομέτρου μετρείσθωσαν δύω γωνίαι αἱ Α, Δ τοῦ ΑΖΔ μεγάλου τριγώνου (87)· β΄. ἤχθω ἐπὶ τοῦ χάρτου εὐθεῖά τις ἡ ηδ, ϗ ἐκ τῶν κατ' αὐτὴν περάτων διὰ τοῦ ἀναγωγέως ἤχθωσαν αἱ ηΧ, δΧ ὑπὸ γωνίας τὰς η, δ ἴσας ταῖς κατὰ γῆν Α, Δ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ (84). Τὸ οὖν μικρὸν τρίγωνον ηδΧ τὸ οὕτως ἐπὶ τοῦ χάρτου κατασκευασθὲν, ἔχον δύω γωνίας δυσὶ γωνίαις τοῦ κατὰ γῆν ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ὅμοιον αὐτῷ ἔσεται (218).

220. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐὰν τριγώνου αἱ τρεῖς πλευραὶ τριγώνου τρισὶ πλευραῖς ὦσι παράλληλοι, ὅμοιά εἰσι τὰ τρίγωνα· ἐμπεριεχέσθω γὰρ τὸ ἔλαττον τῶν δύω τριγώνων τῷ μείζονι (Σχ. 49), ϗ τὰς ἑαυτοῦ πλευρὰς παραλλήλους ἐχέτω ταῖς τοῦ μείζονος· φημὶ δὴ, ὡς τὰ

ΑΔΠ, δχΘ εἰσὶν ὅμοια· προεκβληθείσης γὰρ ἑκατέρωθεν τῆς χΘ πλευρᾶς τȣ̃ ἐλάττονος τριγώνȣ ἐς τὰς δύω πλευρὰς τȣ̃ μείζονος, ἡ ὑπὸ ΘοΠ γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ Θχδ (132), ἀλλὰ ϗ ο=Α (αὐτόθ.) ἄρα ἡ τȣ̃ ἐλάττονος γωνία χ=Α γωνίᾳ τȣ̃ μείζονος· διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον ϗ ἡ Θ γωνία τȣ̃ ἐλάττονος ἴση τῇ Δ γωνίᾳ τȣ̃ μείζονος. Τὸ ἔλαττον ἄρα τρίγωνον χδΘ, ἔχον δύω γωνίας ἴσας δυσὶ γωνίαις τȣ̃ μείζονος ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ὅμοιον αὐτῷ ἔςαι (218).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Δύω τρίγωνα, ὧν ἀλλήλαις αἱ πλευραὶ κάθετοι ἐφεςήκασιν, ἔςιν ὅμοια· ἔςωσαν γὰρ τριγώνȣ τȣ̃ ΘΖΜ (σχ. Α. 49) αἱ πλευραὶ κάθετοι ταῖς τȣ̃ ΑΒΓ, ϗ περιήχθω περὶ τὸ σημεῖον Θ τὸ τρίγωνον ΖΘΜ, μέχρις ἂν ἡ ΘΖ εὐθεῖα κυκλικὸν καταγράψῃ τεταρτημόριον· δῆλον ȣ̃ν ὅτι ἡ μὲν τῇ ΑΓ κάθετος ΖΘ παράλληλος ἔςαι τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ΘΜ τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ΖΜ τῇ ΒΓ, τȣ̃τ᾽ ἔςιν αἱ θατέρȣ τριγώνȣ πλευραὶ ταῖς θατέρȣ παράλληλοι ἔσονται ἑκάςη ἑκάςῃ, ϗ δὴ τὰ τρίγωνα ὅμοια (ἀνωτ.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ ἴσων τριγώνων.

221. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δύω τρίγωνα ΑΠΔ, χπδ ἴσα (σχ. 45) ἔσονται, ἑνὸς δοθέντος τῶν τριῶν· ά. ἐὰν τὰ δύω τρίγωνα μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἔχωσι, ϗ δύω γωνίας δυσὶ γωνίαις ταῖς πρὸς ταύτῃ τῇ πλευρᾷ ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· β΄. ἐὰν δύω πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ἴσας ἔχωσι, ἔχωσιδὲ ἴσην ϗ τὴν

ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν· γ΄. ἐὰν τὰς τρεῖς πλευρὰς ταῖς τρισὶ πλευραῖς ἑκάςην ἑκάςῃ ἴσας ἔχωσι.

α΄. Ἔςω ΔΑ = δχ, ϗ Δ = δ, ϗ Α = χ· φημὶ δὴ, ὅτι τὰ τρίγωνα εἰσὶν ἴσα· ἐπινενοήσθω γὰρ ἡ δχ ἐπιτεθειμένη τῇ ἴσῃ ΔΑ, τȣ̃ μὲν δ πίπτοντος ἐπὶ τὸ Δ, τȣ̃ δὲ χ ἐπὶ τὸ Α· ἐπεὶ δὲ ἔςι δ = Δ, ϗ χ = Α, ἐὰν ἐπινοηθῇ ϗ ὅλον τὸ τρίγωνον δπχ ἐπιτεθειμένον· ὅλῳ τῷ τριγώνῳ ΔΠΑ, ἡ μὲν πχ πλευρὰ ἐφαρμόσει τῇ ΠΔ πλευρᾷ, ἡ δὲ πδ ἐφαρμόσει τῇ ΠΔ. Τὸ ἄρα χπδ τρίγωνον ἀπολύτως συνενωθήσεται τῷ ΔΠΑ. Τριγώνῳ, καὶ ὡς ἓν αὐτῷ ἐκλογισθήσεται, τȣτέςιν ἔσεται αὐτῷ ἴσον.

β΄. Ἔςω ΔΑ = δχ, ϗ ΠΑ = πχ, ϗ Α = χ· φημὶ δὴ ὡς ἴσα ἔσονται τὰ τρίγωνα· ἐπινενοήσθω γὰρ αὖθις ἡ δχ ἐπικειμένη τῇ ΔΑ, ϗ, ἐπεὶ Α = χ, ϗ πχ = τῇ ΠΑ, ἡ δχ ἀκριβῶς ἐφαρμόσει τῇ ΔΑ, ὡς αὐτῇ ἴσῃ, ϗ ἡ πχ τῇ ΠΑ· ὅκȣ̃ν τὸ μὲν δ σημεῖον συμπεσεῖται τῷ Δ, τὸ δὲ σημεῖον π τῷ Π, κἀκ τȣ́τȣ ϗ ἡ πδ πλευρὰ συμπεσεῖται τῇ ΠΔ, ϗ ἀκριβῶς αὐτῇ ἐφαρμοσθήσεται· ϗ δὴ αὖθις τὰ τρίγωνα ἓν γεγονότα, ἴσα ἔσονται.

γ΄. Ἐὰν αἱ τρεῖς πλευραὶ ταῖς τρισὶ πλευραῖς ἑκάςῃ ἑκάςῃ ἴσαι ὦσι, ϗ ὅτω τὰ τρίγωνα ἴσα ἔσονται· ϗ γὰρ τῆς πχ πλευρᾶς ἴσης ὅσης τῇ ΠΑ, ϗ τῆς δχ τῇ ἀντιςοίχῳ αὐτῇ ΔΑ, ἡ δπ ȣ̓κ ἂν εἴη ἴση τῇ ἀντιςοίχῳ ΔΠ, εἰ μὴ εἴη ἡ χ γωνία, ὑφ᾽ ἣν ὑποτείνει ἡ δπ, ἴση τῇ Α, ὑφ᾽ ἣν ὑποτείνει ἡ ΔΠ (204)· ἐπεὶ τοίνυν ἔςι πχ = ΠΑ, ϗ δχ = ΔΑ, ϗ χ = Α, τὰ τρίγωνα ἴσα ἔςαι (221 β΄.).

222. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἵνα κατασκευασθῇ τρίγωνον

ἴσον τριγώνῳ δοθέντι τῷ ΔΠΑ, ἔτινος γινώσκεται μία πλευρὰ ἡ ΑΠ, ϗ αἱ πρὸς αὐτῇ γωνίαι Α, Π, ἤχθω εὐθεῖα ἡ πχ ἴση τῇ δεδομένῃ πλευρᾷ ΑΠ, ϗ ἐκ τȣ̃ πέρατος αὐτῆς χ ὑπὸ γωνίαν ἴσην τῇ Α ἤχθω ἀδιόριςος ἡ χδ, ἐκ δὲ τȣ̃ π ὑπὸ γωνίαν π = Π ὡσαύτως ἡ πδ· αὗται ȣ̃ν αἱ εὐθεῖαι δχ, δπ τέμνȣσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ δ, ποιȣ̃σι τὸ ἐπιταχθὲν τρίγωνον πδχ ἴσον τῷ δοθέντι ΠΔΑ (221. α΄.)

223. Ἐγνωσμένων δὲ δύω πλευρῶν τῶν ΠΑ, ΠΔ, καὶ τῆς ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένης γωνίας Π, συνεςάσθω γωνία ἡ π = Π (85) ϗ ἤχθω πδ = ΠΔ, ϗ πχ = ΠΑ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ εὐθεῖα δχ· τὸ ȣ̃ν πδχ τρίγωνον, ȣ̃τω συγκροτηθὲν, ἴσον ἔςαι τῷ ΠΔΑ τριγώνῳ (αὐτ.)

224. Ἐγνωσμένων δὲ δύω πλευρῶν τῶν ΠΑ, ΠΔ, ϗ γωνίας τῆς Α, ὑφ᾽ ἣν ὑποτείνει μία τις τῶνδε τῶν πλευρῶν α΄. ἤχθω εὐθεῖα ἡ πχ ἴση τῇ ΠΑ, ϗ ἐκ τȣ̃ πέρατος χ τέρματος ἄτερ ὑψȣ́σθω ἡ δχ ὑπὸ γωνίαν χ = Α· β΄. διὰ τȣ̃ διαβήτȣ εἰλήφθω τὸ μῆκος τῆς ἑτέρας τῶν δοθεισῶν πλευρῶν ΠΔ, ϗ ἐκ τȣ̃ π ἐπὶ τῆς ἀδιορίςȣ εὐθείας σημειȣ́σθω ἡ πδ ἴση τῇ ΠΔ· ἡ ȣ̃ν ἐπιζευχθεῖσα δπ μετὰ τῶν ἄλλων δύω εὐθειῶν δχ, πχ συγκροτήσȣσι τρίγωνον τὸ πδχ ἴσον τῷ ΠΔΑ· αἱ γὰρ κατὰ τὴν κατασκευὴν ἴσαι πλευραὶ ΠΔ, πδ ὑποτείνȣσιν ἑκατέρα ὑπὸ γωνίας ἴσας τὰς Α, χ· ἐπεὶ δέ εἰσιν ἐκ κατασκευῆς ϗ αἱ ΠΑ, πχ ἴσαι, αἱ Δ, δ γωνίαι, ὑφ᾽ ἃς ὑποτείνȣσιν αἱ ἴσαι πλευραὶ, εἰσὶν ἴσαι· ἔςαι ἄρα ϗ Π = π· ἐπεὶ τοίνυν τῶν δυοῖν τριγώνων ΠΔΑ, πδχ, ἔςι ΠΔ = πδ, ϗ ΠΑ = πχ, ϗ Π = π γωνίαι δηλονότι ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχόμεναι, τὰ τρίγωνα εἰσὶν ἴσα (αὐτόθ.).

225. Δοθεισῶν δύω πλευρῶν τῶν ΠΑ, Πδ, (σχ. 50)

ᾧ μιᾶς γωνίας τῆς Α τῆς μίαν τῶν πλευρῶν τῶν δε, ὑποτεινέσης, τεθείθω εἷς τῶν τε διαβήτε ποδῶν ἐπὶ τὸ Π, ᾧ διαςήματι ἴσῳ θατέρᾳ τῶν δοθεισῶν πλευρῶν Πδ μετήχθω ἅτερος πὲς τε διαβήτε, εἴτε ἐπὶ τὸ ο, εἴτε ἐπὶ τὸ δ σημεῖον τῆς ἀδιορίςε Αδ, ᾧ ἐπεζεύχθω ἤτοι ἡ Πο· ὅθεν γενήσεται τὸ ΑΠο τρίγωνον· ἢ ἡ Πδ· ὅθεν ἔςαι τὸ ΠΑδ τρίγωνον, ὡς ἂν ᾖ βελομένοις τὴν ο γωνίαν, ἢ δ, ἀμβλεῖαν εἶναι, ἢ ὀξεῖαν.

226. Τέλος δὲ, ἐὰν δοθῶσιν αἱ τρεῖς πλευραὶ ΠΔ, ΠΑ, ΔΑ (σχ. 51), εἰς κατασκευὴν τριγώνε· α΄. ἤχθω εὐθεῖα ἡ ΔΑ ἴση μιᾷ τῶν δοθεισῶν πλευρῶν, ᾧ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαςήματι δὲ τῷ ΔΠ ἴσῳ μιᾷ τινι τῶν λοιπῶν δοθεισῶν πλευρῶν, γεγράφθω τόξον τὸ Ζχ· β΄. κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαςήματι δὲ τῷ ΑΠ, ἴσῳ τῇ τρίτῃ τῶν δοθεισῶν πλευρῶν, γεγράφθω τόξον τὸ οΠΗ· γ΄. ἐκ τε σημείε, καθ' ὃ διατέμνεσιν ἄλληλα τὰ τόξα, ἐπεζεύχθων δύω εὐθεῖαι αἱ ΠΔ, ΠΑ· ᾧ δὴ γενήσεται τὸ ΠΔΑ τρίγωνον ἴσον τῷ ἐπιταχθέντι· τῶν γὰρ τριῶν πλευρῶν τε ΠΔΑ τριγώνε ἴσων ἐσῶν (ἐκ κατασκευῆς) ταῖς συςοιχέσαις πλευραῖς τε ἐπιταχθέντος τριγώνε, τὸ γινόμενον ᾧ τὸ δοθὲν ἴσα ἔσονται (221. γ΄.).

227. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐντεῦθεν ἄρα πρόδηλον, ὡς εἰς κατασκευὴν τριγώνε ἰσοπλεύρε τε ΠΓΑ (σχ. 44), ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΠΑ, ἀρκέσει κέντροις τοῖς Α, Π, διαςήματι δὲ τῷ αὐτῷ ΑΠ γεγράφθαι τόξα δύω τὰ ΑΓΔ, ΠΓΗ, ᾧ ἐπεζεῦχθαι τὰς εὐθείας ΠΓ, ΑΓ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ τετραπλεύρων.

228. Ἐὰν τὸ τετράπλευρον μηδόλως ἔχῃ πλευρὰς παραλλήλους, καλεῖται Τραπεζοειδὲς (σχ. 52)· ἐὰν δὲ ἔχῃ δύω παραλλήλους, Τραπέζιον (σχ. 53), ἐὰν δὲ πάσας σὺν δύω λαμβανομένας, γενικῷ ὀνόματι καλεῖται Παραλληλόγραμμον (σχ. 54, 55, 56, 57).

229. Παραλληλόγραμμον (σχ. 54), οὗ πᾶσαι αἱ γωνίαι εἰσὶν ὀρθαὶ, καλεῖται ὀρθογώνιον· περὶ οὗ ἰςέον, ὡς τοῦτο μὲν ἁπλῶς ὀρθογώνιον ὀνομάζεται, τὸ δὲ ὀρθὴν γωνίαν ἔχον τρίγωνον μετὰ προσθήκης τοῦ οὐσιαςικοῦ, λέγεται τρίγωνον ὀρθογώνιον.

230. Τὸ ὀρθογώνιον, ὅ ἐςι τὸ ἐν ὀρθαῖς γωνίαις παραλληλόγραμμον, διαιρεῖται εἰς τετράγωνον, καὶ εἰς ὀρθογώνιον ἐπίμηκες· καὶ τὸ μὲν τετράγωνον ἐςι παραλληλόγραμμον (σχ. 54), οὗ αἵτε γωνίαι πᾶσαι ὀρθαὶ, καὶ αἱ πλευραὶ ἴσαι· τὸ δ' ἐπίμηκες ὀρθογώνιον ἐςι παραλληλόγραμμον, οὗ πᾶσαι αἱ γωνίαι ὀρθαὶ (σχ. 55), αἱ δ' ἀπ' ἐναντίον πλευραὶ μόνον ἴσαι.

231. Τὸ παραλληλόγραμμον διαιρεῖται εἰς ὀρθογώνιον, περὶ οὗ ἄρτι εἰρήκαμεν, καὶ εἰς πλαγιογώνιον, οὗ ἀμέλειτοι αἱ γωνίαι ἄνισοι, ὡς τὰς μὲν δύω εἶναι ἀμβλείας, τὰς δὲ δύω ὀξείας (σχ. 56, 57)· τὸ δὲ πλαγιογώνιον ὑποδιαιρεῖται εἰς Ῥόμβον, καὶ Ῥομβοειδές· καὶ ῥόμβος μὲν ἐςι παραλληλόγραμμον, ἐκ μὲν γω-

νιῶν ἀνίσων ἐκ δὲ πλευρῶν ἴσων συνιςάμενον (σχ. 56)· Ῥομβοειδὲς δὲ, ȣ̓ αἵτε γωνίαι ϗ πλευραὶ ἄνισοι (σχ. 57).

232. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν μὲν τοῖς τριγώνοις δέδεικται, ὡς, τῶν γωνιῶν ἴσων ȣ̓σῶν, ϗ αἱ ἀντίςοιχοι πλευραὶ ἴσαι ἔσονται, ϗ ἀντιςρόφως· ἀλλ' ἐκ μόνης τῆς τῶν προεκτεθέντων σχημάτων ἐποπτείας, ὡς ȣ̓ ταὐτὸν κρατεῖ κἀπὶ τῶν τετραπλεύρων, συνιδεῖν ἑκάςῳ καταφανές.

233. Τὸ τȣ͂ παραλληλογράμμȣ ὕψος, κάθετος ἐμφαίνει ἡ ΗΟ (σχ. 57), ἡ ἐκ μιᾶς ἐπὶ τὴν ἀντίθετον ἀγομένη πλευράν.

234. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸ τȣ͂ τριγώνȣ ὕψος, ὅπερ ἐςιν, ἴδȣσι (196)· ἤδη δὲ ϗ τὸ τȣ͂ παραλληλογράμμȣ ὁρισαμένοις, ἐν γένει νῦν ὁριςέον τὸ παντὸς σχήματος, ἢ ἐπιφανείας, ὕψος εἶναι ἀεὶ εὐθεῖαν κάθετον καταγομένην μιᾷ τινι τῶν τȣ͂ σχήματος πλευρῶν βάσεως δίκην ἐκληφθείσῃ· τȣ́των τεθέντων φαμέν.

Ἐπιφάνεια πᾶσα περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύω εὐθειῶν, ὧν ἡ μέν ἐςι βάσις, ἡ δὲ ὕψος τῆς ἐπιφανείας, ἢ σαφέςερον εἰπεῖν, γίνεται πολλαπλασιασμῷ τȣ͂ πλάτȣς ἐπὶ τὸ μῆκος· εὐθείας μέντοι ληφθείσης ἐν ἐπιφανείᾳ ὡς μήκȣς, ἢ βάσεως, ϗ ὡς ἀριθμȣ͂ πολλαπλασιαςέȣ, ȣ̓ δεῖ τιθέναι εἰς πλάτος, ἢ ὕψος, ϗ δὴ εἰς πολλαπλασιαςὴν, πλαγίαν εὐθεῖαν· ἐν μὲν γὰρ τῷ τριγώνῳ ἡ ἐκ κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν, ἐν δὲ τῷ παραλληλογράμμῳ ἡ ἀπὸ πλευρᾶς ἐφ' ἑτέραν κάθετος ἔςι μία (115, 127)· ἡ μέντοι πλαγία ἐπ' ἄπειρον ποικίλλεσθαι δύναται (119)· ἔνθεντοι ἀχρηςεῖ πρὸς ἐπιφανείας ἐκμέτρησιν.

235. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὁρισαμένοις ȣ̓͂ν ἅπαξ (225) τὸ παραλληλόγραμμον δεῖξαι δυνατὸν ἐπὶ δύω ἀντιθέτων πλευρῶν, εἰς τὰς ἄλλας δύω ὥσπερ ἐμπιπτȣσῶν,

πάνθ᾽ ὅσα δέδεικται ἐπ᾽ εὐθείας εἰς δύω ἐμπιπτούσης παραλλήλους· ἀμέλειτοι δύω ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κείμεναι γωνίαι αἱ Α, Ι ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς, ὡς οὖσαι δύω ἐπὶ τὰ αὐτὰ γωνίαι τῆς εἰς τὰς ΑΒ, ΙΠ παραλλήλους ἐμπιπτούσης εὐθείας ΑΙ· ἄρα ἀδιαφόρως ἔσονται Α + Β, ἢ Β + Π, ἢ Ι + Α ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς· ἐντεῦθεν ἄρα α΄. αἱ τέσσαρες συζυγίαι Α + Β, Β + Π, Π + Ι, Ι + Α εἰσὶν ἰσάλληλοι· β΄. αἱ παντὸς παραλληλογράμμου τέσσαρες γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι· γ΄. δύω γωνιῶν τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παρακειμένων ἡ ἑτέρα τῆς ἑτέρας ἐστὶ παραπλήρωμα· δ΄. δύω γωνίαι κατὰ διαγώνιον ἀντίθετοι εἰσὶν ἴσαι· φέρ᾽ εἰπεῖν Α = Π· καὶ γὰρ Α + Β = 180°· ἀλλὰ καὶ Β + Π = 180°· ἄρα Α = Π· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἐστὶ καὶ Β = Ι· ε΄. μιᾶς τῶν τεσσάρων ὀρθῆς οὔσης, καὶ τῶν τριῶν ἑκάστη ὀρθὴ ἔσεται· ς΄. μιᾶς τῶν ἐν παραλληλογράμμῳ γωνιῶν ἐγνωσμένης, καὶ ἑκάστη τῶν ἄλλων τριῶν εὐχερῶς γνωσθήσεται· ἐὰν γὰρ ᾖ φέρε Β = 100° ἔσαι καὶ Ι = 100°· ἡ δὲ γωνία Π = 180° — 100° = 80°· ἄρα Π = 80° καὶ Α = 80°.

Ἀνάπαλιν δὲ τὸ τετράπλευρον παραλληλόγραμμον ἔσαι, ἐὰν αἱ κατὰ διαγώνιον ἀντίθετοι γωνίαι ἴσαι ὦσιν, εἴτ᾽ οὖν Α = Π, καὶ Β = Ι.

236. ΘΕΩΡΗΜΑ. Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ εἰσὶν ἴσαι.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν παντὸς εἴδους παραλληλογράμμῳ (σχ. 54, 55, 56, 57) δύω ἀντίθετοι πλευραὶ εἰσὶ δύω παράλληλοι ἀπολαμβανόμεναι ὑπὸ δυεῖν ἑτέρων παραλλήλων ΑΙ, καὶ ΒΠ (σχ. 57), εἰσὶ δύω παράλληλοι ὑπὸ δυεῖν ἄλλων παραλλήλων τῶν ΑΒ, ΙΠ περιεχόμεναι· ὡσαύτως ΑΒ καὶ ΙΠ εἰσὶ δύω παράλληλοι μεταξὺ δύω παραλλή-

λων τῶν ΑΙ, ΒΠ κείμεναι· αἱ δὲ ὅτως ἔχεσαι, ἴσαι εἰσὶν (127) Ο. Ε. Δ.

237. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἡ διαγώνιος ΑΠ (σχ. 57) ἅπαν παραλληλόγραμμον εἰς δύω ἴσα τρίγωνα διαιρεῖ τὰ ΑΙΠ, ΑΒΠ· τὰ γὰρ τρίγωνα ταῦτα ἔχεσι μίαν πλευρὰν κοινὴν τὴν ΑΠ διαγώνιον· ἐςι δὲ ϗ ΑΙ = ΒΠ (236)· ὡσαύτως ϗ ΙΠ = ΑΒ· ἐκεῖν τὰς ἀντιςοίχες πλευρὰς ἴσας ἔχεσιν· ἄρα εἰσὶν ἴσαι (221. γ΄.).

238. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἡ ἄρα διαγώνιος ἅπαν τετράγωνον ϗ πάντα ῥόμβον εἰς δύω τρίγωνα ἴσα ϗ ἰσοσκελῆ διαιρεῖ (σχ. 54, 56)· ἅπαν δὲ ὀρθογώνιον, ἢ ῥομβοειδὲς, εἰς δύω ἴσα ϗ σκαληνὰ (σχ. 55, 57).

239. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Τἀνάπαλιν δὲ, ἐὰν τετραπλεύρε αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ ἴσαι ὦσιν, ὡς αἱ ΑΙ, ΒΠ, παραλληλόγραμμόν ἐςι τὸ τετράπλευρον (σχ. 57)· ἀχθείσης γὰρ τῆς διαγωνίε ΑΠ παρὰ τὴν ΑΠ κοινὴν πλευρὰν εἰσὶ τῶν τριγώνων ΑΙΠ, ΑΒΠ, αἱ πλευραὶ ΙΠ, ΑΒ, ϗ ΑΙ, ΒΠ, ἐξ ὑποθέσεως ἴσαι· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΙΠ ἐςιν ἴσον τῷ ΑΒΠ τριγώνῳ (221. γ΄.)· ἀλλ᾽ ἐν τοῖς δυσὶν ἴσοις τριγώνοις ΑΙΠ, ΑΒΠ αἱ δύω ἀντίςοιχοι γωνίαι ΙΑΠ, ΒΠΑ, ὑπὸ ἴσων πλευρῶν ὑποτεινόμεναι, εἰσὶν ἴσαι (204)· ἄρα ἡ ὑπὸ ΙΑΠ γωνία, ἡ συνιςαμένη ἐπὶ τῆς ΑΙ εὐθείας διὰ τῆς ΑΠ, ἴση ἐςὶ τῇ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίᾳ ΒΠΑ, ἥτις συνίςαται ἐπὶ τῆς ΒΠ ὑπὸ τῆς τρίτης εὐθείας ΑΠ· ἄρα αἱ, ἐφ᾽ ἃς ἐμπίπτει ἡ ΑΠ, εὐθεῖαι ΑΙ, ΒΠ εἰσὶ παράλληλοι (137)· ὡσαύτως αἱ δύω ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΒΑΠ, ΙΠΑ, συνιςάμεναι ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΙΠ, ΑΒ διὰ τῆς εἰς αὐτὰς ἐμπιπτέσης ΑΠ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἴσαι ὖσαι, τὰς δύω εὐθείας ΑΒ, ΙΠ παραλλήλες ἐλέγχεσιν· ἄρα τετράπλευρον τὸ ΑΙΒΠ, ἔχον

πάσας τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς ἴσας, ἔςι παρὰ τȣτο παραλληλόγραμμον.

240. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Δυνατὸν ἄρα μαθεῖν, εἰ τὸ τετράπλευρον ἔςι παραλληλόγραμμον, ἐπισκοπȣ̃σιν εἰ ἄρα ἴσαι εἶεν αὐτȣ̃ αἱ ἀπεναντίον πλευραί.

241. ΣΧΟΛΙΟΝ. Α᾽είποτε μονονȣ̀ ζητεῖται ἔντε τῇ Φυσικῇ κἀν τῇ Μηχανικῇ ἐπὶ δύω δοθεισῶν πλευρῶν ὑπὸ γωνίαν ϗ αὐτὴν δεδομένην παραλληλόγραμμον κατασκευάζειν· ἐκ δὴ τῶν ἤδη εἰρημένων, ὅπως τὸ τοιȣ̃το χρὴ κατασκευάζειν παραλληλόγραμμον, αὐτίκα ἐποίσομεν.

242. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Ε᾽πὶ ȣ̃ν τῶν προσκεκλιμένων πλευρῶν ΔΑ, ΑΖ (Σχ. 56) ὑπὸ γωνίαν, ἣν αὗται περιέχȣσι, τὴν Α κατασκευάζεται ȣ̃τω παραλληλόγραμμον· α΄. συνήφθωσαν αἱ ΑΔ, ΑΖ, κατὰ τὸ Α ὑπὸ γωνίαν τὴν δεδομένην Α (84)· β΄. κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαςήματι δὲ τῷ ΑΖ, γεγράφθω τόξον τὸ ΜΝ· ϗ κέντρῳ αὖ τῷ Ζ, διαςήματι δὲ τῷ ΑΔ (τιθεμένων ἀνίσων τῶν δοθεισῶν πλευρῶν) γεγράφθω τόξον τὸ ορ· πρὸς δὲ τὸ τῆς διατομῆς σημεῖον Π ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΔΠ, ΖΠ, ὧν ἡ μὲν ἔςαι ἴση ἐκ τȣ́τȣ τῇ δοθείσῃ πλευρᾷ ΑΖ, ἡ δ᾽ ἑτέρα τῇ ΑΔ· τὸ ἄρα ȣ̃τω γραφὲν τετράπλευρον ἔχει τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς ἴσας, εἴτ᾽ ȣ̃ν ΑΖ = ΔΠ, ϗ ΑΔ = ΖΠ· ἄρα ἔςι παραλληλόγραμμον.

243. Ο῞πως ἄρα τετράγωνον καταγραφείη (Σχ. 54) ἐπὶ πλευρᾶς δοθείσης τῆς ΑΒ κατάδηλον· ἠγέρθω γὰρ ΒΓ = ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ, ϗ κέντροις μὲν τοῖς Α, Γ, διαςήματι δὲ τῷ αὐτῷ ΑΒ, γεγράφθων τόξα τὰ ΘΗ, ΖΜ, ϗ ἐκ τȣ̃ τῆς διατομῆς σημείȣ Δ ἐπεζεύχθων αἱ πλευραὶ ΑΔ, ΔΓ.

244. ΠΟΡΙΣΜΑ ς΄. Παντὸς παραλληλογράμ-

μυ αἱ δύω διαγώνιοι ΔΠ, ΑΖ (σχ. 55) τέμνονται ὑπ' ἀλλήλων δίχα κατὰ τὸ τῆς κοινῆς διατομῆς σημεῖον Κ· ἔστι γὰρ ΚΠΑ = ΚΔΖ, καὶ ΚΖΔ = ΚΑΠ (134)· δύω ἄρα τρίγωνα τὰ ΚΔΖ, ΚΠΑ, ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην, εἴτ' οὖν ΔΖ = ΑΠ, καὶ δύω γωνίας τὰς πρὸς ταῖς ἴσαις πλευραῖς ἴσας, εἰσὶν ἴσα (221)· ἄρα ἡ ΔΚ πλευρὰ τοῦ ΚΔΖ τριγώνου ἴση ἐστὶ τῇ ἀντιστοίχῳ πλευρᾷ ΚΠ τοῦ ΚΑΠ τριγώνου· ἄρα ἡ ΔΠ διαγώνιος δίχα τέτμηται κατὰ τὸ τῆς κοινῆς διατομῆς σημεῖον Κ· ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται ὅτι ἐστὶ καὶ ΑΚ = ΚΖ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ πολυγώνων ἐν γένει.

245. Σχῆμα *κανονικὸν* ἀκούει (σχ. 44, 54), οὗ πᾶσαι μὲν αἱ γωνίαι, πᾶσαι δὲ αἱ πλευραὶ, ἰσάλληλοί εἰσί· τὸ ἄρα ἀκανόνιστον ἢ γωνιῶν ἢ πλευρῶν ἀνισότητι γίνεται· ἐντεῦθεν ἄρα α΄. πάντων μὲν τῶν τριγώνων τὸ ἰσόπλευρον, πάντων δὲ τῶν τετραπλεύρων τὸ τετράγωνον, μόνα ἐστὶ κανονικά· β΄. τούτων τῶν δυοῖν τῆς τῶν γωνιῶν ἀμέλει ἰσότητος, καὶ τῆς τῶν πλευρῶν, ἑνὸς δοθέντος ἐν τῷ τριγώνῳ, θάτερον ἐξ ἀνάγκης ἕπεται (205)· ἐπίσης ἄρα ἔνεστιν ὁρίσασθαι τὸ κανονικὸν τρίγωνον, εἴτε οὗ αἱ γωνίαι, εἴτε οὗ αἱ πλευραὶ, εἴτε τέλος οὗ αἵτε γωνίαι καὶ αἱ πλευραὶ, εἰσὶν ἰσάλληλοι· ἀλλ' οὔπω ταυτὸν κἀπὶ τῶν ἄλλων σχημάτων κρατεῖ· οὐ γὰρ τῆς τῶν γωνιῶν ἰσότητος ἐπὶ τούτων ἔχεται καὶ ἡ τῶν πλευρῶν, οὐδ' ἀνάπαλιν (232)· ἐνεῖναι ἄρα ἀνάγκη τῷ τῶν ἄλλων κανονικῶν σχημάτων ὁρισμῷ ἑκάτερον τούτων τῶν γνωρισμάτων.

246. Σχῆμα ἐγγεγραμμένον μὲν κύκλῳ λέγεται, ὅταν κύκλος διήκῃ διὰ τῶν κορυφῶν ἁπασῶν τῶν ἐν αὐτῷ γωνιῶν (σχ. 58, 59)· περιγεγραμμένον δὲ, ὅταν ἡ κυκλικὴ περιφέρεια διέρχηται διὰ πάντων τῶν μεσαιτάτων σημείων τῶν ἐν αὐτῷ πλευρῶν (σχ. 61).

247. Ἀκτὶς πλαγία μὲν καλεῖται εὐθεῖα ἡ ΠΟ, ἡ ἐκ τῦ κατὰ τὸ πολύγωνον μέσυ Ο (σχ. 59) ἐπὶ μίαν τῶν γωνιῶν Π καθειμένη· ὀρθία δὲ, κάθετος ἡ ΖΟ, ἐπιζευγνυμένη ἐκ τῦ κατὰ τὸ πολύγωνον μέσυ Ο ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν ΠΔ.

248. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἅπαν κανονικὸν πολύγωνον κύκλῳ ἐγγραφῆναι δύναται.

ΔΕΙΞΙΣ. α΄. Ἐὰν πολυγώνυ κανονικῦ (σχ. 59) ἑκάςη πασῶν τῶν γωνιῶν Π, Δ, Ο, κτλ. δίχα τμηθῇ διὰ τῶν εὐθειῶν ΠΟ, ΔΟ, κτλ., αἱ καιναὶ γωνίαι ὑπὸ ΟΠΔ, ΟΔΘ, ὡς ἴσων γωνιῶν ἡμίσειαι, ἴσαι ἔσονται· πάντα δὲ τὰ τρίγωνα ΠΟΔ, ΔΟΘ, κτλ. ὧν δύω γωνίαι ἴσαι, ἰσοσκελῆ εἰσιν· ἐπεὶ δὲ ἴσαι εἰσὶν ἐν τῷ πολυγώνῳ αἱ πλευραὶ ΠΔ, ΔΘ, κτλ. αἱ πρὸς ταῖς δε ταῖς γωνίαις, τὰ τρίγωνα ταῦται ἰσάλληλα ἔσονται (221)· ἐπεὶ ὖν ἐκ τύτυ ἐςὶ ΠΟ = ΔΟ = ΘΟ, κτλ.· ἐὰν κέντρῳ μὲν τῷ Ο, διαςήματι δὲ τῷ ΠΟ, κύκλος γραφῇ, διελεύσεται διὰ πάντων τῶν περάτων Π, Δ, κτλ. τύτων τῶν εὐθειῶν, καὶ δὴ διὰ πασῶν τῶν κορυφῶν τῶν τῦ πολυγώνυ γωνιῶν· ἄρα ἐγγραφήσεται τὸ κανονικὸν πολύγωνον τῷ κύκλῳ. Ο. Ε. Δ.

249. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Παντὸς κανονικῦ πολυγώνυ θεωρυμένυ, ὡς εἰ κύκλῳ ἐγγέγραπτο, ἑκάςη τῶν ἐν αὐτῷ πλευρῶν ἀποβήσεται χορδὴ τόξυ ἴσυ 360° μοίραις, διαιρεθείσαις διὰ τῦ τῶν πλευρῶν ἀριθμῦ· τῦ πενταγώνυ φέρε

(σχ. 58) ἡ ΑΒ πλευρὰ, καὶ ἑκάστη τῶν ἄλλων, γίνεται χορδὴ τόξου τοῦ ΑΤΒ, ὅ ἐστι πεμπτημόριον τῆς περιφερείας, ἢ $\frac{360°}{5}$ · τοῦ δ' ἑξαγώνου (σχ. 59) ἡ πλευρὰ ΠΔ χορδή ἐστι τόξου $\frac{360°}{6}$ τῆς περιφερείας, καὶ ἑξῆς ὡσαύτως. Διαιροῦντες οὖν τὴν περιφέρειαν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ σχήματος, εὑρήσομεν τὸ τόξον, τὸ ὑποτεῖνον ἑκάστην αὐτοῦ πλευράν· καὶ δὴ α΄. τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐστι $\frac{360°}{3} = 120°$· β΄. τοῦ τετραγώνου $\frac{360°}{4} = 90°$· γ΄. τοῦ πενταγώνου $\frac{360°}{5} = 72°$· δ΄. τοῦ ἑξαγώνου $\frac{360°}{6} = 60°$, ὡσαύτως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κανονικῶν σχημάτων, ὧν ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς ἄνευ λειψάνου διέλοι ἂν τὸν 360.

Ἀλλὰ μέτρον τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας ΠΟΔ (σχ. 59) ἐστὶ τὸ τόξον αὐτὸ, ἐφ' οὗ βέβηκε, τὸ ΠΓΔ· αἱ ἄρα πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίαι ἐν τῷ κανονικῷ σχήματι, μετρηθήσονται ἑκάστη διὰ τῶν 360° διαιρεθεισῶν διὰ τοῦ τῶν πλευρῶν ἀριθμοῦ· ἐν μὲν οὖν τῷ τριγώνῳ ἔσται ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία $= 120°$, ἐν δὲ τῷ τετραγώνῳ $= 90°$, κτλ.

250. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Δυνατὸν ἄρα κύκλῳ ἐγγράψαι ὁσαδήποτε κανονικὰ σχήματα, μεταφέροντας ἐν αὐτῷ διὰ τοῦ ἀναγωγέως (80) τόξον ἴσον τῷ 360 διαιρεθέντι διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν, καὶ ἐπιζευγνῦντας ἐν τῷ ληφθέντι τόξῳ χορδὴν, καὶ οὕτως ἐπαναλαμβάνοντας ἐπὶ τῆς περιφερείας τὰ τῆς πράξεως· ὑπὲρ τριγώνου φέρε, τόξον ἐγχαράσσοντας 120°, καὶ χορδὴν αὐτῷ ἐπι-

ζευγνῦντας, ϗ ἔτι δὶς τῦτ' αὐτὸ ποιῦντας· ὑπὲρ δὲ τετραγώνυ, τόξον 90°, ϗ ἑξῆς ὁμοίως.

251. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἡ ἑξαγώνυ κανονικῦ πλευρὰ ΠΔ (σχ. 59), ἴση ἐςὶ τῇ ἀκτῖνι τῦ ᾧ ἐγγράφοιτο κύκλυ· ἔςι μὲν γὰρ αὕτη χορδὴ τόξυ 60° (249)· ἔςι δὲ ΠΔ = ΠΟ· εἴγε ἡ ὑπὸ ΠΟΔ μετρεῖται ὑπὸ τῦ τόξυ ΠΓΔ, ὅ ἐςιν 60° (78)· ἀλλὰ ἡ γωνία ΟΠΔ = ΟΔΠ (248)· ἔςι τε ἑκάςη $= \frac{180° - 60°}{2} = 60°$ (210)· ἄρα ἑκάςη τῶν τριῶν γωνιῶν τῦ ΠΔΟ τριγώνυ μετρεῖται ὑπὸ τόξυ 60°· ὑκῦν ἐν ἑξαγώνῳ τὸ τρίγωνον ΠΔΟ ἐςιν ἰσόπλευρον (205)· ἄρα ἡ τῦ ἑξαγώνυ πλευρὰ ΠΔ, ἥτις ἐςιν ἅμα ϗ τῦ ἰσοπλεύρυ τριγώνυ, ἴση ἐςὶ τῇ τῦ τριγώνυ πλευρᾷ ΠΟ, εἴτ' ὑν τῇ ἀκτῖνι τῦ κύκλυ, ᾧ ἐγγέγραπται τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸ δ' ἑπόμενον πόρισμα, ἐπεὶ τῆς τριγωνομετρίας ἐςὶ θεμέλιος, δεῖν ᾠήθημεν πρὸς μείζω ἐπιςασίαν τῶν μαθητιώντων ἐν θεωρήματος ἐκθέσθαι σχήματι.

252. Πόρισμα Δ'. ϗ Θεώρημα ςοιχειῶδες. Ἡ τῦ κύκλυ ἀκτὶς ἴση ἐςὶ χορδῇ τόξυ μοιρῶν 60.

ΔΕΙΞΙΣ. Τὸ ἐφ' ἑξαγώνου κύκλῳ ἐγγεγραμμένυ συνιςάμενον τρίγωνον ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῦ ἑξαγώνυ τῆς ΠΔ, ϗ δύω ἀκτίνων τῦ ᾧ ἐγγράφοιτο κύκλυ τῶν ΠΟ, ΔΟ, ἐςιν, ὡς ἤδη δέδεικται, ἰσόπλευρον· ἄρα ἡ ἀκτὶς ΠΟ ἴση ἐςὶ τῇ ΠΔ πλευρᾷ τῦ ἑξαγώνυ· ἀλλ' ἡ ἑξαγώνυ πλευρὰ ΠΔ ἐςι χορδὴ τόξυ = 60° (249)· ἄρα ἡ ἀκτίς ἐςιν ἴση χορδῇ τῇ ΠΔ τόξυ 60°. Ο.Ε.Δ.

253. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ε'. Ῥᾷςα ὑν καταγραφήσεται

ἑξάγωνον· α΄. γραφέντος κέντρῳ ϗ διαςήματι τοῖς τυχȣ̃σι κύκλȣ· β΄. τῆς ἀκτῖνος αὐτȣ̃ ἑξάκις ἐπιζευχθείσης τόξοις ἓξ ἰσαλλήλοις τȣ̃δε τȣ̃ κύκλȣ (ἀνωτέρ.).

254. ΠΟΡΙΣΜΑ ς΄. Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ κατασκευὴ τȣ̃τε γραφομέτρȣ, ϗ τȣ̃ ἀναγωγέως· α΄. ἡ δι' ἧς ὁ κύκλος γέγραπται ἀκτὶς, μετενεχθεῖσα ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, γίνεται χορδὴ τόξȣ 60°· β΄. ἀκτὶς κάθετος ταύτῃ τῇ χορδῇ παρέξει δύω τόξα (σχ. 25) ἕκαςον = 30°· γ΄. ἀκτὶς δ' ἑτέρα κάθετος τῷ 30° τόξῳ, παράγει τόξον 15°· τὰ δὲ λοιπὰ ἀποτελεσθήσεται διὰ μηχανικῆς ἐπιτηδεύσεως.

255. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Ἑξάκις ἡ κύκλȣ ἀκτὶς ἀποδίδωσι τὴν τȣ̃ τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένȣ ἑξαγώνȣ περίμετρον· ἀλλ' ἡ κυκλικὴ περιφέρεια προδήλως μείζων ἐςὶ τῆς περιμέτρȣ τȣ̃ ἑξαγώνȣ· εἴγε τὸ τόξον ΠΓΔ (σχ. 59), ἢ τὸ ἑκτημόριον τῆς περιφερείας, ἔςι καμπύλη, τῆς χορδῆς ΠΔ, εἴτ' ȣ̃ν τȣ̃ ἕκτȣ μέρȣς τȣ̃ ἑξαγώνȣ εὐθείας ὄντος· ἄρα (17) ΠΓΔ > ΠΔ· ἄρα ἡ περιφέρεια μείζων ἐςὶ τῆς τȣ̃ ἑξαγώνȣ περιμέτρȣ, ϗ δὴ μείζων, ἢ ἑξάκις ἡ ἀκτὶς, ταὐτὸν εἰπεῖν, ἢ τρὶς ἡ διάμετρος.

256. ΠΟΡΙΣΜΑ Η΄. Δυοῖν κανονικῶν πολυγώνων (σχ. 60) τὴν αὐτὴν πλαγίαν ἀκτῖνα ἐχόντων ΚΑ = ΚΔ μείζων ἔςιν ἡ περίμετρος, ȣ̃ πλείȣς αἱ πλευραί.

Δύω γὰρ κανονικὰ πολύγωνα ἀεὶ θεωρεῖσθαι δύναται ὡς κύκλῳ ἐγγεγραμμένα (248)· ἀλλ' ἑκάςη πλευρὰ φέρ' εἰπεῖν τȣ̃ δωδεκαγώνȣ ΠΔΤ ȣ̃σα ἐλάττων ἑκάςης πλευρᾶς ΑΟ τȣ̃ ΑΟΙ ἑξαγώνȣ ὑποτείνει τόξον ἔλαττον· ὑκȣ̃ν ἐγγύς ἐςι τȣ̃ συγκεχύσθαι τῷ τόξῳ τῷδε· ἄρα πᾶσα ἡ τȣ̃ δωδεκαγώνȣ περίμετρος μᾶλλον ἔγγιον γίνεται τȣ̃ συγκεχύσθαι τῇ περιφερείᾳ, ἢ ἡ τȣ̃ ἑξαγώ-

νυ, ϗ ἐν γένει, ὅσῳ πλείυς πλευρὰς ἔχει τὸ κανονικὸν πολύγωνον, τοσύτῳ ἔγγιον γίγνεται τῦ συμπεσεῖν τῇ κυκλικῇ περιφερείᾳ, ϗ ἰσωθῆναι αὐτῇ· δύω ἄρα κανονικῶν πολυγώνων τῷ αὐτῷ ἐγγεγραμμένων κύκλῳ, ἢ ὃ ταὐτὸν, τὴν αὐτὴν πλαγίαν ἀκτῖνα ἐχόντων, μείζων ἐςὶν ἡ περίμετρος, ὗ πλείυς εἰσὶν αἱ πλευραί.

257. ΠΟΡΙΣΜΑ Θ΄. Πᾶν ἄρα κανονικὸν πολύγωνον ἐξ ἀπειραρίθμων πλευρῶν συνιςάμενον ἀπειροςόν τι ἐλλείπει τῦ μὴ συμπεσεῖν τῷ κύκλῳ, τῦ μὴ γενέσθαι κύκλος· ἄρα δυνατὸν ἐκδέξασθαι τὸν κύκλον ὡς κανονικὸν πολύγωνον ἐξ ἀπειραρίθμων πλευρῶν συγκροτύμενον· ἐὰν ὖν τὰς κυκλικὰς ἰδιότητας ὡς σχήματος κανονικῦ τοιῦδε ἐξετάσωμεν, ἐλάχις᾽ ἂν ἁμάρτοιμεν τῦ ἀληθῦς, ϗ τῦ ἐλλείμματος ἀλογυμένυ ὡς ἀπειροςῦ, ὐδὲν ἂν ποιήσαιμεν ὅλως ἁμάρτημα (Συμ. λογ. 530).

258. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι΄. Ἅπαν κανονικὸν πολύγωνον περιγραφῆναι δύναται κύκλῳ· αἱ γὰρ πλευραὶ ΗΠ, ΠΤ τῦ τῷ ἐκτὸς κύκλῳ ἐγγεγραμμένυ πολυγώνυ (σχ. 61) εἰσὶν ὡς χορδαὶ ἴσαι (245), ϗ ἴσον τῦ κέντρυ ἀπέχυσαι (55)· ἄρα πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῦ κέντρυ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῶνδε ἀγόμεναι κάθετοι, εἰσὶν ἴσαι· ἐὰν ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Κ διαςήματι δὲ τῷ Κο γραφῇ κύκλος, διήξει διὰ πάντων τῶν μεσαιτάτων σημείων τῶνδε τῶν πλευρῶν· ϗ δὴ τὸ πολύγωνον κύκλῳ περιγραφήσεται.

259. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΑ΄. Ἵν᾽ ὖν πολύγωνον γραφείη κανονικὸν, ὗ ἡ ὀρθία ἀκτὶς Κο εἴη δεδομένη, γεγράφθω ὁ ooo κύκλος διὰ ταύτης τῆς ἀκτῖνος, ϗ συνεςάθω ἐπ᾽ αὐτῆς κατὰ τὸ Κ ἡ ὑπὸ oΚo γωνία $=70^\circ$ μὲν εἰς πεντάγωνον (249)· 60° δὲ εἰς ἑξάγωνον, ϗ ὕτως ἑ-

ξῆς (84), ϗ μετήχθω τὸ οο τόξον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Κο, Κο, αἵτινες περιέχȣσι ταύτην τὴν γωνίαν, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ϗ αἱ τῇ ἀκτῖνι κάθετοι ΠΗ, ΠΤ, κ. τ. λ. παρέξȣσι τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΠΗΖΤ.

260. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΒ΄. Ὅσῳ πλείȣς εἰσὶ τῷ πολυγώνῳ αἱ πλευραὶ τοσȣ́τῳ ἡ ὀρθία ἀκτὶς Κο προσεγγίζει τῇ πλαγίᾳ ΚΠ· ἐγγίζει γὰρ μᾶλλον ȣ̓́τω τὸ πολύγωνον τȣ̃ συμπεσεῖν τῷ κύκλῳ· διὸ ἡ Κο μᾶλλον ἐπιμήκης καθίσαται, ὅ ἐςι προσπελάζει τῇ δυνάμει τῆς πλαγίας ἀκτῖνος ΚΠ.

261. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΓ΄. Τȣ̃ κύκλȣ ἄρα ὡς πολυγώνȣ κανονικȣ̃ ἐκλαμβανομένȣ, ȣ̃ ἀπειράριθμοι αἱ πλευραὶ, ἡ ὀρθία ἀκτὶς, ἣ ἡ ἐκ τȣ̃ κέντρȣ, μιᾷ τινι τῶν ἀπειροςῶν πλευρῶν πρὸς ὀρθὰς ἱςαμένη, δύναμιν ἔχει σχεδὸν τῆς πλαγίας ἀκτῖνος, ἣ τῆς ἀγομένης ἐφ᾽ ἓν τῶν περάτων μιᾶς τῶν ἀπειροςῶν πλευρῶν, ταὐτὸν εἰπεῖν ἡ ὀρθία ἀκτὶς τῇ πλαγίᾳ ἐςὶν ἴση.

262. Τρισσόν τι εἶδος γωνιῶν ἐν ἑκάςῳ διακρίνεται πολυγώνῳ· ἔςι μὲν γὰρ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἡ ὑπὸ ΠΟΔ (σχ. 59)· γωνία δὲ ἐντὸς ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ ΠΔΘ, γωνία δὲ τέλος ἐξωτερικὴ ἡ ο (σχ. 63), ἡ συνιςαμένη ἐκτὸς τȣ̃ σχήματος ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς, ϗ τῆς αὐτῇ προσεχȣ̃ς ἐκβαλλομένης.

263. Τὸ τοίνυν ἄθροισμα τῶν πρὸς τῷ κέντρῳ συνιςȣσῶν γωνιῶν παντὸς κανονικȣ̃ πολυγώνȣ σχήματος ςαθερὸν ἀεὶ ὂν ἀποδέδεικται, εἴτ᾽ ȣ̃ν 360° (96)· ἑκάςη δὲ τῶν πρὸς τῷ κέντρῳ παντὸς κανονικȣ̃ σχήματος ἴση 360° διαιρεθείσαις διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τοῦ σχήματος πλευρῶν (249).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ τῆς δυνάμεως τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνȣ.

264. ΘΕΩΡΗΜΑ. Παντὸς πολυγώνȣ κανονικȣ͂, ἢ ἀκανονίςȣ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν ἴσον ἐςὶ διπλασίαις τόσαις ὀρθαῖς, ὅσαι αἱ ἐν τῷ σχήματι πλευραὶ, πλὴν τεσσάρων.

ΔΕΙΞΙΣ. Δυατὸν ἐν ἅπαντι πολυγώνῳ ἀγαγεῖν ἀπὸ τῆς Α γωνίας εὐθείας τὰς ΑΠ, ΑΓ κτ. (σχ. 62) πρὸς πάσας τὰς ἄλλας γωνίας πλὴν τῶν δύω τῶν τῇ Α γειτνιαζȣσῶν, ϗ συςῆσαι ȣ῞τω τοσαῦτα τρίγωνα τὰ Α ΖΠ, ΑΠΓ κτ., πλὴν δύω, ὅσαι εἰσὶν αἱ πλευραὶ τȣ͂ πολυγώνȣ. Τὸ γὰρ 62 σχῆμα ἔχει ἑπτὰ πλευράς· τρίγωνα τοίνυν συςαθήσονται πέντε· ἐπεὶ δὲ πᾶσαι αἱ γωνίαι τῶνδε τῶν τριγώνων συνίςανται ἐκ τῶν γωνιῶν αὐτῶν τȣ͂ πολυγώνȣ, ϗ αἱ τρεῖς γωνίαι ἑκάςȣ τȣ́των τῶν τριγώνων ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς (209)· ἄρα τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν τȣ͂ πολυγώγωνȣ ἴσον ἐςὶ δὶς τοσαύταις ὀρθαῖς, πλὴν τεσσάρων, ὅσας ἔχει πλευρὰς τὸ πολύγωνον Ο. Ε. Δ.

265. Τετραπλεύρȣ μὲν ἄρα τὸ τῶν γωνιῶν ἄθροισμα ἐξισȣ͂ται ὀρθαῖς $8-4=4$· πενταγώνȣ δὲ, $10-4=6$. ἑξαγώνȣ δὲ, $12-4=8$. κ. τ. λ.

266. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν τῶν πολυγώνων καθ᾽ ἕκαςον ἑξῆς σχῆμα δυσὶν ὀρθαῖς ἄυξει. Τριγώνȣ μὲν γὰρ αἱ τρεῖς ἴσαι δυσὶ,

τετραγώνε δὲ αἱ τέσσαρες, τέσσαρσι, πενταγώνε δὲ αἱ πέντε, ἕξ, ϗ ὕτως ἑξῆς.

267. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Παντὸς κανονικῦ σχήματος ἑκάςη τῶν γωνιῶν ἴση ἐςὶ τῷ ἀθροίσματι τῶν δὶς τοσύτων ὀρθῶν, πλὴν τεσσάρων, ὅσαι εἰσὶν αἱ πλευραὶ τῦ σχήματος, διαιρεθέντι διὰ τῦ ἀριθμῦ τῶν πλευρῶν· τριγώνε μὲν γὰρ ἰσοπλεύρε ἑκάςη ἐςὶν $= \frac{180°}{3} = 60°$, τετραγώνε δὲ $\frac{360°}{4} = 90°$, πενταγώνε δὲ, $= \frac{540°}{5} = 108$, ἑξαγώνε δὲ, $= \frac{720°}{6} = 120°$ ϗ ὕτως ἑξῆς· δῆλον ὖν ὡς ἡ δύναμις ἑκάςης ἐσωτερικῆς γωνίας συναύξει τῷ ἀριθμῷ τῶν πλευρῶν.

268. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Κύκλε δὲ, ἐπεὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἐςὶν ∞, τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν ἔςι $2\,\infty$ ὀρθαὶ γωνίαι πλὴν τεσσάρων· κληθείσης ὖν τῆς ὀρθῆς γωνίας O, τὸ τύτων ἄθροισμα ἔςαι $2\,\infty\,O - 4O$· ἑκάςη ἄρα ἐσωτερικὴ γωνία ἔςαι $= \frac{2\,\infty\,O - 4O}{\infty}$. ἀλλὰ $\frac{2\,\infty\,O}{\infty} = 2O$, ἡ ἑκάςης ἄρα ἐσωτερικῆς γωνίας δύναμις, ἣν συνιςῶσι δύω ἀπειροςαὶ πλευραὶ τῆς περιφερείας, ἢ δύω προσεχῆ ςοιχεῖα τῦ κύκλε, εἰσὶ δύω γωνίαι ὀρθαὶ πλὴν $\frac{4O}{\infty}$· τοιαύτη ὖν γωνία ἀπείρως ἐςὶν ἀμβλυτάτη, ὡς ἴση ὖσα δυσὶν ὀρθαῖς πλὴν τῆς ἀπειροςῆς γωνίας $\frac{4O}{\infty}$ (Συμ. λογ. 530).

269. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Παντὸς πολυγώνε, εἴτε κανονικῦ, εἴτε ἀκανονίςε, τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ἀεὶ ἐςι μόνιμον, τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἐξισύμενον· (σχ. 63) ἡ γὰρ ο γωνία σὺν τῇ ἐφεξῆς δ ἴση ἐςὶ δυσὶν ὀρθαῖς (98)· ἀλλ' εἰσὶ τοσαῦται ο πλὴν δ, ὅσαι εἰσὶν αἱ πλευραὶ τῦ πολυγώνε· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν ἐξωτε-

ρικῶν γωνιῶν ο ϗ τῶν ἐσωτερικῶν δ ἰσȣ̃ται δὶς τόσαις ὀρθαῖς, ὅσας ἔχει πλευρὰς τὸ πολύγωνον· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν δ ἰσȣ̃ται δὶς τοσαύταις ὀρθαῖς, ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον πλὴν ὀρθῶν τεσσάρων (264)· τὸ ἄθροισμα ἄρα πασῶν τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ο ἰσȣ̃ται ταύταις ταῖς καταλειπομέναις τέσσαρσιν ὀρθαῖς.

270. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ε΄. Παντὸς κανονικȣ̃ πολυγώνȣ πᾶσαι αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι ο ἰσάλληλοί εἰσιν (245)· ȣ̉κȣ̃ν ἑκάϛη τȣ́των, τετραγώνȣ μὲν ἔϛιν $\frac{360}{4}°=90°$, πενταγώνȣ δὲ $\frac{360}{5}°=72$, ϗ ἑξῆς ὡσαύτως ἀεὶ τῆς τῶν γωνιῶν δυνάμεως συνυπελαττȣμένης αὐξȣ́σαις ταῖς τȣ̃ σχήματος πλευραῖς.

271. ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ΄. Τελευταῖον δὲ τȣ̃ κύκλȣ, ȣ̓̃ ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς ἔϛιν ἄπειρος, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία, εἴτ' ȣ̓̃ν ἡ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ϗ τῆς κυκλικῆς περιφερείας περιεχομένη, ἣν αὐτοὶ πρότερον γωνίαν ἀφῆς ὠνομάσαμεν, ἤ, εἰ ϗ τȣ̃το πρὸς θυμȣ̃, ἡ γωνία, ἣν συνιϛῶσιν ἐκτὸς τȣ̃ κύκλȣ δύω προσεχῆ ϛοιχεῖα τῆς καμπύλης, αὕτη φημὶ ἀεὶ ἴση ἐϛὶ τῷ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἀθροίσματι, διαιρεθέντι δὶ ἀριθμȣ̃ ἀπείρȣ· ἡ γωνία ἄρα τῆς ἀφῆς ἔϛιν ἀπειροϛὴ, ὡς ϗ ἀνωτέρωθί πȣ δέδεικται (172).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ καταμετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν.

272. Ἡ μὲν γραμμὴ διὰ γραμμῆς ϗ μόνης καταμετρηθῆναι δύναται· δὶ ἐπιφανείας δ' ἡ ἐπιφάνεια.

273. Μέτρον δ', ᾧ ἄν χρήσαιτό τις ἐπὶ ἐπιφανειῶν καταμετρήσει, ἐςὶ τὸ τετράγωνον· πȣ̃ς ȣ̃ν ἀκȣ́ει τετραγωνικὸς ἔκτασις περικλείȣσα τετράγωνον, ȣ̃ ἑκάςη πλευρὰ ἔςι ποδιαία εὐθεῖα· τετραγωνικὴ δὲ ὀργυὰ ἔςι σχῆμα τετράγωνον, ȣ̃ ἑκάςη πλευρὰ ἔςιν ὀργυὰ κατὰ μῆκος.

Δυνάσθω γὰρ ἡ ΒΠ εὐθεῖα (σχ. 64) ὀργυὰν γραμμικήν· ἔςω δὲ ϗ ἑκάςη τῶν ἄλλων τριῶν ΒΑ, ΑΗ, ΗΠ ἴση ὀργυᾷ, αἱ δὲ Β, Π, Α, Η γωνίαι ὀρθαί· ȣ̓κȣ̃ν τὸ ὅλον ἐμβαδὸν ΒΠΑΗ ἔσεται ἡ καλȣμένη τετραγωνικὴ ὀργυά.

Ἐὰν ȣ̃ν ἤδη ἤτε ΒΠ ϗ ἡ ΒΑ εἰς ἓξ ἰσάλληλα μόρια τμηθῶσιν, εἴτ' ȣ̃ν εἰς ἓξ πόδας, τȣτ' ἔςιν ἐὰν γένηται ΒΖ = ΖΕ = Βχ κτλ, ϗ ἔτι ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΖΙ, ΕΔ, κ.τ.λ. ἐπὶ πάντα τὰ σημεῖα τῶν διατομῶν, πάντα τὰ μικρὰ τετράγωνα ΒΖχτ, ΓΑΙο κ.τ.λ., προφανῶς ἰσάλληλα ἔσονται (127)· ϗ ἐπεὶ ἐκ κατασκευῆς ἑκάςȣ ἡ πλευρὰ ποδιαία, ἕκαςον ἔςαι πȣ̃ς τετραγωνικός.

274. Οὕτως ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ὀργυὰ ΒΠΑΗ περιέξει ἓξ μικρὰ παραλληλόγραμμα τὰ ΒΖΑΙ, ΖΕΙΔ, κ.τ.λ. συγκείμενα ἕκαςον ἐκ τετραγωνικῶν ποδῶν ἕξ, καὶ ἐκ τȣ̃ ἀκολȣ́θȣ ἑξάκις ἓξ πόδας τετραγωνικȣ̀ς, εἴτ' ȣ̃ν 36.

275. Ἐὰν δὲ ϗ ἑκάτερος τῶν δυοῖν ποδῶν ΒΖ, Βχ διαιρεθῇ εἰς δώδεκα ἰσάλληλα μόρια, ἕκαςον τȣ́των ἔςαι δάκτυλος, ϗ καθέτων ἀχθεισῶν ὡς ἐν τῇ ὀργυᾷ, ὁ τετραγωνικὸς πȣ̃ς περιεκτικὸς ἔςαι δώδεκα μικρῶν παραλληλογράμμων συντιθεμένων ἑκάςȣ ἐκ δακτύλων τετραγωνικῶν δώδεκα· ϗ ὅλος ὁ πȣ̃ς περιεκτικὸς ἔςαι δωδεκάκις δώδεκα τετραγωνικῶν δακτύλων, εἴτ' ȣ̃ν 144.

276. Ὡσαύτως ὁ μὲν τετραγωνικὸς δάκτυλος περιέχει 144 τετραγωνικὰς γραμμὰς, τούτων δ' ἑκάστη στίγματα τετραγωνικὰ 144.

277. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τῶν προεκτεθέντων ὑποδειγμάτων, καὶ ἐκ τῆς ἁπλῆς ἐποπτείας τοῦ 64 σχήματος, εὔδηλον ὡς ἀριθμὸς τῶν μερῶν τοῦ ἐν ἐπιφανείᾳ μέτρου ἐστιν ὁ τετράγωνος, ὁ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μερῶν τοῦ αὐτοῦ μέτρου ἐν γραμμῇ λαμβανομένου· οὕτως ὁ ἀριθμὸς τῶν τετραγωνικῶν ποδῶν τῶν τῇ τετραγωνικῇ ὀργυιᾷ ἐνόντων ἐστιν ὁ ἀπὸ 6 τετράγωνονος 36· ἡ γὰρ γραμμικὴ ὀργυιὰ περιέχει ἓξ πόδας γραμμικούς· ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν τῷ τετραγωνικῷ ποδὶ ἐμπεριλαμβανομένων τετραγωνικῶν δακτύλων ἐστιν 144, τετράγωνος ἀπὸ 12· δώδεκα γὰρ γραμμικοὺς δακτύλους ὁ γραμμικὸς ποῦς περιέχει.

278. Ἐπινοήσωμεν ἤδη τὴν βάσιν ΓΗ (σχ. 65) ἐν πλάτει ἀπειροστῷ ἀνιοῦσαν ἑαυτῇ παραλλήλως ἔς γε τὴν ἀντίθετον πλευρὰν ΔΑ, καὶ παραλείπουσαν μεθ' ἕκαστον ἀπειροστὸν διάβημα ἴχνος τι ἑαυτῇ ἴσον· περικλείσει ἄρα οὕτως ἐκ διαδοχῆς τὴν ἐπιφάνειαν ΓΔΑΗ· ἢ, ἵνα τὸν αὐτὸν ἀεὶ ἐκφραζώμεθα τρόπον, γεννήσει τῇ ἑαυτῆς κινήσει τὴν ΓΔΑΗ ἐπιφάνειαν.

279. Ἄρα α΄. ὥσπερ τὸ σημεῖον κινούμενον γεννᾷ γραμμὴν, οὕτω γραμμὴ κινουμένη γεννᾷ ἐπιφάνειαν· β΄. αἱ γραμμαὶ ΙΟ, κ.τ.λ. αἱ παραλειφθεῖσαι ὑπὸ τῆς γεννητρίας γραμμῆς, ἢ τῆς ΓΗ βάσεως, ἐκλογισθῆναι ἔχουσιν ὡς στοιχεῖα, ἐξ ὧν σύγκειται ἡ ΓΔΑΗ ἐπιφάνεια.

280. ΘΕΩΡΗΜΑ στοιχειῶδες. Πᾶν ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ γὰρ ἐπιφάνεια παντὸς ὀρθογωνίου τοῦ ΓΔΑΗ οὐκ ἔστιν οὐδὲν ἄλλο, εἰμὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων

ΙΟ, κ. τ. λ. τῶν τῇ γεννητρίᾳ γραμμῇ, ἢ τῇ βάσει ΓΗ ἴσων, ἃ παραλείπονται ὑπ' αὐτῆς παραλλήλως ἑαυτῇ ἀνιούσης ἕς γε τὴν ΔΑ (278)· ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς τῶνδε τῶν στοιχείων ἐμφαίνεται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν σημείων, ἅ εἰσιν ἐν τῷ ΓΔ ὕψει.

Ο ἀριθμὸς ἄρα τῶν στοιχείων, ἀφ' ὧν συντίθεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου ΓΔΑΗ, ἐκδηλοῦται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν σημείων, ἃ περιέχει τὸ ΓΔ ὕψος· ἐὰν ἄρα ἡ ΓΗ βάσις τοσάκις ληφθῇ, ὅσα σημεῖα ἔχει τὸ ΓΔ ὕψος, ὅ ἐστιν, ἐὰν ἡ ΓΗ βάσις πολλαπλασιασθῇ διὰ τοῦ ΓΔ ὕψους, πορισθήσεται ἀκριβῶς ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΓΔΑΗ ὀρθογωνίου· ἄρα κ. τ. λ.

281. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἵν' οὖν εὑρεθῇ ἡ τοῦ ὀρθογωνίου ΓΔΑΗ ἐπιφάνεια, μετρηθήτω διὰ μήκους γνωστοῦ, δι' ὀργυιᾶς φέρε ά. ἡ ΓΗ βάσις· β'. τὸ ΓΔ ὕψος: εἶτα πεπολλαπλασιάσθω ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀργυιῶν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀργυιῶν τοῦ ὕψους· τὸ δὲ γινόμενον ἐμφανεῖ τὰς τετραγωνικὰς ὀργυιάς, ἃς περιέχει ἡ ἐπιφάνεια· ἐὰν οὖν ᾖ ΚΗ = 6, καὶ ΓΔ = 5 ἡ τοῦ ΓΔΑΗ ὀρθογωνίου ἐπιφάνεια ἔσται 30 τετραγωνικῶν ὀργυιῶν περιεκτική.

282. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς παραλληλογράμμου ἴση ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ, τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντος.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστω ἡ τοῦ πλαγιογωνίου παραλληλογράμμου ΠκΤΕ βάσις κΕ ἴση τῇ βάσει τοῦ ΓΔΑΗ ὀρθογωνίου, πρὸς δὲ καὶ τὸ Ρβ ὕψος ἴσον τῷ ΓΔ ὕψει· φημὶ οὖν, ὡς αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο τούτων παραλληλογράμμων ἴσαι εἰσί.

Καὶ γὰρ ἐὰν προαχθῶσι πάντα τὰ στοιχεῖα ΙΟ, κ. τ. λ. τοῦ ὀρθογωνίου ΓΔΑΗ, ἅπαντα τὰ αὐτῶν μέρη

Ζχ τὰ ἐν τῷ πλαγιογωνίῳ ΠκΤΕ εἰσὶν ἴσα τῷ κΕ, ὡς ὄντα παράλληλα τῇ κΕ βάσει, ϗ περιεχόμενα ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἐν αἷς ϗ ἡ κΕ· τὰ μέρη ἄρα Ζκ εἰσὶ διὰ τῦτο ἴσα θατέρᾳ βάσει ΓΗ, ϗ δὴ ἔσονται ἴσα πᾶσι τοῖς ΙΟ ςοιχείοις τῦ ὀρθογωνίῦ· παρὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς τῶν μερῶν, ἢ τῶν ςοιχείων Ζχ, ἰσῦται τῷ ἀριθμῷ τῶν ΙΟ ςοιχείων· ϗ γὰρ ἕκαςον ςοιχεῖον τῦ ΠκΤΕ πλαγιογωνίῦ ὐδέν ἐςιν, ἀλλ᾽ ἢ προαγωγὴ ἑκάςῦ ςοιχείῦ τῦ ΓΔΑΗ ὀρθογωνίῦ· αἱ ἐπιφάνειαι ἄρα τῶν δύω παραλληλογράμμων ἔχῦσαι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἰσαλλήλων ςοιχείων, εἰσὶν ἐξ ἀνάγκης ἴσαι Ο. Ε. Δ.

283. ΠΟΡ. ϗ ΘΕΩΡ. ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ. Ἐν γένει ἡ παντὸς παραλληλογράμμῦ ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ϗ τῦ ὕψῦς.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ γὰρ ἐπιφάνεια τῦ ὀρθογωνίῦ ΓΔΑΗ ἰσῦται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ϗ τῦ ὕψῦς (280)· ἀλλ᾽ ἡ ἐπιφάνεια τῦ πλαγιογωνίῦ παραλληλογράμμῦ ΠκΤΕ ἔςιν ἴση τῇ ὀρθογωνίῦ, ῦ βάσις ϗ ὕψος τὰ αὐτὰ τῷ πλαγιογωνίῳ (282)· ἄρα ϗ αὐτῦ ἡ ἐπιφάνεια ἰσῦται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ϗ τῦ ὕψῦς· ἐν γένει ἄρα παντὸς παραλληλογράμμῦ, εἴτε ὀρθογωνίῦ, εἴτε πλαγιογωνίῦ, ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ϗ τῦ ὕψῦς Ο. Ε. Δ.

284. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἵν᾽ ῦν εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τῦ ΑΟΠΓ παραλληλογράμμῦ (σχ. 67)· α΄. ὡς ὕψος ἐςάσθω κάθετος ἡ Οτ (104 κτ.)· β΄. μετρηθήτω το μῆκος τῦ ὕψῦς Οτ ϗ τῆς ΑΠ βάσεως διὰ ποδὸς, ἢ ὀργυιᾶς· γ΄. πεπολλαπλασιάσθω διὰ θατέρῦ θάτερον.

285. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Πᾶν τρίγωνον (σχ. 66)

ἴσον ἐςὶ τῷ ἡμίσει τȣ̃ γινομένȣ ὑπὸ τῆς ΔΓ βάσεως καὶ τȣ̃ ΠΙ ὕψȣς.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἤχθω ἡ ΠΖ παράλληλος τῇ ΔΓ, ϗ ἡ ΖΓ τῇ ΠΔ· ἡ ȣ̃ν ΠΓ διαγώνιος διαιρήσει τὸ ΠΔΓΖ παραλληλόγραμμον εἰς δύω ἴσα τρίγωνα τὰ ΔΠΓ, ΓΠΖ (238)· ἀλλὰ ΠΔΓΖ = ΠΙ × ΔΓ (283)· ϗ ΔΠΓ, ἓν τῶν δύω τριγώνων, $= \frac{\Pi\Delta\Gamma Z}{2} = \frac{\Pi I \times \Delta\Gamma}{2}$· ἄρα γενικῶς ἐπιφέρεται ἡ δεῖξις.

Ἐν γένει παντὸς τριγώνȣ ταῖς δυσὶ πλευραῖς δυνατὸν παραλλήλȣς ἀγαγεῖν δύω (σχ. 67)· ὅθεν γίνεται παραλληλόγραμμον τὸ ΑΟΠΓ τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΠ, ϗ τὸ αὐτὸ ὕψος ΓΔ τῷ ΑΠΓ τριγώνῳ ἔχον, ȣ̃ τὸ ἥμισύ ἐςι τὸ τρίγωνον διὰ τὴν δίχα τέμνȣσαν τὸ παραλληλόγραμμον διαγώνιον, ἥτις ἐςὶν ἡ τρίτη τῶν τȣ̃ τριγώνȣ πλευρῶν· ἐπεὶ δὲ ΑΟΠΓ = ΑΠ × Οτ· τὸ δὲ ΑΠΓ τρίγωνον ἥμισυ (238) ἐςὶ τȣ̃ ΑΟΠΓ· ἄρα ΑΠΓ = $\frac{A\Pi \times O\tau}{2}$ Ο. Ε. Δ.

286. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Κληθέντος υ τȣ̃ ὕψȣς παντὸς τριγώνȣ, ϗ β τῆς αὐτȣ̃ βάσεως, ἔςαι $\frac{\upsilon}{2} \times \beta = \upsilon \times \frac{\beta}{2} = \frac{\upsilon \times \beta}{2} = \frac{\upsilon\beta}{2}$· „πᾶν ἄρα τρίγωνον ἐςιν ἴσον, ἤτοι τῷ „γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ϗ τȣ̃ ἡμίσεως ὕψȣς, ἢ τῷ „ὑπὸ τῆς ἡμιβάσεως ϗ τȣ̃ ὕψȣς, ἢ τέλος τῷ ἡμίσει τȣ̃ „γινομένȣ ὑπὸ τῆς βάσεως ϗ τȣ̃ ὕψȣς.“

287. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ἐὰν παραλληλογράμμȣ τȣ̃ ΑΟΠΓ (σχ. 67) τεθείσης εἰς βάσιν τῆς ΑΠ πλευρᾶς μὴ

ἐξῆ ἀγαγεῖν κάθετον ἄλλην, ἢ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ τῇ ΑΠ βάσει προεκβληθείσῃ, ϗ τόδε τὸ παραλληλόγραμμον ἐ δὲν μᾶλλον ἴσον ἔϛαι τῷ ὑπὸ τῆς βάσεως ΑΠ, ϗ τῆς καθέτȣ ΓΔ, καίτοι ἐκτὸς πιπτέσης τȣ παραλληλογράμμȣ, γινομένῳ· ἔργον γὰρ τȣ ὕψȣς τὸν ἀριθμὸν ἐμφαίνειν τῶν τȣ παραλληλογράμμȣ ϛοιχείων (282)· ἐμφαίνει δὲ ἡ ΓΔ κάθετος τȣτον τὸν ἀριθμὸν, ὡς ϗ ἡ Οτ ἐν αὐτῷ τῷ παραλληλογράμμῳ, ἐπειδὴ ΓΔ = Οτ (127)· ἄλλωςτε ϗ πάντα τὰ διὰ ταύτης ϛοιχεῖα ϗ δὶ ἐκείνης διΐασι κατὰ κάθετον.

288. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τεθείσης τῆς ΑΠ εἰς βάσιν τριγώνȣ τȣ ΑΠΓ, τὴν ΓΔ ἀγαγεῖν δεῖ κάθετον τῇ ΑΠ βάσει προεκβληθείσῃ.

289. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ΄. Ἀποδείξασι τὰ ἐπὶ τῶν παραλληλογραμμικῶν ἐπιφανειῶν δύω προεκτεθέντα θεωρήματα, ἑξῆς ἂν εἴη διὰ πορισμάτων ἐπαγαγεῖν ϗ τȣς πρὸς ἄλληλα αὐτῶν λόγȣς.

290. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐπεὶ τὸ μὲν παραλληλόγραμμον περιέχεται ὑπὸ τῆς βάσεως ϗ τȣ ὕψȣς, τὸ δὲ τρίγωνον ὑπὸ τȣ ἡμίσεως ὕψȣς ϗ τῆς βάσεως, δύω μὲν παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχȣσι συγκείμενον ἔκ τε τῶν βάσεων ϗ τῶν ὑψῶν, δύω δὲ τρίγωνα, λόγον συγκείμενον ἐκ τῶν βάσεων ϗ τῶν ἡμίσεων ὑψῶν (Συμ. Λογ. 291)· ἐντεῦθεν ἄρα ἕπονται οἱ λόγοι τῶν ἐν αὐτοῖς ἐπιφανειῶν.

α΄. Δύω παραλληλόγραμμα, ἢ δύω τρίγωνα, τὴν αὐτὴν βάσιν ϗ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐχόντα, ἢ ὧν αἱ βάσεις ἀντιπεπόνθασι τοῖς ἐν αὐτοῖς ὕψεσιν, ἴσα εἰσί. (Συμ. Λογ. 301, 303).

β΄. Δύω παραλληλόγραμμα, ἢ δύω τρίγωνα, ἴσας

μὲν βάσεις, ὕψη δὲ ἄνισα ἔχοντα, πρὸς ἄλληλα εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη· ἔχοντα δὲ ἴσα μὲν ὕψη, ἀνίσȣς δὲ βάσεις, ὡς αἱ βάσεις (Συμ. Λογ. 306).

γ΄. Ῥᾷςα τοίνυν ἐντεῦθεν κατασκευασθήσεται παραλληλόγραμμον ἢ τρίγωνον ἔχον πρὸς παραλληλόγραμμον, ἢ τρίγωνον, τὸν ἐπιταχθέντα λόγον, εἴτ' ȣ̂ν διπλȣ̂ν, τριπλȣ̂ν κτ., ἢ ὑποδιπλάσιον, ὑποτριπλάσιον κτ.· κείσθω φέρε κατασκευάσαι (σχ. 67) παραλληλόγραμμον τετραπλάσιον τȣ̂ ΑΟΠΓ· ληφθήσεται τοίνυν, ἤτοι 2ΑΠ καὶ 2ΓΔ (242), ἢ ΑΠ ϗ 4ΓΔ, ἢ τέλος ΓΔ ϗ 4ΑΠ (290).

291. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐὰν παραλληλόγραμμα δύω ΓΔΑΗ, κΠΓΕ τὴν αὐτὴν ἔχωσι βάσιν ΓΗ = κΕ, ϗ ἐν ταῖς αὐταῖς ὦσι παραλλήλοις ΠΑ, κΗ, ἴσα ἔσονται· κοινὸν μὲν γὰρ αὐτοῖς ὕψος τὸ ΓΔ, ἡ Ρβ (127)· ἴση δὲ ἡ βάσις (282).

292. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον (σχ. 68) τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΓ τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΒΓ, ϗ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ΑΓ, ΒΔ, εἰσὶν ἴσα· κοινὸν μὲν γὰρ αὐτοῖς ἐςι τὸ ὕψος (196, 127)· ἔχȣσι δὲ ϗ βάσιν τὴν αὐτήν· ἄρα εἰσὶν ἴσα (285).

293. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐντεῦθεν ἄρα συνάγεται μέθοδος, καθ' ἣν πολύγωνόν τι τὸ ΑΔΓΠΖ ἐφ' ἕτερον μετασχηματίζεται τὸ ΒΓΠΖ ἴσον μὲν ἐκείνῳ, μιᾷ δὲ πλευρᾷ ἐλλεῖπον.

ά. Εἰλήφθωσαν γὰρ δύω τινὲς γωνίαι αἱ Γ, Α, ἀφοριζόμεναι τρίτης τινὸς τῆς Δ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ· ταύτῃ δὲ διὰ τῆς ἀφοριζέσης Δ γωνίας ἤχθω παράλληλος ἡ ΔΒ, ϗ προεκβεβλήσθω ἡ ΖΑ (ἢ ἡ ΠΓ), ἔςτ' ἂν συμβάλῃ τῇ ΔΒ παραλλήλῳ· γ΄. ἡ ΓΒ ἐπιζευγνύτω τὰ σημεῖα Γ, Β, καθ' ὃ προαχθεῖσα ἡ ΖΑ συνήντησε τῇ

ΔΒ παραλλήλῳ· φημὶ ȣ̃ν ὡς τὸ τετράπλευρον ΖΓΠΒ ἴσον ἐςὶ τῷ πενταπλεύρῳ ΖΠΓΔΑ· ἔςι μὲν γὰρ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ἴσον τῷ τριγώνῳ ΑΓΒ, ὡς τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΓ ἔχοντα ϗ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΓ, ΔΒ κείμενα (292), οἷς κοινῇ προσεθέντος τȣ̃ τετραπλεύρȣ ΖΠΓΑ, ἔςαι ΖΠΓΔΑ = ΓΖΠΒ.

294. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Ἅπαν ἄρα πολύγωνον μεταποιηθῆναι δύναται εἰς τρίγωνον ἴσον τῷ πολυγώνῳ· ἀεὶ γὰρ δυνατὸν τὴν πρᾶξιν ἐπαναλαμβάνειν, μέχρις ἂν ἐπὶ τρίπλευρον τὸ σχῆμα μετατράπηται, τῆς αὐτῆς ἀεὶ μενȣ́σης αὐτῷ ἐπιφανείας· ὡς γὰρ ἤδη τὸ πεντάπλευρον ἐπὶ τετράπλευρον μετήνεκται, τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς τρίγωνον τὸ τετράπλευρον τραπήσεται, ἀφοριϑεισῶν δύω γωνιῶν τῶν Π, Β, ἀπὸ τρίτης τινὸς τῆς Γ, ϗ δι' αὐτῆς παραλλήλȣ ἀχθείσης τῇ ΠΒ ἐπιζευχθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῶν ἄλλων, ὡς ϗ πρὸ τȣ̃, γενομένων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ ἐπιφανείας παντοίων εἰδῶν πολυγώνȣ.

295. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Πᾶν τραπέζιον τὸ ΑΠ, ΓΔ (σχ. 53), ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τȣ̃ ἡμίσεος τῶν δύω παραλλήλων πλευρῶν ΑΓ, ΠΔ, ϗ τȣ̃ ὕψȣς ΑΠ, εἴτ' ȣ̃ν τῆς ἑκατέρᾳ τῶν δύω παραλλήλων πλευρῶν καθέτου.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἀχθείσης τῆς διαγωνίȣ ΑΔ, τὰ δύω τρίγωνα ΑΠΔ, ΑΓΔ, ἐν δυσὶ παραλλήλοις ΑΓ, ΠΔ ὄντα, τὸ αὐτὸ ἔχȣσιν ὕψος ΑΠ (127)· ἔςι δὲ τὸ μὲν τρίγωνον ΑΠΔ = $\frac{1}{2}$ ΠΔ × ΑΠ· τὸ δὲ ΑΓΔ = $\frac{1}{2}$ ΑΓ

ΑΠ· ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων, εἴτ' ἓν τὸ τραπέζιον ΑΠΓΔ $= \overline{\frac{1}{2}\,\Pi\Delta + \frac{1}{2}\,\Pi\Gamma} \times A\Pi$, εἴτ' ἓν τῷ γινομένῳ ἐκ τοῦ ἡμίσεος τῶν δύω παραλλήλων πλευρῶν, καὶ τοῦ ὕψους. Ο. Ε. Δ.

296. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Πᾶν ἀκανόνιστον πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔ (σχ. 62) ἴσον ἐστὶ τῷ ἀθροίσματι τῶν τριγώνων ΑΖΠ, κτλ. τῶν αὐτῷ ἐμπεριεχομένων (Α'ριθμ. 9).

297. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἡμισείας αὐτοῦ περιμέτρου καὶ τῆς ὀρθῆς ἀκτῖνος.

ΔΕΙΞΙΣ. Αἱ μὲν πλάγιαι ἀκτῖνες ἅπαν κανονικὸν πολύγωνον (σχ. 59) εἰς ἴσα τρίγωνα διαιροῦσι τὰ ΠΟΔ, ΔΟΘ, κτλ. (248)· ἡ δ' ὀρθία ἀκτὶς ΖΟ τὸ ὕψος ἐμφαίνει πάντων αὐτῶν τῶν τριγώνων (196)· ἡ μὲν ἄρα τοῦ πολυγώνου περίμετρος ἔστι τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων πάντων τῶν τριγώνων· ἡ δ' ὀρθία ἀκτὶς ΖΟ ἔσται τὸ κοινὸν ἁπάντων ὕψος· ἀλλ' ἕκαστον τῶνδε τῶν τριγώνων ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἡμιβάσεως καὶ τοῦ ὕψους (285)· τὸ ἄρα ἄθροισμα πάντων τῶν τριγώνων, εἴτ' οὖν ὅλον τὸ πολύγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμιαθροίσματι πασῶν τῶν βάσεων, εἴτ' οὖν τῇ ἡμιπεριμέτρῳ, ἐπὶ τὴν ὀρθίαν ἀκτῖνα πολλαπλασιασθείσῃ. Ο. Ε. Δ.

298. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ κύκλος δυνάμει γοῦν πολύγωνόν ἐστι κανονικὸν, ἐξ ἀπείρων πλευρῶν συνιστάμενον, οὗ ἡ ὀρθία τῇ πλαγίᾳ ἀκτῖνι ἰσοῦται (261), ἡ ἐν αὐτῷ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ τῆς ἀκτῖνος.

299. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Κυκλικὸς τομεὺς ὁ ΠΓΔΟ ἴσος ἐστὶ τῷ ἡμιγινομένῳ ὑπὸ τοῦ ΠΓΔ τόξου καὶ τῆς ἀκτῖνος· ἐμφαίνει γὰρ τὸ ΠΓΔ πάσας τὰς βάσεις τῶν ἀπει-

ϱοςῶν τριγωνιδίων, ὧν τὸ ἄθροισμα συνίςησι τὸν ΠΓΔΟ τομέα, ἡ δὲ ΓΟ ἀκτὶς τὸ ὕψος ἁπάντων.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἰς δὲ τὴν τούτου εὕρεσιν ζητείσθω πρῶτον ἐν εὐθείᾳ γραμμῇ ἡ δύναμις τοῦ τόξου κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον· α΄. μετρηθήτω ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία ὑπὸ ΠΟΔ· β΄. εὑρεθείσης τῆς ὁλικῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, ὡς ὑποδείξομεν μικρῷ ὕςερον (375), ζητηθήτω διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν ἡ τοῦ ΠΓΔ τόξου δύναμις· εὕρηται φέρε ἡ ὑπὸ ΠΟΔ γωνία $5°$, εἶτ' οὖν τὸ καταμετροῦν αὐτὴν τόξον ΠΓΔ $= 5°$· εἰλήφθω οὖν ἐν ποσὶν ἡ ΠΟ ἀκτὶς, καὶ δὴ εὑρεθήσεται ἡ ὁλικὴ περιφέρεια ΠΗΝΓ ἐξ ὑποθέσεως $= 600$ ποσίν· οὐκοῦν $360 : 600 :: 5 : \chi = 8$ ἄρα ΠΓΔ $= 8$ ποσί. (*)

300. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἵν' εὑρεθῇ ἡ τμήματος τοῦ ΠχΕν ἐπιφάνεια (σχ. 69.), εἰλήφθω ἡ τοῦ ΠΓχΕν τομέως ἐπιφάνεια, εἶτα ἡ τοῦ ΠΓχ τριγώνου· καὶ δὴ ΠΓχΕν — ΠΓχ = ΠχΕν· ὃ καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον.

301. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Τέλος δὲ ἵνα μετρηθῇ ἡ ΑΒϱΔ ζώνη, τῆς ὁλικῆς τοῦ κύκλου ἐπιφανείας ἀφῃρήσθωσαν ἑκάτερον τῶν τμημάτων ΑΔΕΓ, ΒΜϱη· τὸ δὲ λειπόμενον προφανῶς ἐμφανεῖ τὴν τῆς ΑΒϱΔ ζώνης ἐπιφάνειαν.

(*) Φανήσεται δὲ ἐν τοῖς ἔμπροσθεν (369) ὡς τὴν κυκλικὴν περιφέρειαν, καὶ δὴ ὁ,τιοῦν τόξον, ἴσον εὐθείᾳ γραμμῇ ἐπ' ἀκριβὲς εὑρεθῆναι ἀμήχανον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ ἰσοπεριμέτρων σχημάτων.

302. Σχήματα καλῦνται ἰσοπερίμετρα τὰ τὴν αὐτὴν περίμετρον ἔχοντα, εἴτ' ὖν ὧν ἡ περίμετρος τῇ αὐτῇ ἰσῦται εὐθείᾳ.

303. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Δύω κανονικῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων μείζων ἡ ἐπιφάνεια, ἧ πλείυς εἰσὶν αἱ πλευραί.

ΔΕΙΞΙΣ. Τὸ κανονικὸν πολύγωνον ὅσῳ πλείυς ἔχει πλευρὰς, τοσύτῳ ἡ ὀρθία ἀκτὶς ἔγγιον γίνεται τῦ ἐξισωθῆναι τῇ τῆς πλαγίας δυνάμει (260), τοσύτῳ ἑπομένως μείζων γίνεται· τῆς δὲ περιμέτρυ ὔσης τῆς αὐτῆς, τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρυ ϗ τῆς ὀρθίας ἀκτῖνος τοσύτῳ μεῖζον ἔςαι, ὅσῳ μείζων εἴη ἡ ὀρθία ἀκτὶς· τῦτ' ἔςιν, ῦ πλείυς αἱ πλευραὶ, ἐκεῖνο ἔσεται μεῖζον (297). Ο. Ε. Δ.

304. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ ἄρα ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔλαττόν ἐςιν, ἢ τὸ αὐτῷ ἰσοπερίμετρον τετράγωνον· τὸ δὲ τετράγωνον ἔλαττον, ἢ τὸ ἰσοπερίμετρον πεντάγωνον, ϗ ἑξῆς ὡσαύτως· ὁ γεμὴν κύκλος, ὡς κανονικὸν πολύγωνον ἐκληφθεὶς ἐξ ἀπειραρίθμων πλευρῶν συνιςάμενον, ἔςαι μείζων παντὸς ἄλλυ ἰσοπεριμέτρυ οἱ κανονικῦ σχήματος.

305. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Δύω ἰσοπεριμέτρων ὀρθογωνίων, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐςιν, ῦ αἱ πλευραὶ εἰσὶν ἴσαι, ἢ μᾶλλον τῆς ἰσότητος ἔγγιον γίγνονται.

ΔΕΙΞΙΣ. Κείσθωσαν δύω ὀρθογώνια τὰ ΑΒΓΔ,

ΑΔΠΖ (Σχ. 54, 55)· ϗ ἔσω τετραγώνȣ μὲν ἥτε βάσις ΒΓ = 4, ϗ τὸ ὕψος ΑΒ = 4, ὧν τὸ ἄθροισμα 8· ἔσω δὲ ϗ τȣ͂ ἐπιμήκȣς ὀρθογωνίȣ ΑΔΠΖ, ΑΠ + ΑΔ = 8· τȣ͂ μὲν ȣ͂ν τετραγώνȣ ἐπιφάνεια ἔςαι 4 × 4 = 16· ἀλλ' ἡ τȣ͂ ἐπιμήκȣς ὀρθογωνίȣ ἐπιφάνεια, καίτοι ἰσοπεριμέτρȣ, ἔςαι ἀλλ' ȣ͂ν ἐλάττων ἢ 16· ἐγγίσει μέντοι μᾶλλον τῷ 16, ὅσῳ μᾶλλον ἡ βάσις τȣ͂ ἐξισωθῆναι τῷ ὕψει ἐγγὺς γίνεται· ἐὰν γὰρ ἡ μὲν βάσις τεθῇ = $7\frac{1}{2}$, τὸ δὲ ὕψος = $\frac{1}{2}$, ἔςαι ἡ ἐπιφάνεια = $7\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ (283) = $3 + \frac{3}{4}$· ἐὰν δὲ ἡ μὲν βάσις ᾖ = 7, τὸ δ' ὕψος = 1, ἔςαι ἡ ἐπιφάνεια = 7 × 1 = 7· ἐὰν δὲ ἡ μὲν βάσις ᾖ = 5 τὸ δὲ ὕψος = 3, ἔςαι ἡ ἐπιφάνεια 5 × 3 = 15· δῆλον ἄρα, ὡς ὅσῳ μᾶλλον ἡ βάσις ἐγγίζει τȣ͂ ἐξισωθῆναι τῷ ὕψει, τοσȣ́τῳ μᾶλλον αὔξει ἡ ἐπιφάνεια. Ο. Ε. Δ.

306. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Δύω παραλληλογράμμων, τὰς ἀντισοίχȣς πλευρὰς ἴσας ἐχόντων, ϗ ἰσοπεριμέτρων ὄντων ἑπομένως, ἀλλὰ τȣ͂ μὲν ὄντος ὀρθογωνίȣ, τȣ͂ δὲ πλαγιογωνίȣ, τὸ ὀρθογώνιον μεῖζόν ἐςι.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςωσαν ὀρθογωνίου τȣ͂ ΑΒΓΔ (Σχ. 70) αἱ ἀντίςοιχοι πλευραὶ ἴσαι ἑκάςῃ ταῖς τȣ͂ πλαγιογωνίȣ ΑΟΘν· ἡ μὲν ȣ͂ν ἐπιφάνεια τȣ͂ ὀρθογωνίȣ ἴση ἐςὶ τῷ ΑΒ × ΒΓ (283)· ἡ δὲ τȣ͂ πλαγιογωνίȣ, τεθείσης τῆς Ον εἰς βάσιν, ἴση ἔςαι τῷ Ον × Θτ· ἐπεὶ δὲ ἐξ ὑποθέσεως Ον = ΑΒ, ϗ ΑΓ > Θτ, ἔςαι ΑΒ × ΒΓ > ΑΒ × Θτ (Συμ. Λογ. 307), ϗ δὴ μεῖζον ϗ τȣ͂ Ον × Θτ· ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τȣ͂ ὀρθογωνίȣ ἐςὶ μείζων τῆς ἐπιφανείας τȣ͂ πλαγιογωνίȣ, ȣ͂ αἱ πλευραὶ ἴσαι τίθενται ταῖς τȣ͂ ὀρθογωνίȣ. Ο. Ε. Δ.

307. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ὅσῳ ἄρα ἡ μὲν Ο γωνία ἀμβλεῖα, ἡ δ' Α ὀξεῖα, τοσȣ́τῳ ἔλαττον γίνεται τὸ

ϑτ ὕψος, ϗ τοσ8τῳ ἑπομένως ἐλαττ8ται ἡ ἐπιφάνεια· δύω ἄρα παραλληλογράμμων πλαγιογωνίων, τὰς αὐτὰς ἀντιςοίχ8ς πλευρὰς ἐχόντων, μείζονα ἐπιφάνειαν ἕξει, 8 αἱ δύω μείζ8ς γωνίαι εἰσὶν ἧττον ἀμβλεῖαι.

308. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐν γένει ἄρα πάντων τῶν ἰσοπεριμέτρων παραλληλογράμμων τὸ τετράγωνον ἐςὶ μεῖζον· μεῖζον γὰρ ϗ ὀρθογωνί8 ἐπιμήκ8ς ἰσοπεριμέτρ8 (305) ϗ παραλληλογράμμ8 πλαγιογωνί8 ἰσοπεριμέτρ8 (306).

309. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Πολλ8 γε ἄρα ϗ δεῖ τῶν πολυγώνων ἐν γένει τὰς ἐπιφανείας ἀνάλογον ἔχειν ταῖς αὐτῶν περιμέτροις.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ ἀναλογικῶν εὐθειῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ ἀναλογίας τῶν γραμμῶν.

310. Ἐὰν εὐθεῖα εὐθεῖαν περιέχῃ, ὁσάκις τρίτη περιέχει τετάρτην, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογοι λέγονται· ἐὰν γὰρ (σχ. 71) ἡ ΑΖ εὐθεῖα τμηθῇ εἰς πέντε μέρη ἰσάλληλα, εἴτ' 8ν γένηται ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ,

κτλ. τμηθῇ δὲ ϗ ΑΤ ὡσαύτως, ὡς ὑπάρχειν ΑΘ = ΘΙ = ΙΤ, κτλ. προκύψωσι τέσσαρες ἀνάλογοι εὐθεῖαι ΑΒ : ΑΘ : : ΑΖ : ΑΤ· ἐπεὶ γὰρ τὰ ὅμοια μέρη δυοῖν ὅλων πρὸς ἄλληλα ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ϗ τὰ ὅλα (Συμ. λογ. 234), ἔσαι ἐξ ἀνάγκης ἡ ἑξῆς ἀναλογία: τὸ ΑΒ πέμπτον μέρος τῆς ΑΖ πρὸς τὸ ΑΘ πέμπτον μέρος τῆς ΑΤ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ὅλη ΑΖ πρὸς τὴν ὅλην ΑΤ.

311. Ἔσαι ἔτι κατὰ τὴν ὀσιώδη ἰδιότητα ἁπάσης ἀναλογίας (Συμ. λογ. 238.) ΑΒ × ΑΤ = ΑΘ × ΑΖ, ὅ ἐσι (280) τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἐπὶ τῆς ΑΤ ὡς βάσεως δι' ὕψους τοῦ ΑΒ σὺνισάμενον ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ συγκροτουμένῳ ἐπὶ βάσεως τῆς ΑΖ δι' ὕψους τοῦ ΑΘ.

312. Ἵνα δὲ ϗ τῇ τῶν εὐθειῶν ἀναλογίᾳ, ὡς ϗ τῇ τῶν ἀριθμῶν, οἰκειωθῶμεν, ἐκδηλωθήτωσαν πρὸς τὸ παρὸν ἐν ἀριθμοῖς τέτταρσι τέτταρες εὐθεῖαι.

Ἔσω φέρε ΑΤ = 2 ΑΖ· οὐκοῦν ϗ ΑΘ = 2 ΑΒ· τεθείσθω αὖθις ΑΒ = 1, καὶ ΑΖ = 5· οὐκοῦν ἔσαι ΑΘ = 2, ϗ ΑΤ = 10· ἡ δὲ ἀναλογία : ΑΒ : ΑΘ :: ΑΖ : ΑΤ μεταπεσεῖται εἰς 1 : 2 : : 5 · 10· ἐὰν δὲ Α = 1 ποδὶ, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἔσαι ὀρθογώνιον ἐπίμηκες, ἔχον μῆκος μὲν πόδας 10, πλάτος δὲ 1, εἴτ' οὖν πόδας τετραγωνικοὺς 10 (281), τὸ δὲ ὑπὸ τῶν μέσων γινόμενον ἔσαι ὀρθογώνιον ἐπίμηκες, ἔχον πέντε μὲν ποδῶν μῆκος, δύω δὲ πλάτος· ἑκάτερον δὲ θατέρου διενηνοχὸς τῷ σχήματι, ἰσάλληλα μέντοι ἔσι τὰς ἐπιφανείας, ὡς περιέχοντα ἑκάτερον δέκα τετραγωνικοὺς πόδας.

313. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ. Δύω εὐθεῖαι ὑπὸ δυεῖν παραλλήλων ἀπολαμβανόμεναι εἰσὶν ἀνάλογοι

δυσὶν εὐθείαις ὑπὸ δυεῖν παραλλήλων ϗ αὐταῖς ἀπολαμβανομέναις, ϗ ὥσπερ ἐκεῖναι, κεκλιμέναις.

ΔΕΙΞΙΣ. Τετμήσθω ἡ ΑΖ (σχ. 71.) εἰς πέντε ἰσάλληλα μέρη τὰ ΑΒ, ΒΓ, κτλ. ϗ συνεςάσθω δι' ἄλλης εὐθείας πρὸς τὸ δοκῦν ἡ Α γωνία, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΤ, ϗ διὰ τῶν σημείων Β, Γ, κτλ. ἤχθωσαν τῇ ΖΤ παράλληλοι αἱ ΑΞ, ΒΘ, κτλ. τμηθήσεται ὖν ἡ ΑΤ εἰς πέντε ἰσάλληλα μέρη, ἀλλὰ δὴ ὡσαύτως ϗ ἡ ΑΖ· εἴγε πάντα μὲν τὰ μέρη τῆς ΑΤ εὐθείας ΑΘ, ΘΙ, ἀπολαμβάνεται ὑπὸ παραλλήλων, ϗ ἐπ' αὐτῶν ἐπίσης κέκλιται (128)· πάντα δὲ τὰ ΑΒ, ΒΓ μέρη τῆς ΑΖ, ὑπὸ παραλλήλων ἴσον ἀπεχυσῶν καὶ ἐπίσης πάντα ἐπ' αὐτῶν κέκλιται.

α΄. Δύω ἄρα μέρη τῆς ΑΖ πρὸς δύω τῆς ΑΤ τὰ ἐν ταῖς παραλλήλοις παραβαλλόμενα, ἔσονται ἀνάλογα ταῖς ὅλαις εὐθείαις ΑΖ, ΑΤ ταῖς ἀπολαμβανομέναις ὑπὸ δύω ἑτέρων παραλλήλων Ακ, ΖΤ· εἰλήφθων γὰρ πρὸς τὸ δοκῦν τὰ μέρη ΑΒ, ΑΘ κείμενα ἐν ταῖς παραλλήλοις ΑΞ, ΒΘ, ϗ παραβεβλήσθων ταῖς δυσὶν ὅλαις εὐθείαις ΑΖ, ΑΤ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΑΞ, ΖΤ κειμέναις· φημὶ δὴ ὡς αἱ πρότεραι, καθὰ ϗ αἱ ὕςεραι, κεκλιμέναι, εἰσὶν αὐταῖς ἀνάλογοι. εἴτ' ὖν ΑΒ : ΑΘ :: ΑΖ : ΑΤ· ἐν γὰρ πέμπτον τῆς ΑΖ, εἶτ ὖν ΑΒ πρὸς ΑΘ πέμπτον τῆς ΑΤ, ὡς ἡ ὅλη εὐθεῖα ΑΖ πρὸς τὴν ὅλην ΑΤ.

β. Ταὐτὸν μέντοι ἔςαι, ϗ ἐὰν παραβληθῶσι μέρη τυχόντα τῶν δύω εὐθειῶν, κείμενα ἐν δυσὶ παραλλήλοις, ἀποςήματι ᾧτινιῦν ἀπεχύσαις, πρὸς αὐτας τὰς ὅλας εὐθείας· εἰλήφθωσαν γὰρ δύω τυχῦσαι παράλληλοι ΒΘ, ΕΧ· φημὶ ὖν ὡς ἔςι ΒΕ : ΘΧ :: ΑΖ : ΑΤ, ὃ ἐ-

στι τρία πεμπτημόρια τῆς ΑΖ, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΒΕ, εἰσὶ πρὸς τρία πεμπτημόρια τῆς ΑΤ, τοῦτ' ἔστι τὴν ΘΧ, ὡς ἡ ὅλη ΑΖ πρὸς τὴν ὅλην ΑΤ, ὃ καθ' ἑαυτό ἐστι πρόδηλον.

γ'. Ἀλλὰ ϗ μέρη δυεῖν ὅλων εὐθειῶν ὑπὸ δυεῖν ὡρισμένων παραλλήλων ἀπολαμβανόμενα ἀνάλογον ἔχουσι δυσὶν ἑτέροις αὐτῶν μέρεσιν ἀπολαμβανομένοις ὑπὸ δύω παραλλήλων ὡρισμένων· ἔστωσαν οὖν δύω παράλληλοι αἱ ΑΞ, ΓΙ, ϗ ἄλλαι αἱ ΓΙ, ΖΤ· φημὶ οὖν ὡς ἔστιν ΑΓ : ΑΙ : : ΓΖ : ΙΤ, εἴτ' οὖν $\frac{2}{5}$ ΑΖ πρὸς $\frac{2}{5}$ ΑΤ, ὡς $\frac{3}{5}$ ΑΖ πρὸς $\frac{3}{5}$ ΑΤ, ὃ ϗ αὐτὸ προδηλότατον.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἀλλὰ γὰρ τὴν προεκτεθεῖσαν ἀναλογίαν, τὰ μέγιστα ἡμῖν ἐν τοῖς ἐφεξῆς ξυντελέσουσαν, δεικτέον εἶναι μοι δοκεῖ ϗ καθολικώτερον.

Θῶμεν γὰρ τὴν ΑΖ εὐθεῖαν διῃρημένην οὐκ εἰς πέντε μέρη ἰσάλληλα, ἀλλ' εἰς ἄπειρα, ϗ δι' ἑκάστου σημείου τῶν προσεχεστάτων διατομῶν Β, Γ, Δ, διϊούσας, ὡς διὰ τοῦ Α, παραλλήλους τῇ ΖΤ. α'. πασῶν τῶν παραλλήλων ἴσῳ ἀποστήματι ἀπεχουσῶν, πάντα τὰ μέρη τῆς ΑΤ, τὰ ἐναπολαμβανόμενα μεταξὺ δύω προσεχῶν παραλλήλων τὰ ΑΘ, ΘΙ, ΙΤ, ϗ ἴσον ἐπ' αὐταῖς κεκλιμένα (*), ἴσα ἔσονται. β'. πάντα τὰ μέρη ΑΘ, ΘΙ, κτλ. ἔσονται μέρη ὅμοια τῆς ὅλης ΑΤ, ἀπειροστὰ, ϗ σημεῖα ἴσα· ϗ ἔτι αἱ ΑΒ, ΒΓ, κτλ. ἔσονται μέρη ὅμοια, ἀπειροστὰ, ἢ σημεῖα τῆς ὅλης ΑΖ (51). γ'. ὁ ἀριθμὸς τῶνδε τῶν

(*) Πάντα ταῦτα τὰ μέρη ἴσον εἰσὶ κεκλιμένα ἐπὶ τῶν παραλλήλων· οὐδὲν γὰρ κυρίως εἰσὶν, ὅτι μὴ ἡ εὐθεῖα *ΑΤ*, ἢ ἐμπίπτουσα εἰς πάσας τὰς παραλλήλους ποιεῖ ἴσας τὰς ἀντιστοίχους γωνίας (132), ϗ δὴ ἐπίσης ἐφ' ἁπασῶν κλίνεται· αὐτὸ δὲ τοῦτο νοητέον ϗ περὶ τῶν μερῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* κτλ.

ὁμοίων μερῶν, τῶν δὲ τῶν ἀπειροςῶν τῆς ΑΤ τῶν κειμένων μεταξὺ δύω ὡρισμένων παραλλήλων ΑΞ, ΕΧ, ἴσȣται τῷ τῶν ὁμοίων μερῶν, τῶν ἀπειροςῶν τῆς ΑΖ, τῶν κειμένων μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων· ϗ γὰρ ἑκάτερος ἐμφαίνεται ὑπὸ τȣ ἀριθμȣ τῶν παραλλήλων ΒΘ, ΓΙ, ΔΥ, ΕΧ τῶν ἐντεταγμένων ἐκ τῆς ΑΞ ἕως αὐτῆς τῆς ΕΧ.

Ἐὰν ȣ̃ν ληφθῶσι τυχȣ̃σαι τρεῖς παράλληλοι ΑΞ, ΒΘ, ΕΧ, ἔςαι ἡ ἀναλογία ΑΒ. ΑΘ :: ΑΕ : ΑΧ, εἴτ' ȣ̃ν ἓν ἀπειροςὸν μέρος τῆς ΑΖ πρὸς ἓν ἀπειροςὸν τῆς ΑΤ, ὡς τέσσαρα τῆς ΑΖ πρὸς τέσσαρα τῆς ΑΤ (Συμϐ. λογ. 234)· ὡς δ' αὕτως ἔςαι ΑΒ : ΑΘ :: ΒΕ : ΘΧ.

Ληφθέντων ἄρα δύω τινῶν παραλλήλων χωρίων, δύω εὐθεῖαι κείμεναι ἐν τῷ πρώτῳ ἀνάλογοί εἰσι δυσὶν εὐθείαις κειμέναις ἐν τῷ δευτέρῳ κατὰ κλίσιν ὁμόιαν ἐκείναις.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἰςέον ἔτι, ὡς ȣ̉δὲν τὸ κωλῦον τὴν ἀναλογίαν, κἂν αἱ δύω πρότεραι, ϗ δὴ ϗ αἱ ὕςεραι, μὴ ὦσι μέρη τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ὥσπερ ȣ̃ν ἀνωτέρω ὑποτέθειται (γ΄.), ἀρκεῖ μόνον, ἵν' αἱ δεύτεραι ὁμοίως ταῖς πρώταις κεκλιμέναι ὦσιν ἐπὶ τῶν παραλλήλων· τȣτὶ ȣ̃ν ϗ δὴ δεικτέον.

α΄. Ἔςωσαν γὰρ αἱ αβ, αϑ τοσȣ́τῳ κεκλιμέναι ἐπὶ τῶν παραλλήλων ακ, βϑ, ὅσῳ αἱ ΑΒ, ΑΘ ἐπὶ τῶν ΑΞ, ΒΘ· ȣ̉κȣ̃ν ἡ γωνία β=Β, ϗ ἡ ϑ=Θ, ϗ ἡ α=Α (132).

Ἐπινοήσωμεν τοιγαρȣ̃ν τὴν αβ ἐπιτεθειμένην τῇ ΑΒ· ἐπεὶ δὲ ἡ γωνία α=Α, ἡ πλευρὰ αϑ πεσεῖται ἐπὶ τῆς ΑΘ· ϗ ἐπεὶ ἡ γωνία β=Β, ἡ βϑ παράλληλος

τῇ ΑΞα ἀναγκαίως πεσεῖται ἐπί τινος εὐθείας ὡρισμένης παραλλήλȣ τῇ ΑΞ, ἐπὶ τῆς ΒΘ φέρε, ἴσης αβ = ΑΒ· τὰ δύω ἄρα τρίγωνα αβϑ ΑΒΘ συγχυθήσονται· ϗ ȣ̃τως αἱ αβ, αϑ ἀνάλογοι ἔσονται ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, αἷς ϗ αἱ ΑΒ, ΑΘ· ὅ ἐςιν, αβ : αϑ : : ΑΖ : ΑΤ, ἢ αβ : αϑ : : ΒΔ : ΘΥ, κτλ.

β′ Εςωσαν δὲ ϗ τὰ μέρη βτ, ϑν τοσȣ́τῳ κεκλιμένα ἐπὶ τῶν παραλλήλων βϑ, τν, ὅσῳ αἱ ΒΔ, ΘΥ μέρη τῆς ΑΖ, ϗ ΑΤ εἰσὶ κεκλιμέναι ἐπὶ τῶν ἑτέρων παραλλήλων· ἐπεὶ ȣ̃ν ἡ γωνία β = Β, ϗ ϑ = Θ, προεκβληθεῖσαι αἱ βτ, ϑν πέραν τῆς βϑ, συμπεσȣ̃νται ϗ συςήσȣσι τὴν γωνίαν α = Α (*)· μετηνέχθω τοίνυν ἡ αβτ ἐπὶ τῆς ΑΒΖ, τῆς κορυφῆς α τῇ κορυφῇ Α ἐπιτεθείσης· ϗ δὴ αϑν πεσεῖται ἐπὶ ΑΘΤ· ϗ ἐπεὶ β = Β, ϗ βϑ παράλληλος τῇ τν, ϗ δὴ ϗ τῇ ακ, πεσεῖται ἀναγαίως ἐπί τινος παραλλήλȣ τῇ ΑΞ τῶν ἐν τῷ ΑΖΤ, ἐπὶ τῆς ΒΘ φέρε, ἡ δ᾽ ἑτέρα παράλληλος τν πεσεῖται ἐφ᾽ ἑτέρας ὡρισμένης παραλλήλȣ τῆς ΔΥ τυχόν· τὸ τοίνυν χωρίον αβθτν συγχυθήσεται τῷ ΑΒΘΔΥ, ϗ αἱ εὐθεῖαι βτ, ϑν ἔσονται ἀνάλογοι ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, αἷς ϗ αἱ ΒΔ, ΘΥ· ȣ̃τως ȣ̃ν ἔςαι ΑΒ : ΑΘ : : βτ : ϑν ϗ ΒΑ ΘΥ : : βτ : ϑν, κτλ.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ. Ὅταν ἄρα δύω εὐθεῖαι κέωνται ἐν δυσὶ παραλλήλοις, ϗ δύω ἕτεραι ἐν δυσὶν ἑτέραις, ϗ ὁμοίως ὦσι κεκλιμέναι, αἱ δεύτεραι ἀεί εἰσιν ἀνάλογοι ταῖς προτέραις, εἴτε αἱ δεύτεραι περιέχονται ἐν τοῖς αὐ-

(*) Τȣ̃το δὲ γίνεται, ὅτι βτ ϗ ϑν τοσȣ́τῳ κεκλιμέναι εἰσὶν ἐξ ὑποθέσεως, ὅσῳ ΒΔ ϗ ΘΥ.

τοῖς χωρίοις, ἐν οἷς ϗ αἱ πρῶται, εἴτε ϗ μὴ, κἂν ὦσι μέρη τῶν αὐτῶν ὅλων, ὧν ϗ ἐκεῖναι, κἂν μὴ· ἐν γένει ἄρα κτλ. Ο. Ε. Δ.

314. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ὅταν δύω εὐθεῖαι, ὑπὸ δύω παραλλήλων ἀπολαμβανόμεναι, τέμνωνται τρίτῃ παραλλήλῳ, τὰ περιεχόμενα ὑπὸ δύω παραλλήλων μέρη εἰσὶν ἀνάλογα ταῖς ὅλαις εὐθείαις· ἐὰν, φέρε, ὑποτεθῶσι δύω εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ (σχ. 72.) κείμεναι μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΙΕ, ΒΓ, ϗ τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης παραλλήλȣ τῆς ΖΘ, τὰ μέρη ΑΖ, ΑΘ εἰσὶν ἀνάλογα ταῖς ὅλαις ΑΒ, ΑΓ, εἴτ' ȣ̃ν ΑΖ : ΑΘ :: ΑΒ : ΑΓ· ϗ γὰρ αἱ ΑΖ, ΑΘ κεῖνται ἐν παραλλήλῳ διαςήματι· ὡσαύτως ϗ αἱ ΑΒ, ΑΓ· ϗ αἱ πρῶται κεκλιμέναι εἰσὶν ὁμοίως ταῖς δευτέραις, μερη ȣ̃σαι τȣ́των ἐκεῖναι.

315. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἐςὶ καὶ ΖΒ : ΘΓ :: ΑΒ : ΑΓ.

316. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ἐπεὶ δὲ αἱ ΑΖ, ΑΘ εἰσὶν ἐν παραλλήλῳ διαςήματι, ϗ αἱ ΖΒ, ΘΓ ἐν ἑτέρῳ κατ' ἴσην κλίσιν, εἰσὶν ἄρα ϗ τὰ μέρη αὐτῶν ἀνάλογα, εἴτ' ȣ̃ν ΑΖ : ΑΘ :: ΖΒ : ΘΓ.

317. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ἀφ' ἑκάςης τῶν ἀναλογιῶν τῶνδε, ϗ τῶν ὧν πέρι φθάσαντες εἰρήκαμεν, ποικίλαι ἀναφύονται ἐξισώσεις· ἐκ γὰρ ΑΖ : ΑΘ :: ΑΒ : ΑΓ πρόεισιν ἡ ἐξίσωσις ΑΓ × ΑΖ = ΑΒ × ΑΘ (311), ὅθεν

$$\text{ΑΓ} = \frac{\text{ΑΒ} \times \text{ΑΘ}}{\text{ΑΖ}}, \text{ ἢ } \text{ΑΖ} = \frac{\text{ΑΒ} \times \text{ΑΘ}}{\text{ΑΓ}}, \text{ κτλ.}$$

(Συμ. Λογισμ. 250), ϗ ȣ̃τως εὑρεῖν ἐςὶ τετάρτην εὐθεῖαν ἀνάλογον, τῶν δύω ἐν ἀριθμοῖς προαποδεδομένων.

318. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Δύω ἄρα εὐθειῶν, γωνίαν περιεχȣσῶν τυχȣ̃σαν τὴν Α, ἐὰν τὰ Β, Γ πέρατα ἐπιζευ-

ξῃ εὐθεῖα ἡ ΒΓ, ϗ αὐτῇ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΖΘ, ἔςαι α΄. ΑΖ : ΑΘ : : ΑΒ ; ΑΓ. β΄. ΑΖ : ΑΘ : : ΖΒ : ΘΓ. γ΄. ΖΒ : ΘΓ : : ΑΒ : ΑΓ· ἐὰν γὰρ διὰ τῆς κορυφῆς τῆς Α γωνίας ἀχθῇ τῇ ΖΘ ἡ ΙΕ παράλληλος, αἱ εὐθεῖαι εὑρεθήσονται ἐν δυσὶ παραλλήλοις διαςήμασι (314).

319. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Τριῶν ἄρα εὐθειῶν δοθεισῶν τῶν Α, Β, Γ, (σχ. 74) τετάρτη ἀνάλογος προκύψει· α΄. ἀχθεισῶν τέρματος ἄνευ ὑπὸ γωνίαν τυχȣ̃σαν τὴν Δ τῶν εὐθειῶν ΔΡ, ΔΠ. β΄. διὰ τȣ̃ διαβήτȣ μετενεχθείσης τῆς Α ἐπὶ τὴν ΔΡ, ὅθεν γίνεται ΔΕ, τῆς δὲ Β ἐπὶ τῆς ΔΠ, ὅθεν ΔΖ, ϗ ἐπιζευχθείσης τῆς ΕΖ· γ΄. μετενεχθείσης τῆς τρίτης Γ ἐπὶ τῆς ΔΡ ἐκ τȣ̃ Ε, ὅθεν ἔςαι ΕΡ· δ΄. ἀχθείσης τῆς ΡΣ παραλλήλως τῇ ΕΖ· ἡ ȣ̃ν ΖΣ ἔςαι ἡ ζητȣμένη τετάρτη ἀνάλογος· ϗ γὰρ ἔςι ΔΕ : ΔΖ : : ΕΡ : ΖΣ (318).

320. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐὰν δύω εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, (σχ. 72.), συνιςῶσαι γωνίαν τὴν Α, πίπτωσιν ἐπ᾽ ἄλλην τὴν ΒΓ, ϗ δύω ἄλλαι (σχ. 73) συνιςῶσαι γωνίαν τὴν α = Α κλίνωνται ἐπ᾽ ἄλλης, ὡς αἱ πρότεραι, τῆς ΒΓ, ἔςαι ΑΒ : ΑΓ : : αβ : αγ· ἀχθεισῶν γὰρ διὰ Α, α παραλλήλων ταῖς ΒΓ, βγ, εὑρεθήσονται ἐν παραλλήλοις διαςήμασιν αἱ εὐθεῖαι, καὶ δὴ καὶ κατ᾽ ἴσην κλίσιν ἐξ ὑποθέσεως (313).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τῆς ἐπὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων ἀναλογίας.

321. ΘΕΩΗΜΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ. Τῶν ὁμοίων τριγώνων αἱ ὁμόλογοι, ἢ ἀντίςοιχοι, πλευραὶ ἀνάλογον εἰσί.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπειδὴ τρεῖς πλευραὶ τρισὶ πλευραῖς ἐπὶ δυοῖν ὁμοίων τριγώνων ἀντιςοιχᾶσιν, ἔσονται πάντως ἀνάλογον τὰ τρίγωνα, ἐὰν δειχθῇ α΄. AB : AΓ :: αβ : αγ· β΄. AB : BΓ :: αβ : βγ· γ΄. BΓ : AΓ :: βγ : αγ (ϗ. 72, 73.).

α΄. Διὰ τῶν κορυφῶν A, α ἤχθωσαν παράλληλοι ταῖς βάσεσι BΓ, βγ· ἆκᾶν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι AB, αβ, AΓ, αγ ἐν παραλλήλοις διαςήμασι κεῖνται, ϗ ἐπεὶ B = β, ϗ Γ = γ (198) ἴσον εἰσὶ κεκλιμέναι ἐπ' αὐτῶν τῶν διαςημάτων (134)· ἄρα AB : AΓ :: αβ : αγ (313).

β΄. Ἤχθω ἡ τX παράλληλος τῇ AΓ, ϗ ἡ μ ν τῇ αγ· τοιγαρᾶν αἱ μὲν AB, BΓ ἀπολαμβάνονται ὑπὸ τᾶ παραλλήλᾱ διαςήματος Bτ, ΓA, αἱ δὲ αβ, βγ ὑπὸ τᾶ μν, αγ· ἔςι δὲ A = α, ϗ Γ = γ (198)· ἆκᾶν ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμέναι ἐπὶ τῶν παραλλήλων αἵτε τX, AΓ, ϗ αἱ αβ, βγ· ἄρα AB : BΓ :: αβ : βγ.

γ΄. Ἤχθω ἡ μὲν Θη παράλληλος τῇ BA, ἡ δὲ ιλ τῇ βα· ἆκᾶν αἱ μὲν ΓB, ΓA κεῖνται ἐν τῷ παραλλήλῳ διαςήματι ΘηAB, αἱ δὲ γβ, γα ἐν τῷ ιλβα· ϗ δὴ ὁμοίως, ὡς ἀνωτέρω, συλλογισάμενοι ἀποδείξομεν ὅτι BΓ : AΓ :: βγ : αγ· Ο. Ε. Δ.

322. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Συχνήτις ἡ χρῆσις τȣ̃ ἐκτεθέντος θεωρήματος παρὰ τοῖς Γεωμέτραις ἐπὶ τὰς δείξεις· δύω γὰρ εὑρίσκοντες ὅμοια τρίγωνα, ϗ ἐκ τέτων, ἥτις πρὸς τὸ τέλος αὐτὲς ἄγοι, τὴν ἀναλογίαν ἐκλέγοντες, ϗ ἐξίσωσιν συνιςῶντες, κἀκταύτης, εἰ δέοι, ἄλλην, καθικνȣ̃νται τȣ̃, ȣ̔ ςοχάζονται τέλȣς (Συμ. λογ. 394 κτ.).

323. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ὥσπερ ἐν ἀριθμοῖς, παντοίων διαθέσεων γινομένων τοῖς ὅροις, ἡ ἀναλογία σώζεται, εἰ μόνον τῷ ὑπὸ τῶν ἄκρων τὸ ὑπὸ τῶν μέσων ἐξισῷτο γινόμενον (Συμ. λογ. 242.)· ὡσαύτως κἀν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ἐπὶ τεσσάρων πλευρῶν ἀναλόγων, ὅπως ἂν μεταληφθεῖεν, ἀλύμαντος διασώζεται ἡ ἀναλογία· εἰ μόνον παραβάλλοιντο αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ, εἴτ' ȣ̃ν αἱ ὑποτείνȣσαι γωνίας ἴσας· ȣ̔́τω σκαληνȣ̃ τριγώνȣ ἡ μείζων τῇ μείζονι τῶν πλευρῶν, ἡ δ' ἐλάττων τῇ ἐλάττονι, ἡ δὲ μέση τῇ μέσῃ, παραθετέαι ὑπάρχȣσι.

324. ΠΟΡΙΣΜΑ. Δύω ὁμοίων τριγώνων (σχ. 72. 73.) αἱ πλευραὶ ἀνάλογον ἔχȣσι τοῖς ὕψεσι· ἐν τοῖς δυσὶ φέρε ὁμοίοις τριγώνοις ΑΒΓ, αβγ ἐςὶν Αρ : Αδ :: ΑΒ : αβ· ἐπεὶ γὰρ ἐξ ὑποθέσεως ἐςὶ δ = ρ, ϗ Β = β, τὰ δύω τρίγωνα ΑΒρ, αβδ, ἔχοντα δύω ἀντιςοίχȣς γωνίας ἴσας, εἰσὶν ὅμοια (218)· ἄρα ΑΒ μείζων πλευρὰ τȣ̃ ΑΒρ πρὸς αβ μείζονα πλευρὰν τȣ̃ αβδ ὡς Αρ μέση πλευρὰ τȣ̃ ΑΒρ· πρὸς αδ μέσην πλευρὰν τȣ̃ αβδ, εἴτ' ȣ̃ν ΑΒ : αβ :: Αρ : αδ· ἀνάλογοι ἄρα αἱ πλευραὶ ΑΒ, αβ τοῖς ὕψεσιν αρ, αδ.

325. Ἐπεὶ δὲ ρ = δ, ϗ Γ γωνία τȣ̃ ἐλάττονος τριγώνȣ ΑρΓ ἐςὶν ἴση τῇ γωνίᾳ θατέρȣ αδγ, διὰ τὸ ὅμοια εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ· τὰ δύω ἄρα μικρὰ τρίγωνα ΑρΓ, αδγ, δύω ἀντιςοίχȣς γωνίας ἴσας ἔχοντα,

εἰσὶν ὅμοια (218)· ἐκῦν ΑΓ : αγ :: Αρ : αδ, τϛτέςιν, αἱ δύω μέσαι πλευραὶ τῶν δύω τριγώνων ΑΒΓ, αβψ ἀνάλογον ἔχϛσι τοῖς αὐτῶν ὕψεσιν Αρ, αδ.

326. Ἐπεὶ δὲ δύω πλευραὶ αἱ ΑΒ, αβ, ἀνάλογον εἰσὶ ταῖς βάσεσι ΒΓ, βγ (321), εἰσὶ δὲ ἔτι ϗ τοῖς ὕψεσιν Αρ, αδ (324)· ἄρα ϗ αἱ βάσεις αὐταὶ ἀνάλογον εἰσὶ τοῖς ὕψεσιν (Ἀριθ. 11), εἴτ' ϛν ΒΓ : βγ :: Αρ : αδ.

327. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἵνα δὲ ἐξακριβώσωμεν τὴν ἤδη ἐπενεχθεῖσαν συνέπειαν, ϗ τὰ αὐτὰ ἐν ὁμοίαις περιςάσεσι συνάγειν ἔχωμεν, εἰλήφθω ὑπ' ὄψιν τὸ: δύω λόγοι τρίτῳ τινὶ ἴσοι καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσοι· οἱ μὲν γὰρ λόγοι, πηλίκα (Συμ. λογ. 183.)· τὰ δὲ, ποσότητες ἀναμφηρίςως ὑπάρχει· ἀλλὰ ποσὰ δύω τρίτῳ τινὶ ἴσα ϗ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα (Ἀριθμ. 11.), ἄρα δύω λόγοι τρίτῳ τινὶ ἴσοι ϗ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσοι· ἀλλ' ὁ λόγος τῶν πλευρῶν ΑΒ, αβ ἴσος ἐςὶ τῷ λόγῳ τῶν βάσεων ΒΓ, βγ· ἀνάλογοι γὰρ ἐκεῖναι ταύταις, ἡ δ' ἀναλογία λόγων ἐςὶν ἰσότης (Συμβ. λογ. 186.)· ἔςι δὲ ϗ ὁ τῶν ὑψῶν Αρ, αδ λόγος ἴσος τῷ τῶν πλευρῶν ΑΒ, αβ διὰ τὴν ἀναλογίαν ΑΒ : αβ :: Αρ : αδ (324)· ἄρα ὁ λόγος τῶν βάσεων ΒΓ : βγ ϗ ὁ λόγος τῶν ὑψῶν Αρ : αδ, ἰσϛμενοι τῷ αὐτῷ τρίτῳ λόγῳ ΑΒ : αβ, εἰσὶν ἴσοι ἀλλήλοις· ἐκῦν ἔςι ΒΓ : βγ :Αρ : αδ.

328. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ὅταν εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ (σχ. 75.) μεταξὺ παραλλήλων τῶν κρ, συντέμνωσιν ἀλλήλας, τὰ ἀντίςοιχα αὐτῶν μέρη ἀνάλογον εἰσί.

ΔΕΙΞΙΣ. Ι = τ, ὡς κατὰ κορυφὴν, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΔτ = ΒΓΙ (133). τὰ ἄρα τρίγωνα ΑΔτ, ΒΓΙ ὅμοια εἰσὶν (218)· ἐκῦν Ατ : Βτ :: τΔ : ΓΙ Ο. Ε. Δ.

329. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ο῞ταν χορδαὶ ΤΗ, Ζρ (σχ. 76.) τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰ μέρη τῆς ἑτέρας ἀντιπεπονθότα λόγον ἔχουσι πρὸς τὰ τῆς ἑτέρας.

ΔΕΙΞΙΣ. χ = ο, ὡς κατὰ κορυφήν· ἡ δὲ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ρΖΗ, βεβηκυῖα ἐπὶ τοῦ ρνΗ τόξου, τῷ ἡμίσει αὐτοῦ μετρεῖται (176), τῷ αὐτῷ δὲ μετρεῖται καὶ ἡ ΗΤρ, ὡς βεβηκυῖα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου· ἄρα ἡ ὑπὸ ρΖΗ = ΗΤρ· ὅμοια ἄρα εἰσὶ τὰ τρίγωνα Τρχ, ΖοΗ· ἄρα Το : οΖ :: ρο : οΗ (228)· Ο. Ε. Δ.

330. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ο῞ταν δύω ἐξωτερικαὶ τέμνουσαι ἀφ' ἑνὸς σημείου πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν ἐμπέσωσιν, ὡς αἱ Γϖ, Γο (σχ. 77), τὰ ἐκτὸς αὐτῶν μέρη Γη, Γτ ἀντιπεπονθότως ἀνάλογον εἰσὶ ταῖς ὅλαις εὐθείαις, τουτέστι Γη : Γτ :: Γο : Γϖ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν ηο, ϖτ, τὰ τρίγωνα Γϖτ, Γηο ὅμοια εἰσί· παρὰ γὰρ τὴν κοινὴν γωνίαν Γ, ἐστι ϖ = ο ὡς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ητ βεβηκυῖαι (176)· οὖκουν ἐστι Γη : Γτ :: Γο : Γπ, ἔνθα καταφανὲς ὡς τὰ μέρη τῶν δύω εὐθειῶν ἀντίστροφον τετάχαται ταῖς ὅλαις εὐθείαις. Ο. Ε. Δ.

331. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἡ ἁπτομένη ΓΡ τῆς διατεμνούσης Γϖ οὐδενὶ διαφέρει, ἥτις περὶ τὸ μένον σημεῖον Γ περιαγομένη, καὶ πρὸς τὸ Ρ κινουμένη, ἐφικνεῖται αὐτοῦ τοῦ Ρ, τοῦ ἐσωτερικοῦ μέρους ηρ μηδενὶ ἰσουμένου· ἀλλ' ἐπὶ τῆς διατεμνούσης ἐστι Γτ : Γη :: Γϖ : Γο (330) ἤ, Γτ : Γη :: Γη + πη : Γο, τοῦ πη = ο ὄντος ἐν τῇ ἁπτομένῃ, ἔσται Γτ ; Γη :: Γη : Γο· ἐπεὶ δὲ ἡ Γη γίνεται ΓΡ, ἐστιν ἄρα Γτ : ΓΡ :: ΓΡ : Γο, τουτέστιν „ὅ„ταν ἀφ' ἑνὸς σημείου τοῦ Γ ἀχθῶσιν ἁπτομένη τε τοῦ κύ„κλου ἡ ΓΡ, καὶ διατέμνουσα ἡ Γα· ἡ ἁπτομένη ἐστὶ μέση ἀνά-

„λογος, τȣτε ἐκτὸς τȣ̃ κύκλȣ, ϗ τȣ̃ ἐντὸς, τμημάτων τῆς „διατεμνȣ́σης.“

332. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἔςω ἡ ἁπτομένη ΑΠ = ον τμήματι ἐσωτερικῷ τῆς τεμνȣ́σης Αν (σχ. 78.)· ἐκεῖν ἔςαι Αο : ον :: ον : Αν· ἔςι μὲν γὰρ ἐξ ὑποθέσεως ΑΠ = ον, ἔςι δὲ (ἀνωτερ.) Αο : ΑΠ : ΑΠ : Αν· ἄρα Αο : ον :: ον : Αν, τȣτέςι „τὸ ἐξωτερικὸν τμῆμα Αο τῆς δια-„τεμνȣ́σης ἔςαι πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν ον ὡς τὸ ἐσωτερι-„κὸν ον πρὸς ὅλην τὴν διατέμνȣσαν.“

333. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ. Ἐὰν δὲ ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἡ οϐ παρὰ τὴν Π ἀχθῇ παράλληλος, ἔςαι αβ : βΠ :: βπ : ΑΠ· διὰ μὲν γὰρ τὰς παραλλήλȣς νΠ, οβ, αἱ Αν, ΑΠ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τέμνονται (313)· ἔςι δὲ Αο : ον :: ον : Αν.

334. ὉΡΙΣΜΟΣ. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖαι τέμνεσθαι λέγονται, ὅταν τὸ ἔλαττον τμῆμα πρὸς τὸ μεῖζον λόγον ἔχῃ, ὃν τὸ μεῖζον πρὸς τὴν ὅλην· ὡς ἀνωτέρω ἡ διατέμνȣσα Αν τέτμηται ὑπὸ τῆς περιφερείας· ϗ γὰρ Αο (ἔλαττον) : ον (μεῖζον) :: ον (μεῖζον) : Αν (ὅλην) (332).

335. Ἵν' ȣ̃ν εὐθεῖα ἡ ΑΠ ἄκρον ϗ μέσον λόγον τμηθῇ· α΄. ἐςάσθω πρὸς ὀρθὰς τῷ πέρατι Π ἡ ΚΠ = $\frac{1}{2}$ ΑΠ· β΄. κέντρῳ μὲν τῷ Κ, ἀκτῖνι δὲ τῇ ΚΠ, γεγράφθω κύκλος ὁ ΠΣγ· γ΄. ἀπὸ τȣ̃ Α ἤχθω διὰ τȣ̃ κέντρȣ διατέμνȣσα ἡ ΑΚν· δ΄. ἐπεζεύχθω ἡ νΠ, ϗ ἐκ τȣ̃ ο ἤχθω τῇ νΠ παράλληλος ἡ οϐ, ἥτις τεμεῖ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΠ ἄκρον ϗ μέσον λόγον· εἴτ' ȣ̃ν ἔςαι Αβ : βΠ :: βΠ : ΑΠ· ἐπεὶ γὰρ ἐκ κατασκευῆς ΑΠ = 2ΚΠ = ον, ἔςιν ἄρα Αο : ον :: ον : Αν (332)· ἐντεῦθεν δὲ (333) Αβ : βΠ : βΠ : ΑΠ.

336. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄. Τὰ τρίγωνα (Σχ. 79.), ὧν πᾶσαι αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἀνάλογον εἰσὶν, ἐςὶν ὅμοια.

α΄. Ἐπιτεθείσθω ἡ αβ πλευρὰ τῦ ἐλάττονος τριγώνυ ἐπὶ τὴν ΑΕ τῦ μείζονος, τιθεμένυ τῦ α ἐπὶ τῦ Α, ϗ γεγονέτω αβ = ΑΒ· ὑκῦν τὸ β συμπεσεῖται τῷ Β· ἐκ δὲ τῦ Β ἤχθω παράλληλος τῇ ΕΗ ἡ ΒΓ, γενήσονται ὖν δύω ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΕΗ· ἡ μὲν γὰρ Α γωνία ἐςὶν ἑκατέρῳ κοινὴ, ϗ Β = Ε (132).

β΄. Ἔςιν ὖν ΑΕ : ΑΗ :: ΑΒ : ΒΓ· ἀλλ᾽ ἐξ ὑποθέσεως ΑΕ : ΑΗ :: αβ : αγ· ἄρα ΑΒ : ΑΓ :: αβ : αγ (327)· ὑκῦν (Συμβ. λογ. 242.) ϗ ΑΒ : αβ :: ΑΓ : αγ· ἐπεὶ δὲ ἐκ κατασκευῆς ΑΒ = αβ, ἄρα ϗ ΑΓ = αγ.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν γὰρ ἀναλογίᾳ δύω ὅρων ἴσων ὄντων, ϗ οἱ ἄλλοι δύω ἰσάλληλοι ἔσονται· ὐ γὰρ ἂν ἄλλως ἐν ἀναλογίᾳ τέσσαρες ὅροι εἴησαν.

γ΄. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΑΒΓ, ΑΕΗ ἔςιν ἔτι ϗ ἥδε ἡ ἀναλογία· ΑΕ : ΕΗ :: ΑΒ : ΒΓ (321 β΄.) ἐπεὶ δὲ ἐξ ὑποθέσεως ἔςιν ΑΕ : ΕΗ :: αβ : βγ· ἐντεῦθεν ἄρα, ὡς ϗ ἀνωτέρω, ΑΒ : ΒΓ :: αβ : βγ, ἢ ΑΒ : αβ :: ΒΓ : βγ· ἐπεὶ δὲ ΑΒ = αβ, ἄρα καὶ ΒΓ = βγ.

Ἐπεὶ ὖν ἐκ μὲν κατασκευῆς ΑΒ = αβ, ἐκ δὲ δείξεως ΑΓ = αγ, ϗ ΒΓ = βγ· ἄρα τὸ τρίγωνον αβγ ἴσον ἐςὶ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ (221) ϗ δὴ ϗ ὅμοιον (198)· ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ ὅμοιόν ἐςι τῷ ΑΕΗ· ἄρα ϗ τὸ αβγ ὅμοιον ἔςαι τῷ ΑΕΗ· ὅταν ἄρα δύω τρίγωνα κτλ. Ο. Ε. Δ.

337. ΘΕΩΡΗΜΑ ς΄. Ἐὰν τριγώνυ δύω πλευραὶ ΑΕ, ΑΗ δυσὶ τριγώνυ πλευραῖς αβ, αγ ἀνάλογον ὦ-

σιν, αἱ δὲ ὑπὸ τῶν ἀναλόγων πλευρῶν περιεχόμεναι γωνίαι Α, α ἴσαι, τὰ τρίγωνα εἰσὶν ὅμοια.

ΔΕΙΞΙΣ. Κατεσκευάσθωσαν ἅπαντα ὡς ϗ ἐν τῷ ἡγεμένῳ θεωρήματι· ϗ δὴ ἔςαι ά. ΑΕ : ΑΗ :: ΑΒ : ΑΓ· β'. ἐπεὶ ἐξ ὑποθέσεως ΑΕ : ΑΗ :: αβ : αγ ἄρα ΑΒ : ΑΓ :: αβ : αγ (327), ἢ ΑΒ : αβ : ΑΓ : αγ (Συμβ. λογ. 242.)· ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς ΑΒ = αβ, ἄρα ϗ ΑΓ = αγ· ἐκοῦν τὸ αβγ τρίγωνον ἴσον ἐςὶ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ (221)· ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὅμοιόν ἐςι τῷ ΑΕΗ ἐκ κατασκευῆς· ἄρα ϗ τὸ αβγ ὅμοιόν ἐςι τῷ ΑΕΗ. Ο. Ε. Δ.

338. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τριγώνȣ ἄρα δοθέντος τȣ̃ ΑΕΗ, ϗ μιᾶς πλευρᾶς τῆς αβ, ἐπ' αὐτῆς ἐξέςαι τρίγωνον ὅμοιον κατασκευάσαι τῷ δοθέντι· συςαθείσης γὰρ τῆς ὑπὸ βαγ ἴσης τῇ ΕΑΗ, ϗ πρὸς τὰς ΑΕ, ΑΗ, αβ τετάρτης ἀναλόγȣ εὑρεθείσης (319) τῆς αγ, ϗ ἐπιζευχθείσης τῆς βγ, γενήσεται τὸ ἐπιταχθέν (337).

339. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'. Παντὸς κύκλῳ ἐγγεγραμμένȣ τετραπλεύρȣ τȣ̃ κβΟΖ (σχ. 80.), τὸ ὑπὸ τῶν δύω διαγωνίων βΖ, κΟ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐςὶ τοῖς δυσὶν ὀρθογωνίοις τοῖς ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον πλευρῶν τȣ̃ τετραπλεύρȣ ἅμα ληφθεῖσι· τȣ̃τ' ἔςι κΟ · βΖ = βκ · ΖΟ + κΖ · βΟ.

ΔΕΙΞΙΣ. ά. Ἤχθω ἡ βγ εὐθεῖα· ὥςε συνιςᾶν κατὰ τὸ β γωνίαν τὴν ὑπὸ κβγ ἴσην τῇ ὑπὸ ΖβΟ (85)· ἐκοῦν ὅμοια εἰσὶ τὰ κβγ, βΖΟ τρίγωνα· ἐπεὶ παρὰ τὰς δύω γωνίας κβγ, ΖβΟ, τὰς ἐκ κατασκευῆς ἴσας, ἔςι ϗ ἡ ὑπὸ βκγ, ἢ βκΟ = βΖΟ ὡς ἀμφοτέρων ἐπὶ τȣ̃ αὐτȣ̃ τόξȣ βΠΟ βεβηκυιῶν (177)· ἀλλὰ τῶν ὁμοίων τριγώνων

αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἰσίν ἀνάλογοι· ἄρα γκ : κβ :: ΖΟ : βΖ, ὅθεν γκ × Ζβ = κβ × ΖΟ (311).

β΄. Τὰ τρίγωνα βκΖ, βγΟ, εἰσὶν ὅμοια· καὶ γὰρ ἡ ὑπὸ κβΖ = ΓβΟ, (εἴγε κοινῆς ὅσης τῆς ὑπὸ γβΖ, ἡ ὑπὸ κβγ = ΖβΟ ἐκ κατασκευῆς,) καὶ ἡ ὑπὸ βΖκ = βΟγ, ὡς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ βνκ τόξου βεβηκυῖαι· ὅμοια ἄρα τὰ τρίγωνα βκΖ, βγΟ (218)· ἐντεῦθεν ἄρα γΟ : κΖ :: βΟ : βΖ· τοιγαροῦν γΟ × βΖ = κΖ × βΟ.

Ἐντεῦθεν οὕτω συλλογιούμεθα: τὸ κγ μέρος τῆς κΟ διαγωνίου, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὴν βΖ διαγώνιον, ἴσον ἔσται τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ἐπὶ βάσεως τῆς κβ δι᾽ ὕψους τῆς ἀπεναντίον πλευρᾶς ΖΟ συνισαμένῳ· τὸ δὲ γΟ κατάλοιπον μέρος τῆς κΟ διαγωνίου, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὴν βΖ διαγώνιον, ἴσον ἔσται τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ἐπὶ βάσεως τῆς πλευρᾶς κΖ δι᾽ ὕψους τῆς ἀπεναντίον πλευρᾶς βΟ συνισαμένῳ· ἀλλὰ ταὐτόν ἐστιν, εἰ πολλαπλασιασθῇ τὸ κγ μέρος τῆς κΟ διαγωνίου ἐπὶ βΖ, εἶτα τὸ γΟ κατάλοιπον μέρος ἐπὶ τὴν βΖ, ὡς εἰ πολλαπλασιασθῇ ἅπαξ ὅλη ἡ ἐσωτερικὴ διαγώνιος κΟ ἐπὶ τὴν βΖ διαγώνιον· ὥσπερ καὶ ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς (142) τὸ αὐτὸ προκύπτει ἔκ τε $20 \times 7 = 140$ καὶ ἐκ τῶν $20 \times 4 + 20 \times 3 = 140$· ἔστιν ἄρα κΟ × βΖ = κβ × ΖΟ + κΖ × βΟ. Ο. Ε. Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ.

340. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ βοΓ (σχ. 81). ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐςι τῷ τε ὅλῳ ϗ ἀλλήλοις.

ΔΕΙΞΙΣ. ά. Τὸ βοΠ ὅμοιόν ἐςι τῷ βοΓ· ἡ μὲν γὰρ β γωνία ἐςὶ κοινὴ, ἡ δὲ Π = ο· ἑκατέρα γὰρ ὀρθή· ἄρα ὅμοια εἰσὶ τὰ δύω τρίγωνα βοΓ, βοΠ (218).

β΄. Ὡσαύτως τὸ ΠοΓ ὅμοιόν ἐςι τῷ βοΓ· ἡ μὲν γὰρ γωνία Γ κοινὴ, ἡ δὲ Π = ο.

γ΄. Ἐντεῦθεν δῆλον ὅτι ϗ τὸ ΓοΠ ὅμοιόν ἐςι τῷ οΠβ (Ἀριθμ. 11) Ο. Ε. Δ.

341. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις βοΠ, οΠΓ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ (321) παρέχȣσι τὴν ἀναλογίαν βΠ : Πο : : Πο : ΠΓ, τȣτέςιν „ἡ Πο κάθετος „ἐςὶ μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύω τῆς ὑποτεινέσης „τμημάτων βΠ, ΠΓ τῶν ὑπ᾽ αὐτῆς τεμνομένων.‟

342. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐκ μὲν τῆς τῶν τριγώνων Πβο, βοΓ ὁμοιότητος ἔςι βΠ : βο : : βο : βΓ· ἐκ δὲ τῆς τῶν οΓΠ, Γοβ, ΠΓ : οΓ : : οΓ : βΓ, τȣτ᾽ ἔςιν „ἑκατέρα „τῶν ὑφ᾽ ἑκατέραν τῶν τȣ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ὀξειῶν „γωνιῶν ὑποτεινȣσῶν πλευρῶν μέση ἐςὶν ἀνάλογος τȣ „παρακειμένȣ αὐτῇ τμήματος τῆς βάσεως τεμνομένης ὑ-„πὸ καθέτȣ ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀγομένης, ϗ τῆς ὅ-„λης βάσεως.‟

343. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ. Η' (σχ. 82) ἐκ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀγομένη κάθετος μέση ἀνάλογός ἐςι μεταξὺ τῶν δύω τμημάτων βΖ, ΖΟ τῆς διαμέτρȣ, εἰς ἃ αὐτὴν διατέμνει.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ βΠ, ΠΟ, ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία βΠΟ, ὡς βεβηκυῖα ἐπὶ τȣ̃ βΟ ἡμικυκλίȣ, ἔςιν ὀρθὴ (180)· ὥςε ȣ̃ν τὸ βΠΟ τρίγωνον ὀρθογώνιόν ἐςι κατὰ τὸ Π, ἡ δὲ ΠΖ ἡ ἐκ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀχθεῖσα κάθετος, ἡ αὐτή ἐςι κάθετος ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας Π τȣ̃ βΠΟ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη· ἔςι δὲ αὕτη μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύω τῆς βάσεως τμημάτων, ἃ αὕτη διατέμνει (341)· ἄρα κτ Ο.Ε.Δ.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Θαυμασία αὕτη τȣ̃ κύκλου ἰδιότης, ἀπὸ παντὸς σημείȣ τῆς περιφερείας τὴν ἀγομένην τῇ διαμέτρῳ κάθετον ἀεὶ μέσην ἀνάλογον εἶναι τῶν δύω τῆς διαμέτρȣ τμημάτων, εἰς ἃ αὐτὴν διατέμνει.

344. ΠΟΡΙΣΜΑ. Α'. Ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς καθέτȣ τετραγώνῳ (Συμϐ. Λογ. 248).

345. Πιπτέτω ȣ̃ν πρῶτον ἡ κάθετος ἐπὶ τȣ̃ κέντρȣ· ἐκεῖ ἡ ΠΖ κάθετος, καὶ τὸ βΖ μέρος τῆς διαμέτρȣ, καὶ θάτερον ΖΟ, εὐθεῖαι τρεῖς ἰσάλληλοι ἔσονται (41)· ἐκεῖ $\Pi Z^2 = \beta Z . ZO$· τὸ δὲ ΠZ^2 τετράγωνον, ἀναγραφὲν ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος τȣ̃ κύκλȣ, μεῖζόν ἐςι παντὸς τετραγώνȣ, ἀναγραφομένȣ ἀπὸ πάσης ἄλλης καθέτȣ ἀγομένης ἀπὸ παντὸς τῆς περιφερείας σημείȣ ἐπὶ τὴν διάμετρον· ὥσπερ καὶ τὸ γινόμενον, ἢ τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρȣ ἰσαλλήλων τεθέντων περιεχόμενον, ἔςι μεῖ-

ζον παντὸς ἄλλȣ ὀρθογωνίȣ ὑπὸ δύω ἀνίσων τμημάτων περιεχομένȣ (305).

346. Τεθείσθω νῦν τὸ σημεῖον Π, ἀφ' ȣ̃ καθίεται ἡ ΠΖ, προσεχέσατον τῷ β πέρατι τῆς βΟ διαμέτρȣ· ȣ̉κȣ̃ν ἡ ΠΖ λίαν ἔσαι σμικρά· ϗ δὴ τὸ τετράγωνον ΠΖ² ἔσαι ϗ αὐτὸ λίαν μικρὸν· ϗ ȣ̋τω μέντοι ἰσωθήσεται τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ἀναγραφομένῳ ἐπὶ τῆς ΖΟ βάσεως, ϗ ὕψȣς τῆς βΖ· ἀεὶ γὰρ, ὡς ἐν γένει δέδεικται (343), ἡ κάθετος ἐσὶ μέση ἀνάλογος τῶν δύω τμημάτων.

347. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐντεῦθεν ἄρα δύω δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν βΖ, ΖΟ, μέση αὐτῶν ἀνάλογος εὑρεθήσεται· ἐὰν ά. αἱ δύω κατὰ μίαν ἐκτεθῶσι τὴν βΖΟ· β΄. διὰ τȣ̃ μέσȣ αὐτῆς Κ ὡς κέντρȣ (106) ϗ διασήματος τȣ̃ ΚΟ κύκλος γραφῇ ὁ βΠΟ· γ΄. ἐκ τȣ̃ Ζ, καθ' ὃ ἥνωνται αἱ δύω εὐθεῖαι, ἐγερθῇ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΠ, ἥτις ἐς τὴν περιφέρειαν προαχθεῖσα ἔσαι ἡ ζητȣμένη μέση ἀνάλογος· ϗ γὰρ βΖ : ΠΖ :: ΠΖ : ΖΟ.

348. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἵνα δὲ τρίτη ἀνάλογος εὑρεθείη, δύω δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν βΖ, ΠΖ· ά. ὑψȣ́σθω ἡ ΠΖ κάθετος τῷ πέρατι τῆς βΖ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ βΠ· β΄. ἠγέρθω ἐκ τȣ̃ Π τέρματος ἄνευ κάθετος ἡ ΠΟ τῇ βΠ· ἡ δὲ ΖΟ προαχθεῖσα, μέχρις ἂν συμβάλῃ τῇ ἀδιορίσῳ ΠΟ, ἔσαι ἡ τρίτη ζητȣμένη ἀνάλογος· ὃ καθ' ἑαυτὸ καταφανές· ἐὰν γὰρ διὰ τȣ̃ ταύτης τῆς εὐθείας μέσȣ Κ, ὡς κέντρȣ, γραφῇ ὁ κύκλος ὁ βΠΟ, ἔσαι βΖ : ΠΖ :: ΠΖ : ΖΟ (347).

349. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ. Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινȣ́σης τὴν ὀρθὴν γωνίαν τετράγωνον ἴσον ἐσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν περιεχȣσῶν τὴν

ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν τετραγώνοις, τϐτ᾽ ἔςι $\beta\Gamma^2 = o\Gamma^2 + \beta o^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. Συγκροτηθέντων τῶν τετραγώνων ΓβΚΛ, Νο, ϗ οΜ· ἤχθω ἡ Πο κάθετος ἐπὶ τὴν βΓ (χ. 83), ϗ δὴ ἔςαι ὅμοια τὰ τρία τρίγωνα βοΓ, ΠοΓ, βοΠ· παραθέσει ϐν τϐ ὅλϐ τριγώνϐ βοΓ πρὸς τὸ ΠοΓ τρίγωνον (321) ἔςαι βΓ ἢ ΓΚ : οΓ : : οΓ : ΠΓ, ὅθεν $K\Gamma \times \Pi\Gamma = o\Gamma^2$ (311).

Παραθέσει δὲ πάλιν τϐ ὅλϐ τριγώνϐ βοΓ πρὸς τὸ Ποβ, ἐκ τῶν ἀντιςοίχων, ἢ ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν, πρόεισιν ἡ ἀναλογία· βΓ ἢ βΛ : βο : : βο : βΠ· ὅθεν $\beta\Lambda \times \beta\Pi = \beta o^2$· ἄρα $\Gamma K \times \Pi\Gamma + \beta\Lambda \times \beta\Pi = o\Gamma^2 + \beta o^2$· ἀλλὰ $\Gamma K \times \Pi\Gamma + \beta\Lambda \times \beta\Pi = \Gamma\beta^2$· ἄρα· $\Gamma\beta^2 = o\Gamma^2 + \beta o^2$ Ο. Ε. Δ.

350. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τοῖς πρωτοπείροις σημειωτέον τέσσαρα ἀρχικὰ θεωρήματα ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ, ὧν τὸ μὲν δεύτερον διὰ τϐ πρώτϐ, τὸ δὲ τρίτον διὰ τῶν δύω προτέρων, τὸ δὲ τέταρτον διὰ τϐ τρίτϐ δείκνυνται, ἐφ᾽ ὧν θεμελίων δίκην πᾶσα γεωμετρικὴ γνῶσις ἵδρυται, τὰ δὲ λοιπὰ πάντα μονονϐ δι᾽ αὐτῶν ἐμπεδϐνται· ἰδϐ δὴ ταῦτα.

ά. Ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία μετρεῖται τῷ ἡμίσει τϐ τόξϐ, ἐφ᾽ ϐ βέβηκεν (176).

β΄. Παντὸς τριγώνϐ αἱ τρεῖς γωνίαι εἰσὶν ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς (209).

γ΄. Δύω ὁμοίων τριγώνων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἀνάλογον εἰσίν (321).

δ΄. Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινϐσης τετράγωνον ἴσον ἐςὶ τοῖς ἀπὸ τῶν περιεχϐσῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν (349).

351. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Δοθεισῶν ἄρα δύω πλευρῶν παντὸς ὀρθογωνίȣ, τῆς τρίτης ἡ δύναμις ἀεὶ εὑρεθήσεται, ἐὰν τȣ̃ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ βοΓ (σχ. 81) γνωσθῇ ἡ ὑποτείνȣσα βΓ, ϗ ἡ πλευρὰ οΓ· ἐπεί ἐςι $\beta\Gamma^2 = o\Gamma^2 + \beta o^2$, ȣ̓κȣ̃ν $\beta o^2 = \beta\Gamma^2 - o\Gamma^2$· ἄρα $\beta o = \sqrt{\beta\Gamma^2 - o\Gamma^2}$ ἔςω ȣ̃ν $\beta\Gamma = 5$, ϗ $\Gamma o = 4$ ἔςαι ȣ̃ν $\beta o^2 = 25 - 16$· ἄρα $\beta o = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$· ἐὰν δὲ γνωςαὶ ὦσιν ἡ βΓ ὑποτείνȣσα, ϗ ἡ βο πλευρὰ, ἡ Γο εὑρεθήσεται ἀφαιρȣμένȣ τȣ̃ ἀπὸ βο τετραγώνȣ ἀπὸ τȣ̃ ἀπὸ βΓ, ϗ ἐκ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς ἐξαγομένης τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης. Ἐὰν μέντοι γινώσκωνται αἱ Γο, βο πλευραὶ, εὑρεθήσεται ἡ ὑποτείνȣσα βΓ· ἔςαι γὰρ $\beta\Gamma = \sqrt{\Gamma o^2 + \beta o^2}$.

352. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ὀρθογωνίȣ ἄρα ϗ ἰσοσκελȣ̃ς τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινȣ́σης τὴν ὀρθὴν γωνίαν τετράγωνον διπλάσιόν ἐςι τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ σκέλȣς.

Καὶ τὸ ἀπὸ τῆς διαγωνίȣ διπλάσιον τȣ̃ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τȣ̃ τετραγώνȣ.

353. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐντεῦθεν δὲ, ὁπωσȣ̃ν δοθέντων τετραγώνων ἴσον ἅπασι τετράγωνον ἀναγράψαι παιδευόμεθα· κείσθωσαν γὰρ τετράγωνα τρία, ὧν πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ (σχ. 84.), ϗ συνεςάσθω γωνία ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΖΒΞ, ἧς τὰ σκέλη ἀπεράντως ἔςωσαν προεκτεινόμενα· ἐπὶ δὲ τῶν σκελῶν μετηνέχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ, ȣ̓κȣ̃ν ἔςαι $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$· ἑξῆς δὲ μετηνέχθω ϗ ἡ ΑΓ ἀπὸ τȣ̃ Β ἐπὶ τὸ Φ, ϗ ἡ τρίτη τῶν πλευρῶν ΓΔ ἐκ τȣ̃ Β ἐπὶ τὸ Ε, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΦ· τοιγαρȣ̃ν ἔςαι $\Phi E^2 = \Phi B^2 + EB^2$ (349)· ἀλλὰ $\Phi B^2 = (A\Gamma^2) = AB^2 + B\Gamma^2$· ἄρα $\Phi E^2 = AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ πυκνοτάτη χρῆσις τȣ̃ ἀποδειχθέν-

τος θεωρήματος παρέσχετο αὐτὸ ἓν τῶν τεσσάρων ἐξαιρέτων τῆς Γεωμετρίας θεωρημάτων· φασὶ δὲ Πυθαγόραν τοῦτο εὑρόντα ἑκατόμβην τῷ Ἀπόλλωνι θῦσαι, χάριτας αὐτῷ ἀφοσιούμενον ὑπὲρ τοῦ εὑρήματος, καὶ δὴ καὶ τὸ θεώρημα ἐκ τούτου ἑκατόμβη καλεῖσθαι ἐξενίκησεν, ὅπερ ἡ ΜΖ΄ τοῦ Α΄. βιβ. τῶν τοῦ ςοιχειωτοῦ καταριθμεῖται.

354. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ (σχ. 54) ἀσύμμετρός ἐςιν αὐτοῦ τῇ διαγωνίῳ· εὐθεῖα γὰρ ἀσύμμετρος ἑτέρᾳ καλεῖται, ὅταν ὁ λόγος αὐτῶν δι᾽ οὐδενὸς ἀριθμοῦ, οὔτε ὁλοσχεροῦς, οὔτε κλασματίου, ἐκδηλῶται (Συμβ. Λογ. 365), ὅταν, σαφέςερον εἰπεῖν, οὔτε διπλῇ, οὔτε τριπλῇ κτ., ἀλλ᾽ οὐθ᾽ ὑποδιπλῇ, ἢ ὑποτριπλῇ κτ. ἑτέρας ᾖ εὐθείας· ἀλλὰ μὴν ἀμήχανον δι᾽ ἀριθμοῦ ἐκδηλῶσαι τὸν τοῦ ἀπὸ τῆς διαγωνίου τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς· καὶ γὰρ ἡ μὲν διαγώνιος ἡ ὑποτείνουσά ἐςι τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ· τὸ δ᾽ ἀπ᾽ αὐτῆς τετράγωνον, ὡς ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν τετραγώνοις, ἑκατέρου ἐςὶ διπλάσιον· ἀδύνατον δὲ ἀριθμὸν εὑρεῖν, ἀφ᾽ οὗ ὁ τετράγωνος διπλάσιός ἐςιν ἑτέρου τετραγώνου ἀφ᾽ ἑτέρου ἀριθμοῦ (Συμβ. Λογ. 369)· ἀδύνατον ἄρα δι᾽ ἀριθμοῦ σημανθῆναι τὸν μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ μιᾶς τῶν ἄλλων πλευρῶν λόγον, ὅ ἐςι τὸν μεταξὺ τῆς τοῦ τετραγώνου διαγωνίου καὶ τῆς αὐτοῦ πλευρᾶς· ταύτην δὲ τὴν ἀσυμμετρίαν δείκνυσιν Εὐκλείδης ἐν προτάσ. ἐσχάτῃ τοῦ Ι΄. βιβλίου.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Σημειῶδες δὲ, ὡς δύω εὐθειῶν, καθὰ δὴ καὶ ἀριθμῶν δύω, ἀσυμμέτρων ὄντων ἀλλήλοις, τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα σύμμετρα εἶναι δύνανται· καίτοι

γὰρ τῆς διαγωνίου, ὡς εἴδομεν, ἀσυμμέτρου οὔσης τῇ πλευρᾷ, τὸ μέντοι ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον σύμμετρόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τετραγώνῳ, ὡς διπλοῦν ἐκεῖνο τούτου δεικνύμενον (352).

355. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τετραγώνου, οὗ πλευρὰ (σχ. 85) ἡ ΑΒ, ἀφελεῖν δέῃ τετράγωνον, οὗ πλευρὰ ἡ ΓΔ· ζητῆται δὲ ἡ πλευρὰ τετραγώνου τοῦ τῷ καταλοίπῳ ἰσουμένου, γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον, καὶ διὰ τοῦ διαβήτου ἀπὸ τοῦ Α προσηρμόσθω τῇ περιφερείᾳ χορδὴ ἡ $ΑΕ = ΓΔ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΒ· οὐκοῦν ἔσται $ΕΒ^2 = ΑΒ^2 - ΓΔ^2$· εἴτ' οὖν ΕΒ ἔσται ἡ ζητουμένη πλευρά.

356. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΑΒ (σχ. 86) τμηθῇ, εἰς ἴσα κατὰ τὸ Κ, καὶ ἄνισα κατὰ τὸ Λ, τὸ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον $ΑΛ \times ΛΒ$ ἴσον ἐστὶ τῇ ὑπεροχῇ, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετράγωνον $ΑΚ^2$ τοῦ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τμῆμα τοῦ ἐλάσσονος, εἴτ' οὖν ἐστιν $ΑΚ \times ΛΒ = ΑΚ^2 - ΚΛ^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἀνεστάσθω ἐκ τοῦ Λ κάθετος ἡ ΛΓ τελευτῶσα εἰς τὴν περιφέρειαν, καὶ ἐκ τοῦ Γ ἤχθω ἡ ΓΚ ἀκτίς· τοιγαροῦν ἐστιν $ΑΛ \times ΛΒ = ΛΓ^2$ (343), καὶ $ΚΚ^2 = ΚΓ^2 - ΛΓ^2$ (351)· ἐπεὶ δὲ $ΑΚ^2 = ΚΓ^2$ ὡς ἀπ' ἀκτίνων ἴσων τετράγωνα· ἄρα $ΛΚ^2 = ΚΑ^2 - ΛΓ^2$· ἀντὶ δὲ $ΛΓ^2$ ἀντικατασταθέντος τοῦ ἴσου αὐτῷ $ΑΛ \times ΛΒ$, ἔσται $ΛΚ^2 = ΛΑ^2 - ΑΛ \times ΛΒ$· μεταθέσεων δὲ γενομένων, $ΑΛ \times ΛΒ = ΚΛ^2 - ΛΚ^2$. Ο. Ε. Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ ἀναγωγῆς τῶν πολυγώνων.

357. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Βάσεως ἢ ὕψȣς δοθέντων, ὀρθογώνιον συςῆσαι ἴσον ἑτέρῳ ὀρθογωνίῳ, ȣ̔ ἡ βάσις ἢ τὸ ὕψος διαφέρει τȣ̃ δοθέντος.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω φέρε ΓΔ βάσις τȣ̃ ΑΒΓΔ (σχ. 37) ὀρθογωνίȣ, καὶ ΓΑ τὸ ὕψος· δεῖ δὴ συςῆσαι ὀρθογώνιον, ἴσον μὲν τῷ ΑΒΓΔ, βάσιν δὲ ἔχον τὴν ΑΙ ἐλάττονα τῆς ΓΔ· εὑρεθήτω ȣ̃ν τετάρτη ἀνάλογος (319) τῶν τριῶν ΗΙ, ΓΔ, ΑΓ ἡ ΖΗ· καὶ δὴ ἐκ τῆς ἀναλογίας ΗΙ : ΓΔ : : ΑΓ : ΖΗ προκύψει ΗΙ × ΖΗ = ΓΔ × ΑΓ. Ο. Ε. Π.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν δ' αἱ εὐθεῖαι ΗΙ, ΓΔ, ΑΓ ἐν ἀριθμοῖς ὦσι δεδομέναι, γενέσθω μέθοδος τῶν τριῶν ΗΙ : ΓΔ : : ΑΓ : χ, καὶ εὑρεθείσης τῆς τȣ̃ χ δυνάμεως, τεθείσθω βάσις μὲν ἡ ΗΙ, ὕψος δὲ ἡ ΗΖ, μῆκος ἔχȣσα τὸ ὑπὸ τȣ̃ εὑρεθέντος ἀριθμȣ̃ ἐκδηλȣ́μενον· τὸ δ' ἐκ τȣ́των συμπληρωθὲν ὀρθογώνιον (242) ἴσον ἔςαι τῷ δοθέντι ὀρθογωνίῳ ΑΒΓΔ.

358. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἵν' ὀρθογώνιον τὸ ΑΒ ΓΔ, ἀμεταποίητον μένον τὴν ἐπιφάνειαν, εἰς ἕτερον μεταβληθῇ, ἔχον τὸ ἐπιταχθὲν ὕψος ΖΗ τȣ̃ ΖΗΙΟ ὀρθογωνίȣ· α. προήχθω τὸ ΓΑ ὕψος, καὶ γενέσθω ΓΧ = ΖΗ· β'. ζητηθήτω εἰς βάσιν τετάρτη ἀνάλογος, τῶν ὑψῶν ΓΧ, ΓΑ, καὶ τῆς ΓΔ βάσεως ἡ Γτ· ἐκ δὲ δὴ τῆς ἀναλογίας ΓΧ : ΓΑ : : ΓΔ : Γτ ἔςαι ΓΧ × Γτ (ἐπιφάνεια τȣ̃ νέȣ ὀρθογωνίȣ) = ΓΑ × ΓΔ (ἐπιφανεία τȣ̃ πρώτȣ ὀρθογωνίȣ).

359. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἵνα δύω ὀρθογώνια ΕΘΖΗ,

ΑΓΒΔ εἰς ἓν μόνον ἀχθῶσιν· ά. τὸ δεύτερον, ἄτρεπτον μένον κατ' ἐπιφάνειαν, τραπήτω εἰς ἕτερον, ἔχον ὕψος τὸ τȣ̃ πρώτȣ· β΄. συνήφθω κατ' εὐθεῖαν τῇ ΘΗ ἡ ΗΙ, ἡ εὑρεθεῖσα, ὡς προδέδεικται, τετάρτη ἀνάλογος τῶν ΖΗ, ΑΓ ὑψῶν καὶ τῆς ΓΔ βάσεως· γ΄. συμπεπληρώσθω τὸ ΗΖΙΟ παραλληλόγραμμον, καὶ ἔσαι ȣ̃τω ΘΕΙΟ = ΘΕΗΖ + ΑΓΒΔ, ὃ καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον.

360. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ταῦτα δὲ νοεῖν χρὴ κἀπὶ τῶν πλαγιογωνίων παραλληλογράμμων, καὶ ἐπὶ παντὸς δὲ τριγώνȣ· ἡ ἄρα, περὶ ἧς εἴρηται, ἀναγωγὴ ἀείποτε ἐκτελεῖσθαι δύναται ζητȣμένης τετάρτης ἀναλόγȣ πρὸς τρεῖς δοθείσας εὐθείας· ὅθεν ἀναγαγεῖν δυνατὸν δύω παραλληλόγραμμα ἐν γένει, ἢ δύω τρίγωνα, εἰς ἓν μόνον ἴσην ἔχον τοῖς δυσὶν ἐπιφάνειαν.

361. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ὁσαδήποτε ἄρα πολύγωνα, ὁμοειδῆ, ἢ ἑτεροειδῆ, κανονικὰ, ἢ ἀκανόνιςα, ἀναχθήσονται εἰς ἓν μόνον τρίγωνον ἴσον κατ' ἐπιφάνειαν τῷ ἀθροίσματι πασῶν τῶν ἐν τοῖς δοθεῖσι πολυγώνοις ἐπιφανειῶν· ἕκαςον γὰρ τῶν πολυγώνων εἰς τρίγωνον ἀνάγεται (294)· ἀνήχθωσαν ȣ̃ν πάντα τὰ δοθέντα πολύγωνα εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα· ἐξέσαι ȣ̃ν ἓν τρίγωνον συςήσασθαι ἴσον ἅπασι τοῖς τριγώνοις, ἅμα ληφθεῖσιν, ȣ̃τω· ά. γενέσθωσαν ἅπαντα τȣ̃ αὐτȣ̃ ὕψȣς, εἴτ' ȣ̃ν ΑΔ (σχ. 80), ἥτις ἐςὶ κάθετος τῇ ἀπεράντῳ ΔΖ· β΄. ἐν ἑκάςῳ τριγώνῳ ζητηθήτω τετάρτη ἀνάλογος πρὸς τὸ πρότερον αὐτȣ̃ ὕψος, τὸ ἤδη ὑποτεθὲν, καὶ τὴν προτέραν βάσιν, ἥτις ἔσαι ἡ βάσις, ἡ τῷ δοθέντι ὕψει ΑΔ προσήκȣσα· τέλος δὲ πᾶσαι αἱ εὑρεθεῖσαι ȣ̃τω βάσεις· ΔΠ, ΠΕ, ΕΖ, κ. τ. λ. συνήφθωσαν ἐπ' εὐθείας τῇ ἀπεράντῳ ΔΖ, καὶ ἤχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΠ, ΑΕ κ. τ. λ. τοιγαρȣ̃ν κατὰ

τὴν δὲ τὴν κατασκευὴν τὸ ὁλικὸν τρίγωνον ΔΑΖ ἴσον ἐςὶ τῷ ἀθροίσματι τῶν τριῶν φέρε πολυγώνων, τῶν εἰς ἀναγωγὴν δοθέντων, ἃ καλέσομεν Α, Β, Γ· ϗ γὰρ ΔΑΠ = Α, ϗ ΠΑΕ = Β, ϗ ΕΑΖ = Γ· πάντα δὲ τὰ τρία ὁμȣ̃ = ΔΑΖ.

362. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Τετράγωνον συςήσασθαι ἴσον παντὶ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, εἴτ' ȣ̃ν παντὶ σχήματι, ὃ μὴ εἴη καμπύλη.

ΛΥΣΙΣ. α΄. Ὑπὲρ τριγώνȣ ζητηθήτω μέση ἀνάλογος (σχ. 73) τȣ̃ ὕψȣς αβ, ϗ τȣ̃ ἡμίσεως τῆς βάσεως βγ (347)· τὸ ȣ̃ν ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἴσον ἔςαι τῷ δοθέντι τριγώνῳ· ἔςι μὲν γὰρ τὸ αβγ τρίγωνον $= \frac{\alpha\delta\beta\gamma}{2}$ (285)· κληθείσης δὲ χ τῆς εὑρεθείσης μέσης ἀνάλογον, ἐκ τῆς ἀναλογίας $\alpha\delta : \chi :: \chi : \frac{\beta\gamma}{2}$, ἔςαι $\chi^2 = \frac{\alpha\delta\beta\gamma}{2}$ (Συμϐ. Λογ. 248).

ϐ΄. Καὶ πολυγώνῳ δὲ παντὶ κανονικῷ τετράγωνον ἴσον συςαθήσεται, εὑρεθείσης μέσης ἀνάλογον τῆς ἡμιπεριμέτρȣ τȣ̃ πολυγώνȣ ϗ τῆς ὀρθίας αὐτȣ̃ ἀκτῖνος, ϗ τετραγώνȣ ἐπ' αὐτῆς ἀναγραφέντος· ἅπαν γὰρ κανονικὸν πολύγωνον ἰσȣ̃σαι τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρȣ ϗ τῆς ὀρθίας ἀκτῖνος (297).

γ΄. Ἐπεὶ δὲ ἅπαν ἀκανόνιςον πολύγωνον εἰς ἴσον τρίγωνον ἀναχθῆναι δύναται (361), γενήσεται τετράγωνον ἴσον παντὶ ἀκανονίςῳ πολυγώνῳ, ἀναγαγȣ̃σι πρῶτον τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνον, ϗ αὐτῷ ἴσον κατασκευάσασι τετράγωνον, καθ' ὃν ἀρτίως δέδεικται τρόπον.

δ΄. Ὁσαδήποτε σχήματα κανονικὰ, ἢ ἀκανόνιςα, εἰς

ἓν μόνον τρίγωνον ἀναχθῆναι ἔχουσι (361)· ἐπεὶ δὲ παντὶ τριγώνῳ ἴσον τετράγωνον συςήσαθαι δυνάμεθα· ἰδὲ δὴ, ὅπως τετράγωνον ἴσον κατασκευάσομεν παντὶ εὐθυγράμμῳ σχήματι, εἴτε κανονικῷ, εἴτε ἀκανονίςῳ. Ο. Ε. Π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου.

363. Τὸ πρόβλημα τοῦ τὸν κύκλον τετραγωνίσαι ἐν τούτῳ κεῖται, κατασκευάσαι ἀμέλει τετράγωνον ἴσον κύκλῳ, οὗ ἡ διάμετρος, ἢ ἡ περιφέρεια, δέδοται· παντὶ δὲ κανονικῷ πολυγώνῳ τετράγωνον ἴσον κατασκευάσαι δυνάμεθα, μέσην ἀνάλογον εὑρίσκοντες τῆς τε ἡμιπεριμέτρου καὶ τῆς ὀρθίας ἀκτῖνος· ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ κύκλος ἐςι κανονικὸν πολύγωνον (31), ἴσον αὐτῷ τετράγωνον συςήσομεν, εὑρόντες μέσην ἀνάλογον τῆς ἡμιπεριμέτρου αὐτοῦ, εἴτ' οὖν τῆς ἡμιπεριφερείας, καὶ τῆς αὐτοῦ ὀρθίας ἀκτῖνος, εἴτ' οὖν τῆς ἡμιδιαμέτρου, καὶ ἐπ' αὐτῆς τῆς μέσης ἀναλόγου τετράγωνον ἀναγράψαντες· εἰ τοίνυν ἐγινώσκετο ὁ κύκλου παντὸς τῆς ἀκτῖνος, καὶ δὴ καὶ τῆς διαμέτρου, πρὸς τὴν περιφέρειαν, ἀληθὴς λόγος, διδομένης τῆς διαμέτρου εὑρίσκετ' ἂν ἡ περιφέρεια, πολλαπλασιαζομένης τῆς διαμέτρου ἐπὶ τόνδε τὸν λόγον· πρὸς οὖν τὴν οὕτως εὑρεθεῖσαν ἂν ἡμιπεριφέρειαν καὶ τὴν ἡμιδιάμετρον μέσην ἀνάλογον εὑρίσκοντες, καὶ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἀναγράφοντες, ἀκριβῶς ἂν ἐθηρώμεθα τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμόν.

Ἀλλὰ γὰρ τίς ἐςιν οὗτος ὁ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος; τουτ' ἔςιν, ὃ πολλοὶ καὶ μεγάλοι Μαθη-

ματικοὶ, πολλὰ μογήσαντες, ἀνήνυτα μέντοι ἐς δεῦρο πεπονηκότες ὤφθησαν, τὸν ἀκριβῆ λόγον μὴ δυνηθέντες διορίσασθαι· ἐντεῦθεν ἄρα κύκλȣ δεδομένȣ, ȣ̃ μόνη ἡ περιφέρεια, ἢ μόνη ἡ διάμετρος, ἔγνωςαι, ȣ̓δέπω εὑρεῖν δυνάμεθα ἀκριβῶς τὴν τȣ́τȣ ἐπιφάνειαν, ἣν ἀτεχνῶς ἔδει ἰσȣ̃σθαι ὀρθογωνίῳ, ȣ̃ βάσις μὲν ἡ ἡμιπεριφέρεια, ὕψος δὲ ἡ ἀκτίς (298)· ἐντεῦθεν ἄρα, μήπω εὑρεθεισῶν τῶν δύω τȣ́των γραμμῶν, τῆς ἡμιπεριφερείας φημὶ ϗ τῆς ἀκτῖνος, ἀμήχανόν ἐςι πρὸς αὐτὰς μέσην εὑρεῖν ἀνάλογον, ἀφ' ἧς τὸ τετράγωνον ἰσῷτ' ἂν ἀκριβῶς τῷ κύκλῳ.

Τȣτὶ ἄρα νοητέον, ὅταν τὸ πρόβλημα τὸ περὶ τȣ̃ τετραγωνισμȣ̃ τȣ̃ κύκλȣ μηδέπω ἐπιλελύσθαι λέγηται, ἢ ὡς ὁ τȣ̃ κύκλȣ τετραγωνισμὸς μηδέπω εὕρηται.

Δυνάμεθα μέντοι τῷ τῆς διαμέτρȣ πρὸς τὴν περιφέρειαν ἀληθεῖ προσπελάσαι λόγῳ, εἴτε μηχανικῶς, εἴτε γεωμετρικῶς· κἀκείνως μέν,

364. τεθείσθω εὐθεῖα φυσικὴ ἐκ νήματος δυνατȣ̃ ἡ AB (σχ. 89), ἐν ἐπιπέδῳ ὁμαλωτάτῳ, κύκλος δὲ ὁ BKΔ, ἐξ ὀρειχάλκȣ, ἢ ἑτέρας ὕλης, κατεσκευασμένος, ἐχέτω τὸ ἑαυτȣ̃ ἐπίπεδον κάθετον τῷ, ἐφ' ȣ̃ ἡ AB, ἐπιπέδῳ, καὶ σημειωθήτω τὸ B ἐπὶ τȣ̃ κύκλȣ σημεῖον, ϗ ἄλλο σημεῖον B ἐπὶ τῆς εὐθείας BA, ϗ τιθέσθω τὸ τȣ̃ κύκλȣ B ἐπὶ τὸ τῆς εὐθείας B, ϗ ἐκκυλισθήτω ὁ κύκλος ἐπὶ τῆς BA εὐθείας· ϗ δὴ πάντα μὲν τὰ τῆς περιφερείας σημεῖα ἐγχρίψȣσιν ἄλλο μετ' ἄλλο πᾶσι τῆς σημείοις τῆς εὐθείας BA, τὸ δὲ K κέντρον, καταγράψαν τὴν εὐθείαν Kδ, ςήσεται κατὰ τὸ δ· τὸ δὲ B σημεῖον τȣ̃ κύκλȣ, ἀφ' ȣ̃ ἐκκυλίεσθαι ἤρξατο συμπεσεῖται τῷ τῆς AB εὐθείας σημείῳ β· σαφὲς ȣ̃ν ὡς ἡ Bβ εὐθεῖα ἴση ἔςαι ἀκριβῶς τῇ ὅλῃ περιφερείᾳ τȣ̃ κύκλȣ· τοιγαρȣ̃ν τῷ διαβήτῃ λαμβανομένης τῆς BK ἀκτῖ-

νος, ἢ μεταφερομένης ἐπὶ τῆς Ββ εὐθείας, εὑρεθήσεται Ββ = 6ΒΚ, ἢ 3 Βτ σὺν τῷ καταλοίπῳ βΟ, ὃ παραβαλλόμενον πρὸς τὴν ΒΚτ διάμετρον, εὑρεθήσεται ἔλαττον μὲν ἢ ὀκτημόριον, μεῖζον δὲ ἢ ἑπτημόριον αὐτῆς, σχεδὸν μέντοι ἑπτημόριον.

365. Μηχανικῶς ἄρα εὕρηται ὁ τῆς διαμέτρȣ πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος κείμενος μεταξὺ τῶν δύω τȣ́των ὁρίων $3+\frac{1}{8}$ ἢ $3+\frac{1}{7}$· εὑρίσκομεν ἀλλ' ȣ̃ν ὅτι $3+\frac{1}{7}$, καίτοι μεῖζον τȣ̃ ἀληθȣ̃ς, ἐγγίζει μέντοι μᾶλλον τῷ ἀληθεῖ λόγῳ ἢ $3+\frac{1}{8}$, τȣ̃ διαπτώματος ἀλογȣμένȣ ὡς πάνυ μικρȣ̃· ἐὰν ȣ̃ν κληθῇ, 1 μὲν ἡ διάμετρος, ἡ δὲ περιφέρεια $3+\frac{1}{7}$, ὁ λόγος ἐκείνης πρὸς ταύτην ἔσαι ὡς 7 πρὸς 22· ἔσι γὰρ $1 : 3\frac{1}{7} :: 7 : 22$ (Συμ. Λογ. 240)· ἄρα ἐν διαπτώματι μικρȣ̃ δεῖν ἀνεπαισθήτῳ ὁ τῆς διαμέτρȣ πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος κατὰ τὴν ἡμετέραν μηχανικὴν πρᾶξιν ἔσιν 7 : 22.

366. Ἁψώμεθα δὲ ἤδη τȣ̃ τρόπȣ, καθ' ὃν Μαθηματικῶν παῖδες γεωμετρικῶς προσεγγίζȣσι τῷδε τῷ λόγῳ.

Δέδεικται ἤδη (255) ὡς ἡ κυκλικὴ περιφέρεια μείζων ἐσὶ τȣ̃ τριπλȣ̃ τῆς διαμέτρȣ.

Ἐπινοήσωμεν ȣ̃ν νῦν τὴν ΘΔ πλευρὰν (σχ. 90) τȣ̃ κανονικȣ̃ ἑξαγώνȣ δίχα τετμημένην ὑπὸ τῆς ΖΓ ἀκτῖνος, ἢ ἐπεζευγμένην δωδεκαγώνȣ πλευρὰν τὴν ΓΔ· εὑρεθήσεται ȣ̃ν ἡ τῆς πλευρᾶς τῆσδε δύναμις ȣ̃τως.

Ὑποτεθείσθω ἡ ΖΓ ἀκτὶς = 10000000· ἔσι δὲ ἐν τῷ ΖΘο ὀρθογωνίῳ $ΘΖ^2 = Ζο^2 + Θο^2$, ἐκȣ̃ν $Ζο^2 = ΘΖ^2 - Θο^2$· ἀλλὰ ΘΖ = ΖΓ = 10000000, ἄρα Θο = 5000000 (251)· ἀλλὰ $ΘΖ^2 = 100000000000000$, ἢ $Θο^2 = 25000000000000$, ἄρα $Ζο^2 = 100000000000000 - 25000000000000 = 75000000000000$·

ὀκȣ̃ν $\text{Ζο} = \sqrt{75000000000000} = 8664254$· ἀλλὰ $\text{Γο} = \text{ΖΓ} - \text{Ζο}$· ἄρα $\text{Γο} = 10000000 - 8660254 = 1339746$.

Τριγώνȣ ȣ̃ν ὀρθογωνίȣ τȣ̃ οΔΓ γνωςαί εἰσι δύω τῶν πλευρῶν, εἴτ' ȣ̃ν $\text{οΓ} = 1339746$, καὶ $\text{Δο} = \text{Θο} = 5000000$· ἐπεὶ δὲ $\text{ΓΔ}^2 = \text{οΓ}^2 + \text{οΔ}^2$, ἄρα $\text{ΓΔ} = \sqrt{\overline{1339746}^2 + \overline{5000000}^2}$, ἡ ζητȣμένη τȣ̃ δωδεκαγώνȣ πλευρὰ, ἣν ὁ δηλῶν ἀριθμὸς κεκλήσθω π· ὀκȣ̃ν 12π ἐμφαίνει ὅλην τὴν τȣ̃ δωδεκαγώνȣ περίμετρον· καὶ ἐπεὶ ὑποτέθειται ἡ διάμετρος $= 20000000$· ὁ τῆς τȣ̃ δωδεκαγώνȣ περιμέτρȣ πρὸς τὴν διάμετρον τȣ̃ περιγεγραμμένȣ κύκλȣ λόγος ἐςὶ $\frac{12\pi}{20000000}$· ἤχθω δὲ ἀκτὶς ἄλλη κάθετος τῇ ΓΔ πλευρᾷ. τριγώνȣ ȣ̃ν ὀρθογωνίȣ τȣ̃ ΓχΖ εἰσὶ δύω γνωςαὶ πλευραὶ, εἴτ' ȣ̃ν ἡ ἀκτὶς $\text{ΓΖ} = 10000000$, καὶ ἡ $\text{Γ}\chi = \frac{\pi}{2}$· ἐπεὶ δὲ $\text{Ζ}\chi^2 = \text{ΖΓ}^2 - \text{Γ}\chi^2$, ἄρα ἡ τρίτη ζητȣμένη πλευρὰ $\text{Ζ}\chi$ ἔςαι $= \sqrt{\overline{10000000}^2 - \overline{\frac{\pi}{2}}^2}$, αὕτη δὲ ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος, εἴτ' ȣ̃ν 10000000, κατάλοιπον ἔςαι ἡ τῆς ηχ δύναμις· ἐπινοήσωμεν ἔτι χορδὴν ὑποτείνȣσαν τὸ μικρὸν τόξον Γη· α'. ȣ̃ν αὕτη ἔςαι πλευρὰ πολυγώνȣ ἐκ 24 πλευρῶν συνιςαμένȣ· β'. συςαθήσεται τρίγωνον κατὰ τὸ χ ὀρθογώνιον τὸ Γηχ, ἐν ᾧ γινώσκεται ἥτε $\text{Γ}\chi = \frac{\pi}{2}$, καὶ ἡ ἀρτίως εὑρεθεῖσα χη· τοιγαρȣ̃ν ἐπεὶ $\text{Γ}\eta^2 = \text{Γ}\chi^2 + \eta\chi^2$, ἔςαι $\text{Γ}\eta = \sqrt{\text{Γ}\chi^2 + \eta\chi^2}$, πλευρὰ τȣ̃ ἐκ 24 πλευρῶν συγκροτȣμένȣ πολυγώνȣ, ἧς τινος κληθείσης κ, 24κ σημαίνει

τὴν ὅλην περίμετρον τȣ̃ εἰρημένȣ πολυγώνȣ, ϗ $\frac{24\varkappa}{20000000}$. δηλώσει τὸν τῆς τȣ́τȣ περιμέτρȣ πρὸς τὴν τȣ̃ κύκλȣ, ᾧ ἐγγέγραπται, διάμετρον λόγον.

Ἀεὶ ἄρα διὰ καθέτων διχοτομȣμένης τῆς πρὸ τȣ̃ εὑρημένης ἐν ἀριθμοῖς πλευρᾶς, πάντα λόγον περιμέτρȣ παντὸς πολυγώνȣ ἀρτιοπλεύρȣ πρὸς τὴν τȣ̃ κύκλȣ, ᾧ ἐγέγραπται, διάμετρον γνωσόμεθα.

367. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐπεὶ δὲ ὅσῳ πολυγωνότερον τὸ κανονικὸν σχῆμα, τοσȣ́τῳ μᾶλλον ἐγγίζει τȣ̃ συγκεχύσθαι τῇ περιφερείᾳ τȣ̃ κύκλȣ, ᾧ ἐγγέγραπται, ἀφικέσθαι δυνάμεθα ἐπὶ πολύγωνον ȣ̃ ἡ περίμετρος σχεδόν ἐστιν ἴση τῇ κυκλικῇ περιφερείᾳ, ϗ ἀντικαταστάσης τῆς περιφερείας ἀντὶ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ τȣ̃ τὴν περίμετρον ἐκδηλȣ̃ντος, ϗ διαιρεθείσης διὰ 2000000, τὸ πηλίκον ἐκληφθήσεται ἴσα ϗ λόγος, ὃν ἡ διάμετρος ἔχει πρὸς τὴν περιφέρειαν.

368. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐπειδὴ πᾶν πολύγωνον (σχ. 61) κύκλῳ, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ Κο, περιγεγραμμένον δύναται ἐκληφθῆναι ὡς ἐγγεγραμμένον κύκλῳ, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ ΠΚ, ἔξεστιν ἐκ τȣ́τȣ διὰ τῆς προτεθείσης μεθόδȣ γνῶναι τὸν τῆς διαμέτρȣ πρὸς τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον λόγον· ϗ ἐπεὶ ἡ περιφέρεια μείζων μέν ἐστι τῆς τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ, ἐλάττων δὲ τῆς τȣ̃ περιγεγραμμένȣ σχήματος περιμέτρȣ (256), ὁ τῆς διαμέτρȣ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον λόγος, ϗ τῆς αὐτῆς πρὸς τὸ περιγεγραμμένον, ἔσονται δύω ὅρια, ἐν οἷς ἐστιν ὁ τῆς διαμέτρȣ πρὸς τὴν περιφέρειαν ἀληθὴς λόγος.

369. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ὥσπερ δὲ ῥίζαν ἐξάγοντες ἀτελȣ̃ς τετραγώνȣ ἀριθμȣ̃, τὴν μὲν ἀληθῆ εὑρεῖν ȣ̓ δυνάμεθα, ἀεὶ μέντοι μᾶλλον ϗ μᾶλλον ἐγγὺς χωρȣ̃μεν τῆς ἀ-

ληθῆς ἐπαναλήψει τῶν πράξεων· ὅτω ᾗ τὸν λόγον τῆς διαμέτρȣ πρὸς τὴν περιφέρειαν, κἂν τὸν ὄντα εὑρεῖν μὴ ἔχωμεν, ἐπαναλήψει μέντοι τῆς ἐν τῇ προαποδοθείσῃ μεθόδῳ πράξεως, τὸν ὡς ἐγγυτάτω τȣ̃ ἀληθȣ̃ς θηρώμεθα, ᾗ δὴ διὰ προσεγγίσεως ᾗ τὸν τετραγωνισμὸν τȣ̃ κύκλȣ ἐπιτηδεύομεν· ὥσπερ δὲ τὴν ἀληθῆ ῥίζαν εὑρεῖν ἐκ τετραγώνȣ ἀτελȣ̃ς ἀμήχανον δέδεικται, ὅτω ᾗ τὸν ἀληθῆ λόγον ἐνταῦθα ᾗ τὸν τετραγωνισμὸν εἶτα τὸν τȣ̃ κύκλȣ διὰ τῆς μεθόδȣ τῶν περιγεγραμμένων ᾗ ἐγγεγραμμένων πολυγώνων τῶν ἀδυνάτων ἐςὶν εὑρεῖν.

370. Ἴδȣ δὴ, ὅπȣ ἀφίκοντο, ὡς τὰ πολλὰ, δἰ ἧς προεξεθέμεθα μεθόδȣ, ἐν τῷ τȣ̃ κύκλȣ τετραγωνισμῷ.

Ἀρχιμήδης μὲν κύκλῳ περιγράψας κανονικὸν πολύγωνον ἐξ 96 πλευρῶν, εὕρατο τὴν περίμετρον αὐτȣ̃ λόγον ἔχȣσαν πρὸς τὴν κύκλȣ διάμετρον ὃν 22 : 7· ὅθεν συνήγαγεν, ὡς ἡ κυκλικὴ περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον ἔλαττονα μὲν λόγον ἔχει ἢ 22 : 7· μείζονα δὲ ἢ 21 $\frac{70}{71}$: 7.

371. Ἀδριανὸς δὲ Μέτιος μετὰ ταῦτα ἀπέδειξεν, ὡς ἔςιν ὁ λόγος ὅτος μικρῷ ἐλάσσων ἢ 21 $\frac{112}{113}$: 7, μείζων δὲ 21 $\frac{111}{112}$: 7, πρὸς δ' ἀποφυγὴν τῶν κλασμάτων ἀντεισήγαγεν ὁ αὐτὸς 355 : 113· ἔςι γὰρ ὡς ἀληθῶς 355 : 113 : : 21 $\frac{112}{113}$: 7 (Συμ. Λογ. 236).

Οἱ τοίνυν λόγοι 7 : 22 ᾗ 113 : 355 ἀμφότεροι μὲν μείζȣς εἰσὶ τȣ̃ ἀληθȣ̃ς· ὁ μέντοι 113 : 355 τῷ ἀληθεῖ προσεχέςερος ἢ ὁ 7 : 22, ἔςι τε ἀκριβέςερος ἁπάντων τῶν εἰς χρῆσιν παραλαμβανομένων, ὧν ὅ,τε ἡγȣ́μενος καὶ ἑπόμενος πλείȣς τριῶν χαρακτῆρας ȣ̓ περιέχȣσι (Συμ. Λογ. 184).

372. Δέδεικται δὲ, ὡς χρησαμένοις τῷ ἀρχιμηδείῳ λόγῳ 7 : 22, προκύπτει κυκλικὴ περιφέρεια τῆς

ἀληθοῦς ὑπερτέρα μέρει, μείζονι μὲν ἢ 2486ῳ τῆς περιφερείας, ἐλάττονι δὲ ἢ 2485ῳ.

373. Δυνάμεθα ἄρα ἐν τοῖς μικροῖς κύκλοις πάνυ ἀδεῶς χρῆσθαι τῷ ἀρχιμηδείῳ λόγῳ 7 : 22.

374. Ἀλλὰ προκριτέος ἀναμφηρήσως ὁ 113 : 355 ἐπὶ τῶν μεγάλων κύκλων, ὡς ἐν τῷ τῆς ἀστρονομίας λογισμῷ.

Χρῶνται δὲ ὡσαύτως καὶ τῷ λόγῳ 106 : 333· ἡ δὲ ὑπεροχὴ τῆς ἐκ τούτου ἀνακυπτούσης περιφερείας ὑπὲρ τὴν ἀληθῆ, μείζων μέν ἐστιν ἢ 37750ῳ, ἐλάττων δὲ ἢ 37749ῳ τῆς εὑρεθείσης περιφερείας.

375. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Διαμέτρου δοθείσης, εὑρεῖν διὰ προσεγγίσεως τὴν αὐτῆς περιφέρειαν, ἢ περιφερείας δοθείσης, εὑρεῖν διὰ προσεγγίσεως τὴν διάμετρον.

ΛΥΣΙΣ. Γενέσθω μέθοδος τῶν τριῶν, ἐν ᾗ δύο μὲν πρότεροι ὅροι ἔστωσαν ὁ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος, ᾧ ἂν δόξῃ χρήσασθαι· τρίτος δὲ, ὁ τὴν διάμετρον ἢ τὴν περιφέρειαν ἐκδηλῶν ἀριθμός· καὶ πρῶτος μὲν τιθέσθω ἡ διάμετρος, ἐὰν περιφέρεια ζητῆται· ἡ περιφέρεια δὲ, ἐὰν διάμετρος.

Ἔστω οὖν ἡ διάμετρος ποδῶν 100· καὶ εἰλήφθω εἰς χρῆσιν ὁ 7 : 22 λόγος· οὐκοῦν ἔσται 7 : 22 : : 100 : $x =$ 314 $\frac{2}{7}$ ποσί.

376. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Τῆς γῆς ἐχούσης περίμετρον λευγῶν 9000, πόση ἔσται ἡ κατ' αὐτὴν διάμετρος;

ΛΥΣΙΣ. Εἰλήφθω εἰς χρῆσιν ὁ λόγος ὁ κατὰ Μέτιον· καὶ δὴ ἔσται 355 : 113 : : 9000 : $x =$ 2864 $+ \frac{56}{71}$ λεύγαις.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἰσὶν οἳ τῶν Μαθηματικῶν τὸν τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγον ἐκτιθέασι διὰ τῶν ἀ-

ρων 1 : 3,141592, κτλ.· ὅπερ ἥκιςα ξένον· ϰ̀ γὰρ τιθεμένης τῆς διαμέτρȣ = 1, ὅσοις δήποτε βȣλόμεθα χρῆσθαι ἔξεςι μηδενικοῖς, μᾶλλον ϰ̀ μᾶλλον προσπελάζοντας τῷ ἀληθεῖ λόγῳ ἐν ἀριθμοῖς δεκαδικοῖς ἐπ᾽ ἄπειρον· ἀλλὰ γὰρ ὁμολογητέον, ὡς ὁ ἔτως ἐκτεθειμένος λόγος, ἡ δὺς μὲν ἔςιν ἐν τῇ θεωρίᾳ, δυσχερέςατος δὲ τῇ χρήσει· ϰ̀ ἐδείς ἐςιν, ὃς αὐτῷ πράττων νυνὶ κέχρηται.

377. Τὸν τῆς διαμέτρȣ πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγον ϰ̀ διὰ τȣ̃ λογισμȣ̃ τῶν ὁλοκλήρων θηρῶνται Γεωμετρῶν παῖδες, καθὰ ϰ̀ ἡμῖν ἐκεῖσε γενομένοις τῆς πράξεως ἀπόπειρα ληφθήσεται. Ἰςέον μέντοι ὡς οἱ νεώτεροι Μαθηματικοὶ τὸν ἀπόλυτον τετραγωνισμὸν τȣ̃ κύκλȣ ἡγȣ́μενοι ἁπλῆς περιεργείας ζήτημα, ϰ̀ δαπανᾷν ἐθέλοντες τὸν πολύτιμον χρόνον ἐπὶ τὰ ξυμφορώτερα, ἐπαύσαντο διακενῆς ζητȣ̃ντες τὴν τȣ́τȣ λύσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ γεωμετρικῆς κλίμακος, καὶ ἀναλογικȣ̃ διαβήτȣ.

378. Γεωμετρικὴ κλίμαξ ἔςιν εὐθεῖα ἡ ΑΤ (σχ. 91) διῃρημένη εἰς ὁσαδήποτε ἰσάλληλα τμήματα, εἴτ᾽ ȣ̃ν ΑΖ = ΖΤ = ΤΣ· ὑποθῶμεθα νῦν ἓν τῶν αὐτῆς τμημάτων τὸ ΑΖ διῃρημένον εἰς δέκα ἰσάλληλα μέρη, ϰ̀ Α1 = 12, = 23, 34, κτλ. ἐξέςαι ȣ̃ν δι᾽ ἑκάςȣ τῶνδε τῶν μερῶν, ὃ ἂν βȣλώμεθα, ἐκδηλώσασθαι μέτρον· ἔςω γὰρ ΑΖ = 10 ὀργυιαῖς, ȣ̓κȣ̃ν ΑΤ ἔςαι = 30 ὀργυιαῖς· κείσθω ἔτι ΑΓ = 6Α, εἴτ᾽ ȣ̃ν 6 ὀργυιαῖς· ἐὰν ȣ̃ν ἀχθῇ ἡ Γ1 εὐ-

θεῖα ἅπαντα τὰ τρίγωνα 110, 12κ, 13χ, 14η, κτλ. ὅμοια ἔσονται τῷ τε 1ΓΜ ϗ ἀλλήλοις (318)· ἐντεῦθεν ἄρα παντοῖαι προκύψουσιν ἀναλογίαι, ὡς 4η : ΓΜ : : 1η : 1Μ· ἀλλὰ 1η = $\frac{2}{3}$ 1Μ, ἄρα ϗ 4η = $\frac{2}{3}$ ΓΜ, εἴτ' οὖν $\frac{2}{3}$ ὀργυιᾶς, ἐπεὶ ΓΜ = Α1, ϗ δὴ 4η = 4 ποσί.

Ὁμοίῳ συλλογισμῷ δῆλον ἔσαι ὡς 10 = 1 ποδὶ, ϗ 2κ = 2 ποσὶ, ϗ οὕτως ἑξῆς.

379. Ἐὰν οὖν ἐκδηλῶσαι βουλώμεθα ὀκτωκαίδεκα ὀργυιὰς ϗ τρεῖς πόδας, ληψόμεθα τὴν ΖΥ εὐθεῖαν, εἴτ' οὖν ὀργυιὰς 10 σὺν Ζ2 εἴτ' οὖν ὀργυιαῖς 8· τέλος δὲ διὰ τοῦ διαβήτου μετάξομεν τὴν μικρὰν εὐθεῖαν 3χ πρὸς ἀρισερὰν τῆς Ζ2.

Μεγίσην χρῆσιν παρέχεται ἡ γεωμετρικὴ κλίμαξ· α΄. ὅταν ζητῆται ἐπὶ χάρτου κατασκευάσαι τρίγωνον ὅμοιον μεγάλῳ τριγώνῳ κατὰ γῆς γεγραμμένῳ, ὡς ὀψόμεθα ὕσερον. β΄. ἐπὶ τῇ τῶν γεωγραφικῶν πινάκων σχεδιάσει· αὕτη γὰρ ἡ κλίμαξ, ἧς τὰ ἰσάλληλα μέρη μᾶλλον, ἢ ἧττον, μεγάλα, ὡς ἂν ὁ Γεωγράφος παρασῆσαι ταῦτα ἐκτάσεως ἔχοντα βούλοιτο, παρέχεται αὐτῷ τὸν κανόνα, ἢ τὸν ὅρον τῆς παραθέσεως· γ΄. ἐν γένει ἡνίκα ἐπὶ χάρτου ἐκδηλῶσαι βουλόμεθα πρᾶγμα, οὗ ἂν εἴησαν τὰ μέρη ἑτέρῳ ἀνάλογα.

Ῥᾷσα δὲ κατανοεῖται, ὡς τῆς κλίμακος ἕκασον μέρος ἐκδηλοῦν δύναται, ὃ ἂν βουλώμεθα συνεχὲς ποσόν· ἕκασον γὰρ τῶν ἰσαλλήλων μερῶν ἐκδηλῶσαι δύναται, ἤτοι ὀργυιὰν, ἢ λεύγην, ἢ δέκα ὀργυιὰς, ἢ τοσαύτας λεύγας κτλ., τηρουμένης ἀεὶ τῆς ἀναλογίας μεταξὺ τῶνδε τῶν μερῶν· ἔσω γὰρ ἐκδηλῶσαι 250 ὀργυιάς· ὑποθετέον οὖν ΤΥ = 100, ϗ ΥΖ = 100, εἰς δέγε δήλωσιν τῶν 50 ὀργυιῶν ληπτέον τὴν Ζ5 = $\frac{1}{2}$ ΑΖ.

380. Ο δὲ ἀναλογικὸς διαβήτης σύγκειται ἐκ δυοῖν βραχιόνων τῶν ΑΒ, ΑΓ, ὡρισμένοντι μῆκος ἐχόντων, ϗ κινȣμένων περὶ τὸ σημεῖον Α (σχ. 92)· πλὴν δὲ τȣ̃ μήκȣς τȣ̃ τῶν βραχιόνων, ἵνα γράφειν ἔχωμεν παντοίας εὐθείας, περὶ ὧν ἡμεῖς ἐνταῦθα βραχέα ἐρȣ̃μεν, ὁ ἀναλογικὸς διαβήτης ȣ̓δὲν ἄλλο ἐςὶν, εἰ μὴ αἱ κατὰ τὸ Α ἀλλήλας τέμνȣσαι εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, καὶ κατὰ τὴν τȣ̃ διαβήτȣ ἄνοιγὴν ποιȣ̃σαι ἁπάσας τὰς δυνατὰς γωνίας· ἐὰν ȣ̃ν ὑποτεθῇ τὸ διάςημα, ἢ τὸ ἄνοιγμα ΒΑΓ, κεκλεισμένον ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν ἀνὰ δύω ἀγομένων, ἄπειρα ὅμοια τρίγωνα συςαθήσονται τὰ Α66, Α55, κτ. ὧν ἑπομένως αἱ ἀντίςοιχοι πλευραὶ ἀνάλογον ἔχȣσι· δυνατὸν ἄρα διὰ τȣ̃ ἀναλογικȣ̃ διαβήτȣ εὑρεῖν εὐθείας ἀνάλογον ἐχȣ́σας πρὸς ἄλλας.

Υ῾πάρχȣσι δὲ ἐν τῷδε τῷ διαβήτῃ, ά. αἱ εὐθεῖαι, ἃς μέρη ἰσάλληλα καλȣ̃σι, ϗ αἷς ἀντὶ τῆς γεωμετρικῆς κλίμακος κέχρηνται, ἐξευμαρίζοντες τὴν σύςασιν διαφόρων ὁμοίων τριγώνων, ϗ διαφόρων ἀναλογιῶν· β΄. αἱ τῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων εὐθεῖαι, δι᾽ ὧν κύκλῳ, ȣ̃ ἡ διάμετρος δέδοται, ἐγγράψαι δυνάμεθα παντοῖα εἴδη πολυγώνων κ. τ. λ.

381. Ε᾽πεὶ δὲ ἐν τοῖς φθάσασι τὰ περὶ τῆς γεωμετρικῆς λύσεως τῶνδε τῶν προβλημάτων ἀπεδώκαμεν, ἥκιςα δεῖν ἡγȣ́μεθα ἐκπονεῖν παριςῶντας, ϗ ὅπως μηχανικῶς διὰ τȣ̃ ἀναλογικȣ̃ διαβήτȣ ἐπιλύεσθαι δύνανται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ ὁμοίων σχημάτων.

382. Σχήματα ὅμοια λέγονται τὰ τὰς ἀντιστοίχους γωνίας ἴσας ἔχοντα, καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς, εἴτ' οὖν τὰς, αἳ ὑποτείνουσι γωνίας ἴσας, ἀνάλογον.

383. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Πάντες οἱ κύκλοι ἀναγκαίως εἰσὶν ὅμοια σχήματα· ἐπειδὴ ά. πᾶσαι αἱ γωνίαι, ἃς περιέχουσι δύω προσεχῆ στοιχεῖα περιφερείας κύκλου, εἰσὶν ἴσαι ταῖς περιεχομέναις ὑπὸ δύω προσεχῶν στοιχείων περιφερείας παντὸς ἄλλου κύκλου· ἑκάστη γὰρ τούτων ἐπὶ παντὸς κύκλου ἐστὶν $= 180^\circ - \frac{180^\circ}{\infty}$· β΄. αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ, εἴτ' οὖν τὰ στοιχεῖα πάντων τῶν κύκλων εἰσὶν ἀνάλογα (32).

384. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἵνα δύω σχήματα ὦσιν ὅμοια, δεῖ ἔχειν ἑκάτερον πλευρὰς ἰσαρίθμους ταῖς θατέρου· ἐπεὶ γὰρ τῶν ἐντὸς τῆς περιμέτρου γωνιῶν τὸ ἄθροισμα ἀεὶ αὔξεται δυσὶν ὀρθαῖς (266) τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν μονάδι αὐξομένου, ἑκάστη ἄρα γωνία μείζων ἐστὶν ἐν πολυγώνῳ πλείους ἔχοντι πλευρὰς, ἢ ἐν τῷ ἐλλάττους· ἄρα δύω πολύγωνα οὐ δύνανται ἔχειν ἴσας τὰς ἀντιστοίχους γωνίας, καὶ ἑπομένως ὑπάρχειν ὅμοια, ἐὰν μὴ ἔχωσιν ἰσαρίθμους πλευράς.

385. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Οὐκοῦν ἵνα δύω σχήματα ὦσιν ὅμοια, τριῶν τουτωνὶ ἐξ ἀνάγκης δεῖ, ά. ἰσαρίθμους ἔχειν πλευράς· β΄. τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς ἀνάλογον εἶναι· γ΄. τὰς ἀντιστοίχους γωνίας ἴσας εἶναι.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸ πρῶτον τούτων τοῦ τρίτου ἐξέχεται

ὡς ἤδη εἴδομεν (384)· ὀυκέτι μέντοι καὶ τῦ πρώτυ τὸ τρίτον· ϗ γὰρ, καίτοι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικὼν γωνιῶν δύω ἐξ ἰσαρίθμων πλευρῶν συνισαμένων πολυγώνων τὸ αὐτὸ ὑπάρχει· ἑκάςη μέντοι γωνία τῦ ἑτέρυ δύναται εἶναι ἑκάςης θατέρυ ἀπείρως μείζων, ἢ ἀπείρως ἐλάττων (245)· ὐδὲ τὸ δεύτερον δὲ τῦ πρώτυ ἐξήρτηται· εἰσὶ γὰρ ἀριθμὸν ὑπερβαίνοντα σχήματα ἐξ ἰσαρίθμων μὲν πλευρῶν, ὐ μὴν ἀναλόγων συνισάμενα· ὡσαύτως ἡ τῶν πλευρῶν ἀναλογία ὐχ᾿ ἕπεται ἐκ τῆς τῶν ἀντισοίχων γωνιῶν ἰσόσητος, πλὴν τῦ τριγώνυ, (245), ὐδὲ τ᾿ ἀνάπαλιν. Τετραγώνυ μὲν γὰρ ϗ ὀρθογωνίυ ἐπιμήκυς (Σχ. 54, 55), ἴσαι μὲν αἱ ἀντίσοιχοι γωνίαι, ἥκισα μέντοι ἀνάλογον ἔχυσιν αἱ πλευραὶ, ὡς παντὶ δῆλον· τετραγώνυ δὲ ϗ ῥόμβυ ἀνάλογον μέν εἰσιν αἱ πλευραί· ϗ γὰρ ἐκείνυτε ϗ τύτυ ἰσάλληλοι ὑπάρχυσι· αἱ μέντοι γωνίαι ἐκείνυ ἥκισα ταῖς τύτυ ἰσῦνται.

386. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐςὶ τῶν κατ᾿ αὐτὰ βάσεων καὶ ὑψῶν.

ΔΕΙΞΙΣ. Αἱ γὰρ ἐπιφάνειαι αὐτῶν εἰσὶ τὰ ἡμιπαραγόμενα ὑπὸ τῶν βάσεων, ϗ τῶν ὑψῶν (285)· ταῦτα δὲ πρὸς ἄλληλα ἐν λόγῳ εἰσὶ συνθέτῳ τῷ ἐκ τῶν βάσεων ϗ τῶν ὑψῶν (Σύμβολ. Λογ. 291)· ἄρα τὰ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὑπάρχει· ἀλλὰ τῶν ὁμοίων τριγώνων αἱ βάσεις ἀνάλογόν εἰσι τοῖς ὕψεσι (326)· τῦ λόγυ ἄρα τῶν βάσεων ἴσυ ὄντος τῷ τῶν ὑψῶν, ὁ ἐκ τῶν βάσεων ϗ τῶν ὑψῶν σύνθετος λόγος τὸ γινόμενον ἔςαι ὑπὸ δύω ἴσων λόγων, εἴτ᾿ ὖν λόγος ἑνὸς τύτων διπλασίων (Συμβ. Λογ. 290)· τὰ ἄρα ὅμοια

τρίγωνα ἐν λόγῳ εἰσὶ διπλασίονι τῶν τε βάσεων ϗ τῶν ὑψῶν. Ο. Ε. Δ.

387. Ἔςωσαν ἐν ὑποδείγματι (χ. 71) ΑΖ, ατ ὕψη τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΖΤ, ατν, ϗ ΖΤ, τν βάσεις· ἐὰν ἂν ᾖ ΑΖ = 2ατ, ἔςαι ϗ ΖΤ = 2τν· ἔςω ἂν ΑΖ = 10· ἐκἂν ἔςαι ατ = 5· ἔςω δὲ ϗ ΖΤ = 6· τοιγαρἂν ἔςαι τν = 3· ὁ μὲν ἂν τῶν ὑψῶν λόγος ἔςαι $\frac{10}{5}$, ὁ δὲ τῶν βάσεων $\frac{6}{3}$· πρόδηλον δὲ ὅτι $\frac{10}{5} = \frac{6}{3} = 2$· τὸ ἂν ὑπὸ τέτων τῶν λόγων γινόμενον $\frac{10}{5} \times \frac{6}{3} = \frac{60}{15}$ ἔςαι λόγος ἑκατέρε τέτων διπλασίων· τὰ τοίνυν ὅμοια τρίγωνα ΑΖΤ, ατν, ἴσα ὄντα τοῖς ἡμιγινομένοις 10×6, ϗ 5×3 ὑπὸ τῶν ὑψῶν ϗ τῶν βάσεων, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἔσονται τῶν τε βάσεων ϗ τῶν ὑψῶν.

388. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐπεὶ δὲ δύω τετράγωνα διπλασίονα λόγον ἔχεσι τῶν ῥιζῶν, ἤ, ὃ ταὐτὸν, ὁ διπλασίων λόγος τῶν ῥιζῶν ἐςὶν ὁ αὐτὸς τῷ τῶν τετραγώνων λόγῳ (Συμϐ. Λογ. 308), δύω ἄρα ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλά εἰσιν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν βάσεων τετράγωνα, ἢ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ὑψῶν.

Ἐπὶ γὰρ τᾶ προτεθέντος ὑποδείγματος ἡ τᾶ ΑΖΤ ἐπιφάνεια ἐςὶ $\frac{ΑΖ \times ΖΤ}{2}$, ἢ $\frac{10 \times 6}{2} = 30$ (285) ἡ δὲ τᾶ ατν ἐςὶν $= \frac{ατ \times τν}{2}$, ἢ $\frac{5 \times 3}{2} = 7\frac{1}{2}$· ἀλλὰ $30 : 7\frac{1}{2}$ ὡς τὸ ἀπὸ 10 τετράγωνον 100 πρὸς τὸ ἀπὸ 5 τετράγωνον 25, ὡς δῆλον, ϗ γὰρ $30 : 7\frac{1}{2} :: 100 : 25$ (Συμβ. Λογ. 240)· ἄρα κ.τ.λ.

Ἐπὶ τᾶ αὐτᾶ δὲ ὑποδείγματος ἐςὶ $30 : 7\frac{1}{2}$ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν βάσεων 6, 3 τετράγωνα 36, 9· ϗ γὰρ $30 : 7\frac{1}{2} :: 36 : 9$.

389. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Δύω ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλά εἰσι ϗ ὡς τὰ ἀφ᾽ ὡντινωνȣ̃ν ὁμολόγων πλευρῶν τετράγωνα· αἱ μὲν γὰρ βάσεις ἀνάλογοί εἰσι τοῖς ὕψεσι· τὰ δὲ ὕψη ϗ αἱ βάσεις ἀνάλογοι δυσὶν αἱστισινȣ̃ν ὁμολόγοις πλευραῖς· ȣ̓κȣ̃ν τὰ ἀπὸ τῶν βάσεων τετράγωνα ἀνάλογά εἰσι τοῖς ἀπὸ τῶν ὑψῶν· τάτε ἀπὸ τῶν ὑψῶν καὶ τῶν βάσεων, τοῖς ἀπὸ δύω ὁποιωνȣ̃ν ὁμολόγων πλευρῶν· ἐπεὶ τοίνυν τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν βάσεων, ἢ τῶν ὑψῶν, τετράγωνα, ἔσονται τὰ αὐτὰ ϗ ὡς τὰ ἀπὸ δύω ὁποιωνȣ̃ν ὁμολόγων πλευρῶν τετράγωνα.

390. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δύω ὁμοίων πολυγώνων αἱ περίμετροι εἰσὶν, ὡς δύω αὐτῶν ὁμόλογοι πλευραί.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶσαι γὰρ αἱ αὐτῶν ὁμόλογοι πλευραὶ (σχ. 93) ἀνάλογον ἔχȣσιν· ȣ̓κȣ̃ν ἐςὶν ΑΖ : ΖΔ : : ρχ : χδ· ἄρα (Συμβ. Λογ. 244) ΑΖ + ΖΔ : ΖΔ : : ρχ + χδ : χδ, ϗ δὶ ἴσȣ ΑΖ + ΖΔ : ρχ + χδ : : ΖΔ : χδ· εἶτ ȣ̃ν δύω πλευραὶ πρὸς δύω πλευρὰς λόγον ἔχȣσιν, ὃν μία πρὸς μίαν· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τρεῖς πρὸς τρεῖς, ὡς μία πρὸς μίαν· ϗ ἐν γένει, πᾶσαι αἱ τȣ̃ ἑτέρȣ πρὸς τὰς θατέρȣ πλευρὰς, εἶτ᾽ ȣ̃ν ὅλη ἡ θατέρȣ περίμετρος πρὸς ὅλην τὴν θατέρȣ, ὡς μία πλευρὰ πρὸς μίαν τὴν αὐτῇ ἀντίςοιχον ἐν θατέρῳ πολυγώνῳ. Ο. Ε. Δ.

391. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ο᾽ δὲ τȣ̃δε τȣ̃ θεωρήματος μεταφυσικὸς λόγος ἐςὶν, ὅτι πασῶν τῶν ἐν τοῖς ὁμοίοις πολυγώνοις πλευρῶν, ἀνάλογον ἐχȣσῶν ἑκάςης ἑκάςῃ, δύω ἀντίςοιχοι πλευραὶ ὅμοια ὑπάρχȣσι μέρη, ἑκατέρα τῷ ἑαυτῆς ὅλῳ, εἶτ᾽ ȣ̃ν τῇ περιμέτρῳ, ἧς ἐςὶ μέρος, ἐπανήκȣσα· ἐὰν, φέρε, ἡ ΑΖ πεμπτημόριον ᾖ τῆς ΑΖΔΟΠ, ἡ ἀντίςοιχος αὐτῇ πλευρὰ ἔσεται ϗ αὐτὴ πεμπτημόριον τῆς ρχδκπ

περιμέτρȣ· ἀλλὰ τὰ ὅμοια μέρη δυοῖν ὅλων πρὸς ἄλληλά εἰσιν, ὡς τὰ ὅλα (Συμβ. λογ. 234)· δύω ἄρα ὁποιαιȣ̃ν ἀντίςοιχοι πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν, ὡς αἱ περίμετροι, εἴτ' ȣ̃ν ΑΖ : ρχ : : ΑΖΔΟΠ : ρχδκπ, ϗ τȣ̓ναντίον· ΑΖΔΟΠ : ρχδκπ : : ΑΖ : ρχ.

392. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Δύω κανονικῶν ὁμοίων πολυγώνων (χ. 94) αἱ περίμετροί εἰσιν, ὡς αἱ πλάγιαι ἀκτῖνες ΗΟ, ηο· τὰ γὰρ τρίγωνα ΠΗΟ, πηο εἰσὶν ὅμοια, ὅτι Π = Η = π = η, κ.τ.λ. (382)· ὅθεν ΠΗ : πη : : ΗΟ : ηο.

Ἐκ τȣ́τȣ ἄρα εἰσὶν αἱ αὐταὶ περίμετροι ϗ ὡς αἱ ὄρθιαι ἀκτῖνες· εἰσὶ μὲν γὰρ ὡς ΠΗ : πη, ϗ δὴ ϗ ὡς αἱ βάσεις ΠΗ, πη τῶν τριγώνων ΠΗΟ, πηο· ἀλλὰ ΠΗ : πη : : ΖΟ : κο (324), αἵτινές εἰσιν αἱ ὄρθιαι τῶν πολυγώνων ἀκτῖνες· ἄρα αἱ περίμετροί εἰσι ϗ ὡς αἱ ὄρθιαι ἀκτῖνες.

393. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Καὶ αἱ τῶν κύκλων, κανονικῶν ὄντων ϗ ὁμοίων σχημάτων (383), περιφέρειαι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες, ἢ ὡς αἱ διάμετροι· ϗ τὰ ὅμοια τόξα, εἴτ' ȣ̃ν τὰ συγκείμενα ἐξ ἰσαρίθμων μοιρῶν, εἰσὶν ὡς αἱ ἀκτῖνες, ἢ αἱ διάμετροι.

394. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὰ ὅμοια πολύγωνα, ὡς ΑΠΟΔΖ, ρπκδχ (χ. 93), δύνανται διαιρεθῆναι εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα ὅμοια ἕκαςον ἑκάςῳ ἀντιςοίχῳ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ γὰρ γωνία Π = π· αἱ δὲ ταύτῃ τῇ γωνίᾳ προσκείμεναι πλευραὶ ΠΑ, ΠΟ, πρ, πκ εἰσὶν ἀνάλογοι (382)· ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΠΟ, ρπκ εἰσὶν ὅμοια (337).

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ϗ τὰ τρίγωνα ΑΖΔ, ρχδ ὅμοιά εἰσι.

Τέλος δὲ τὰ δύω τρίγωνα ΑΔΟ, ρδκ ϗ αὐτὰ εἰσὶν ὅμοια· ἡ γὰρ γωνία ὑπὸ ΑΟΔ = ΠΟΔ — ΑΟΠ, ἡ δὲ ρκδ = πκδ — ρκπ· ἀλλ' ΑΟΠ = ρκπ διὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΟΠ, ρκπ· ἄρα ϗ ΑΟΔ = ρκδ (Ἀριθ. 14)· ἀποδειχθήσεται ὡσαύτως, ὅτι ϗ ΑΔΟ = ρδκ, διὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΖΔ, ρχδ, ϗ διὰ τὰς ἴσας γωνίας ΖΔΟ, χδκ (382)· ἄρα ϗ τὰ ΑΔΟ, ρδκ τρίγωνα εἰσὶν ὅμοια.

Τὰ δύω ἄρα ὅμοια πολύγωνα ΑΠΟΔΖ, ρπκδχ διῄρηνται εἰς τρία τρίγωνα ὅμοια ἕκαστον ἑκάστῳ ἀντιστοιχοῦντι. Ο. Ε. Δ.

395. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐντεῦθεν οὖν πλευρᾶς δοθείσης τῆς πκ ἐπ' αὐτῆς πολύγωνον ὅμοιον τῷ δοθέντι πολυγώνῳ ΑΖΔΟΠ κατασκευάζειν παιδευόμεθα· τοῦ γὰρ δοθέντος πολυγώνου εἰς τρίγωνα, ὅσ' ἂν ἐγχωροίη, διαιρεθέντος, ἐπὶ τῆς πκ συσταθήτω τρίγωνον ὅμοιον τῷ ΑΠΟ (339)· ἑξῆς δ' ἐπὶ τῆς ρκ συνεστάθω ὅμοιον τῷ ΑΔΟ, ϗ ἐπὶ τῆς ρδ τέλος τὸ ρχδ ὅμοιον τῷ ΑΖΔ· ἐπεὶ οὖν ἕκαστον τῶν ἐν τῷ πρχδκ τριγώνων ὅμοιόν ἐστιν ἑκάστῳ τῶν ἐν τῷ ΑΠΟΔΖ ἀντιστοίχων τριγώνων, ἐκ κατασκευῆς· ἄρα ϗ τὸ ὅλον πρχδκ ὅμοιόν ἐστι τῷ ΑΠΟΔΖ.

396. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ. Τὰ ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλα διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς ὁμόλογον, εἴτ' οὖν εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ δύω ὡντινωνοῦν ὁμολόγων πλευρῶν τετράγωνα.

ΔΕΙΞΙΣ. Δύω τρίγωνα φέρε τὰ ΑΖΔ, ρχδ, ὅμοια ἀλλήλοις, εἰσὶ προδήλως ὅμοια μέρη δύω ὁμοίων πολυγώνων ΑΠΟΔΖ, ρπκδχ· ὡς, ἐὰν τὸ ΑΖΔ τρίγωνον τεταρτημόριον, φέρ' εἰπεῖν, ᾖ τοῦ ΑΠΟΔΖ πολυγώνου, ϗ τὸ ρχδ τεταρτημόριον εἶναι τοῦ ρπκδχ· ἀλλὰ ΑΖΔ:

ρχδ : : ΑΖ² : ρχ² (389)· ἐπεὶ ἄρα τὰ δύω ὅλα ΑΠΟΔΖ, ρπκδχ εἰσὶν, ὡς τὰ αὐτῶν ὅμοια μέρη ΑΖΔ, ρχδ· ἄρα ἐ̃ ΑΠΟΔΖ : ρπκδχ : : ΑΖ² : ρχ². Ο. Ε. Δ.

397. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὰ ὅμοια κανονικὰ εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν πλαγίων ἀκτίνων ΠΟ, πο τετράγωνα· εἰσὶ γὰρ, ὡς ἤδη δέδεικται, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τετράγωνα· ἐπεὶ δὲ τῶν ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἀνάλογον ἔχȣσι ταῖς πλαγίαις, ἢ ταῖς ὀρθίαις, ἀκτῖσι (324, 386, 392), τὰ ἄρα κανονικὰ πολύγωνα εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν πλαγίων, ἢ τῶν ὀρθίων ἀκτίνων, τετράγωνα.

Ἔςω ȣ̃ν ἡ πλαγία ἀκτὶς ΗΟ διπλῆ, τριπλῆ, τετραπλῆ, τῆς πλαγίας ἀκτῖνος ηο· ἐκȣ̃ν τὸ μεῖζον ἑξάγωνον ἔςαι τετραπλȣ̃ν, ἐννεαπλȣ̃ν, ἑκκαιδεκαπλȣ̃ν, τȣ̃ ἐλάσσονος.

398. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Οἱ κύκλοι ἄρα πρὸς ἀλλήλȣς εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἀκτίνων τετράγωνα, ἢ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων (Συμϐ. Λογ. 234), ἢ ὡς τὰ ἀπὸ δύω ὁμοίων τόξων, ἢ τέλος ὡς τὰ ἀπὸ τῶν περιφερειῶν· ἔσαι γὰρ ἀνάλογον τοῖς ἀπὸ τῶν ἀκτίνων τετραγώνοις, ἀνάλογον ἕξȣσι καὶ τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ πάντων τῶν ποσῶν τῶν ταῖς ἀκτῖσιν ἀναλόγων (Συμϐ. Λογ. 263)· τὰ δ', ἃ εἴπομεν, μέρη ἀνάλογον ἅπαντα ἔχȣσι ταῖς ἀκτῖσιν (257 292)· ἄρα οἱ κύκλοι ἀνάλογοι ἔσονται πᾶσι τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν εἰρημένων ποσῶν.

Ἐὰν ȣ̃ν τριῶν κύκλων, τȣ̃ μὲν ἡ διάμετρος ὑποτεθῇ = 1 ποδὶ, τȣ̃ δὲ, = 5, τȣ̃ δὲ, = 10· ἡ τȣ̃ πρώτȣ ἐπιφάνεια ἔςαι πρὸς τὴν τȣ̃ δευτέρȣ ὡς 1 πρὸς 25· ἡ δὲ τȣ̃ πρώτȣ πρὸς τὴν τȣ̃ τρίτȣ ὡς 1 πρὸς 100· ἡ δὲ τȣ̃ δευτέρȣ πρὸς τὴν τȣ̃ τρίτȣ ὡς 25 πρὸς 100, τȣτέςιν ἡ

τοῦ τρίτου ἔσται ἑκατονταπλῆ μὲν τῆς τοῦ πρώτου, τετραπλῆ δὲ τῆς τοῦ δευτέρου.

399. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις ϗ ὁμοίως ἀναγραφομένοις (σχ. 95).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστω ὅμοια εἴδη τὰ ΑΒΓΔ, αβγδ· ϗ ἐκ τῶν πλευρῶν ΑΒ, αβ συνεστάσθω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΕΖΗ, ἐν ᾧ ΕΖ = ΑΒ, ϗ ΖΗ = αβ· ἐκ δὲ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου πλευρᾶς συνεστάσθω σχῆμα τὸ ΕΗΘΙ ἑνὶ τῶν δοθέντων ὅμοιον (395) οὕτως, ὡς τὴν ΕΗ πλευρὰν πρὸς τὰς τοῦ σχήματος γωνίας οὕτως ἔχειν θέσεως, ὡς κεῖται ἡ ΑΒ πρὸς τὰς ἐν τῷ ΑΒΓΔ πολυγώνῳ γωνίας τὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ ἀντιστοίχῳ τῶν τοῦ κατασκευασθέντος πολυγώνου· ἐπεὶ οὖν $ΑΒ^2 : αβ^2 :: ΑΓ : αγ$ (396), ἄρα ϗ $ΑΒ^2 + αβ^2 : ΑΒ^2 :: ΑΓ + αγ : ΑΓ$· ἐπειδὴ δὲ ΕΖ = ΑΒ, ϗ ΖΗ = αβ, ϗ $ΕΖ^2 + ΖΗ^2 = ΕΗ^2$ (349)· ἄρα ϗ $ΑΒ^2 + αβ^2 = ΕΗ^2$, ϗ $ΕΗ^2 : ΑΒ^2 :: ΑΓ + αγ : ΑΓ$· ἀλλὰ ϗ $ΕΗ^2 : ΑΒ^2 :: ΕΘ : ΑΓ$ (398)· ἄρα ϗ $ΕΘ : ΑΓ :: ΑΓ + αγ : ΑΓ$· ἐπεὶ δὲ ΑΓ = ΑΓ· ἄρα ϗ ΕΘ = ΑΓ + αγ. Ο.Ε.Δ.

400. ΠΟΡΙΣΜΑ. Πᾶν ἄρα κανονικὸν πολύγωνον, τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου ἀναγεγραμμένον, ἴσον ἐστὶ δυσὶ κανονικοῖς, τοῖς ἀπὸ τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν ἀναγεγραμμένοις.

401. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Καὶ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ἴσος ἐστὶ δυσὶ κύκλοις, ὧν διάμετροι αἱ περιέχουσαι τὴν ὀρθὴν γωνίαν· ὡς γὰρ τὰ ὅμοια πολύγωνα ἀνάλογόν εἰσι τοῖς ἀπὸ τῶν ὁμο-

λόγων πλευρῶν τετραγώνοις, ὕτω ϗ κύκλοι τοῖς ἀπὸ τῶν διαμέτρων (398).

402. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἐπεὶ δὲ ὕτω ϗ ἡμικύκλιον τὸ ΑΓΕ ἴσον ἐςὶν ἡμικυκλίοις τοῖς ΑΒΓ, ΓΔΕ, οἷς κοινὰ τὰ τμήματα ΑΓΖ, ΓΗΕ· ἐὰν ταῦτα κοινῇ ἀφαιρεθῇ, ὑπολειφθήσεται τὸ ἄθροισμα τῶν μηνίσκων ΑΒΓΖ + ΓΔΕΗ = τῷ τριγώνῳ ΑΓΕ· ἐὰν δὲ γένηται ΑΓ = ΓΕ, οἱ μηνίσκοι ἀλλήλοις ἴσοι ἔσονται, ἑκάτερός τε τύτων ἴσος ἔςαι τῷ ἡμίσει τῦ τριγώνυ ΑΓΕ, εἴτ' ὖν τεταρτημορίῳ τῦ τετραγώνυ, ὅπερ ἂν τῷ κύκλῳ ἐγγράφοιτο (σχ. 96).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ τῶν ἐπιφανειῶν ὡς ἐπιπέδων θεωρυμένων.

403. Ἐπίπεδον ἔςιν ἐπιφάνεια, ὑψώματος παντὸς ϗ ταπεινώματος ἄμοιρος (189).

404. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Εὐθεῖα ἡ Αβ (σχ. 97), δύω σημεῖα ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδυ ἔχυσα τῦ ΓΔΕΤ, ἅπασα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κεῖται, τῷ ἐπεκτείνεσθαι ϗ τὸ ἐπίπεδον, ὥσπερ ἡ εὐθεῖα· τυτὶ δὲ ἐκ τύτυ ἕπεται, ὅτι δύω σημεῖα ἱκανά εἰσι διορίσασθαι τὴν θέσιν, ἢ τὴν φορὰν τῆς εὐθείας (20).

405. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Δυοῖν ἐπιπέδων ΓΔΕτ, ΑΒΨρ, τεμνόντων ἄλληλα, ἡ κοινὴ διατομὴ Αβ ἔςαι γραμμὴ εὐθεῖα· ὐδὲν γάρ αὕτη ἐςὶν, ἀλλ' ἢ τὰ ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων κοινὰ σημεῖα· ὐκῦν ὕτε ὕψωμα ὕτε ταπείνωμα αὕτη διασχηματίσει κατὰ τὴν φύσιν τῶν ἐπιπέδων· ἄρα ἔςαι γραμμὴ εὐθεῖα.

406. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΨΑ κάθετος ςαθῇ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔΕτ κατὰ τὸ Α σημεῖον, αὕτη κάθετος ςήσεται ἐξ ἀνάγκης κ̀ πάσαις ταῖς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ εὐθείαις, ταῖς εἰς ἓν σημεῖον τὸ Α συνιȣ́σαις.

407. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἑνὸς σημείȣ τȣ̃ Ψ δοθέντος ἐκτὸς ἐπιπέδȣ τȣ̃ ΓΔΕτ, μία μόνη ἀπ᾽ αὐτȣ̃ τῷ ἐπιπέδῳ ἀχθήσεται κάθετος.

408. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Τρία σημεῖα β, ο, Γ, (σχ. 81) μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κείμενα ἐπιπέδȣ θέσιν ἀναγκαίως διορίζȣσι.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ ταῦτα τὰ τρία σημεῖα διὰ τριῶν εὐθειῶν βΓ, Βο, Γο· συςήσεται ἓν τὸ βοΓ τρίγωνον, ȣ̃ τὸ ἐπίπεδον ἔςαι μόνιμον κ̀ ὡρισμένον, ȣ̓ πάντως τῷ μεγέθει, ἀλλὰ τῇ φορᾷ, καθ᾽ ἣν ἐπ᾽ ἄπειρον ἐπεκταθῆναι δύναται. Ο. Ε. Δ.

409. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὅταν δύω εὐθεῖαι αἱ ΑΨ, Απ (σχ. 97) τέμνωνται κατὰ τὸ Α, καίτοι δυνάμεναι ἡ μὲν ἐπανήκειν ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔΕτ, ἡ δὲ κεῖσθαι ἐπὶ τȣ̃ ΑπΨ, ἓν μέντοι ἔςαι μόνιμον κ̀ ὡρισμένον τὸ ἐπίπεδον, ἐφ᾽ ȣ̃ ἀμφότεραι κείσονται, εἴτ᾽ ȣ̃ν τὸ τȣ̃ ΑπΨ τριγώνȣ τȣ̃ ἀποτελȣμένȣ ἐπιζεύξει τῶν π, Ψ περάτων διὰ τῆς ρΨ εὐθείας.

410. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Δύω παράλληλοι εὐθεῖαι αἱ ΓΕ, Δτ ἀεὶ ἐκληφθῆναι δύνανται ὡς κείμεναι ἐπὶ τȣ̃ αὐτȣ̃ μονίμȣ κ̀ ὡρισμένȣ ἐπιπέδȣ.

ΔΕΙΞΙΣ. Δυνατὸν ἀεὶ, δύω δοθεισῶν παραλλήλων, σχῆμα περικλεῖσαι διὰ δύω ἄλλων εὐθειῶν τῶν ΓΔ, Ετ, ὅθεν συςαθήσεται τὸ παραλληλόγραμμον ΓΔΕτ, ἐν ȣ̃ τῷ ἐπιπέδῳ ἀνήκȣσιν αἱ δύω πρῶται παράλληλοι ΓΕ, Δτ.

411. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ἐὰν δύω, ἢ πλείονα, παρ-

ἄλληλα ἐπίπεδα ὑφ' ἑτέρε ἐπιπέδε τέμνωνται, αἱ κοιναὶ διατομαὶ παράλληλοι εὐθεῖαι ἔσονται.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςωσαν τρία παράλληλα ἐπίπεδα ΔΕ, ΘΟ, Ρμ, ϗ τεμνέσθωσαν ὑπὸ τε ΑβΨρΥκ ἐπιπέδε· φημὶ δὴ, ὡς αἱ διατομαὶ ΑΒ, Ψρ, Υκ εἰσὶν εὐθεῖαι παράλληλοι· ϗ γὰρ ΑΒ, ϗ Ψρ, ἐδὲν πραγματικῶς εἰσιν, ὅτι μὴ τὰ τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ ϗ τοῖς τεμνομένοις παραλλήλοις κοινὰ σημεῖα.

412. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ὅταν ἐπίπεδόν τι ςερεὸν τέμνῃ, ἡ ἐντεῦθεν ἀναφυομένη τομὴ, εἴτ' ἐν ἡ ἐπιφάνεια, ἣν καταλείπει τὸ ἐπίπεδον μετὰ τὴν τε ςερεε τμῆσιν, ἔςι ϗ αὕτη ἐπίπεδον.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ γὰρ τομὴ, ἢ τὸ σχῆμα τετο, ἐδὲν ἕτερόν ἐςιν, εἰμὴ τὰ σημεῖα, καθ' ἃ τὸ τέμνον ἐπίπεδον συμβάλλει τῷ ςερεῷ· πάντα δὲ ταῦτα τὰ σημεῖα δυνήσονται ἐκληφθῆναι ὡς ἐπὶ τε τέμνοντος ἐπιπέδε κείμενα· ἄρα τὸ τέτων συμπλήρωμα συγκροτήσεται ἐπίπεδον.

413. Αἴτημα. Δύω ἐπίπεδα ἴσα τὰ ΑΒΡΟ, ΒΓΡΞ (σχ. 98) μὴ συνιςάτωσαν κατ' ἀρχὰς μηδεμίαν γωνίαν· ἀλλ' ἔςω τὸ Α σημεῖον ἐπὶ τε Γ, τὸ δὲ Ο ἐπὶ τε Ξ· ἐκεν τὰ δύω ἐπίπεδα διὰ τὴν κοινὴν εὐθεῖαν ΒΡ ἀλλήλοις συγχυθήσονται· ἡ δὲ τε ΑΒΡΟ μεσαιτάτη εὐθεῖα χΛ συγχυθήσεται ἑπομένως τῇ τε ΒΓΡΞ μεσαιτάτῃ εὐθείᾳ χΠ.

414. Νῦν ἐν, τε ΒΓΡΞ ἀκινήτε μένοντος, τὸ ΑΒΡΟ κινείσθω περὶ τὴν ΒΡ ὅλην ἡμιπεριαγωγήν· ἐκεν ἡ χΛ εὐθεῖα μετὰ τῆς αὐτῆς ἀντιςοίχε χΠ, ᾗ προσυγκέχυτο, ἐκ διαδοχῆς συςήσονται ἁπάσας τὰς δυνατὰς γωνίας, αἵτινες ἰσάριθμοι ἔσονται τοῖς βήμασι τοῖς γινομένοις ὑπὸ τῆς χΛ, ἀποχωρέσης ἀπὸ τῆς χΠ μέχρι τινὸς βαθμε δε-

δομένης κλίσεως· μετρηθήσονται δὲ ἑκάςη ὑπὸ τȣ̃ τόξȣ, τȣ̃ καταγραφομένȣ μὲν περὶ τὸ χ, ἀπολαμβανομένȣ δὲ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν χΛ, χΠ.

Α῝ δὲ περὶ τῶν δύω εὐθειῶν χΛ, χΠ εἴπομεν, νοηθῆναι δύνανται τὰ αὐτὰ ϗ περὶ πασῶν τῶν εὐθειῶν, αἳ συνιςῶσαι τὰ ςοιχεῖα δυοῖν ἐπιπέδων, εἰσὶ παράλληλοι ταῖς χΛ, χΠ, οἷαι αἱ ΟΡ, ΑΒ, κτλ., ἐπὶ τȣ̃ ὕπερθεν ἐπιπέδȣ, ϗ ΒΓ, ΞΡ, κτλ. ἐπὶ τȣ̃ ἔνερθεν· ἡ ἄρα γωνία, ἣν συνιςῶσι δύω ἐπίπεδα, ἡ αὐτή ἐςιν, ἣν συνιςῶσι δύω εὐθεῖαι αἱ χΛ, χΠ· ȣ̓κȣ̃ν αἱ δύω ἐπιπέδων, ἄλληλα τεμνόντων, ἰδιότητες, ὡς ἐκ τῶν γωνιῶν, αἱ αὐταί εἰσι ταῖς τῶν ἀλλήλας τεμνȣσῶν εὐθειῶν· ἐντεῦθεν ἄρα.

415. α΄. Δύω ἐπιπέδων ἄλληλα τεμνόντων δύω αἱ ἐφεξῆς γωνίαι εἰσὶν ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς (89)· δύω δὲ αἱ κατὰ κορυφὴν ἴσαι (99)· τὸ δὲ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν τῶν συνιςαμένων ὑπὸ δυοῖν ἢ πλειόνων ἐπιπέδων ἄλληλα τεμνόντων περὶ μίαν εὐθεῖαν τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσον ἐςί (96).

416. β΄. Δύω, ἢ πλείω, ἐπίπεδα (σχ. 97) παράλληλα, τεμνόμενα ὑπ᾽ ἄλλȣ ἐπιπέδȣ, συνιςῶσι μετὰ τȣ̃ τέμνοντος, ἴσας μὲν τὰς ἀντιςοίχȣς γωνίας (132), ἴσας δὲ τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ (133), ἴσας δὲ ϗ τὰς ἐκτὸς ἐναλλὰξ (135)· δυεῖν δὲ ἐντὸς ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὴν ἑτέραν θατέρᾳ παραπλήρωμα, δυεῖν δὲ ἐκτὸς ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ θατέρᾳ τὴν ἑτέραν ὡσαύτως (136)· τȣ̓ναντίον δὲ δυσὶν ἐπιπέδοις τρίτȣ ἐμπίπτοντος, ἐὰν ἓν τῶν εἰρημένων πέντε δοθῇ, τὰ δύω ἐπίπεδα παράλληλα ἔσονται (137).

417. γ΄. Τὰ δ᾽ ἐπιπέδȣ πρὸς ἐπίπεδον ἴσχοντος τὴν ἀναφορὰν, κρατεῖ τὰ αὐτὰ ϗ ἐπ᾽ εὐθείας, ἢ εὐθειῶν πρὸς ἐπίπεδον ἀναφερομένων.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Στερεωμετρία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Περὶ γενέσεως τῶν στερεῶν.

418. Στερεωμετρία ἐςὶν ἐπιςήμη τῶν ςερεῶν· ςερεὸν δὲ ἔκτασις, μῆκος, πλάτος, ϗ βάθος ἔχȣσα· ςερεότης δὲ, ἡ χωρητικότης αὐτȣ͂· τὸ μᾶλλον, ἢ ἧττον ἐκτετάσθαι κατὰ ταῦτα τὰ τρία.

419. Ἐὰν ἡ ΓΔΖΙ (σχ. 99) ἐπιφάνεια, ἀπειροςὸν ὅσον ἔχȣσα πύκνωμα, ἐπινοηθῇ παραλλήλως ἑαυτῇ ἀνιȣ͂σα μέχρι τῆς ΑΒΟΕ ἐπιφανείας, ϗ ἐν τῷ ἀνιέναι καταλείπȣσα τοσαύτας ἐπιφανείας ἑαυτῇ ὁμοίας, ὅσα διαβήματα ἀπειροςὰ διανύει, ἀπογεννήσει διὰ τῆς ἀνόδȣ ταύτης ςερεὸν τὸ ΖΔΑΕ, ὃ καλεῖται πρίσμα· ἑκάςη δὲ τῶν αὐτῆς πλευρῶν ΓΖ καταγράψει ϗ αὕτη παραλληλόγραμμον ΓΖΑΟ, ΖΟΕΙ, κτλ.· αἱ δὲ καταλειπόμεναι αὐτῆς ἀναβαινȣ́σης ἐπιφάνειαι ΓΔΖΙ ἔσονται ςοιχεῖα τȣ͂ ςερεȣ͂· ὥςε πρίσμα ἐςὶ ςερεὸν, ὑπὸ δυεῖν ἴσων ϗ παραλλήλων βάσεων ΓΔΖΙ, ΑΒΟΕ περατȣ́μενον, ϗ διὰ παντὸς τȣ͂ μήκȣς ὁμοίως ἔχον πυκνότητος.

Ἐὰν δὲ ἡ γεννήτρια βάσις παραλληλόγραμμον ᾖ

σχῆμα, τὸ εὐτεῦθεν ἀπογεννώμεον πρίσμα καλεῖται παραλληλεπίπεδον.

420. Ἐὰν μέντοι τῆς ἐπιφανείας ΓΔΖΙ (σχ. 100) ἀνιέσης μέχρι τῦ Α, ἑκάςη τῶν αὐτῆς πλευρῶν ΖΓ μεθ' ἕκαςον διάβημα ἐλαττῶται κατ' ἀριθμητικὸν λόγον, ἕως ὗ ἐπὶ τὸ Α ἀφικόμεναι γένωνται ἀπειροςαὶ, ϗ ἑπομένως συμπέσωσιν ἀλλήλαις κατὰ τὸ σημεῖον Α, ἡ ΓΔΖΙ ἐπιφάνεια ἀπογεννήσει ὕτω ςερεὸν τὸ ΑΓΔΖΙ, ὃ καλεῖται πυραμὶς, ἀφ' ἑκάςης δὲ τῶν αὐτῆς πλευρῶν τρίγωνον ἀπογεννηθήσεται τὸ ΖΓΑ.

421. Ἡ δὲ ΓΔΖΙ βάσις γεννήτρια ἀκύει τῦ ςερεῦ· ἡ δὲ πυραμὶς, τριγωνικὴ μὲν, ἐὰν ᾖ ἡ γεννήτρια βάσις τρίγωνον, τετραγωνικὴ δὲ, ἐὰν τετράγωνον, πεντάγωνος δὲ, ἐὰν πεντάγωνον κτλ.

422. Πρίσμα, ὗ αἱ μὲν γωνίαι εἰσὶν ὀρθαὶ, ἴσαι δὲ πᾶσαι αἱ πλευραὶ ΓΖ, ΖΟ, κτλ. καλεῖται κύβος· ὥςε κύβος ἐςὶ σχῆμα ςερεὸν, ὑπὸ ἓξ ἐπιπέδων περατέμενον ἴσων ϗ παραλλήλων.

Πρίσμα, ὗ ἡ γεννήτρια βάσις ἐςὶ κύκλος ΑΒΓΔ, καλεῖται κύλινδρος (σχ. 101)· πυραμὶς δὲ, ἧς ἡ γεννήτρια βάσις ΒΓΔΤ ἐςὶ κύκλος, κῶνος (σχ. 102).

423. Ὕψος ςερεῦ ἐςιν ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὴν βάσιν καταγομένη κάθετος ΑΓ (σχ. 99) ἢ ΑΜ (σχ. 103). Ἄξων δὲ, πρίσματος μέν ἐςιν εὐθεῖα ἡ Πη (σχ. 99), καταγομένη ἀπὸ τῦ κέντρυ τῆς ὕπερθεν βάσεως ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς ἔνερθεν· πυραμίδος δὲ, ἡ Αη (σχ. 100), ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὸ κέντρον η τῆς κατ' αὐτὴν βάσεως.

424. Πυραμίδος ἀπόθετος ἀκύει ἡ ΑΒ κάθετος

ἡ ἀπὸ τῆς Α κορυφῆς ἐπὶ μίαν τῶν αὐτῆς πλευρῶν ΙΔ καταγομένη.

Ὀρθὸν μὲν καλεῖται τὸ στερεὸν, ὅταν ὁ Πη ἄξων κάθετος ἐφεστήκῃ τῇ αὐτοῦ βάσει· πλάγιον δὲ, ὅταν πλάγιος· (σχ. 99, 100).

425. Πυραμὶς ΑΒΓΔ (σχ. 104) κόλουρος λέγεται, ὅταν ᾖ τετμημένη δι᾽ ἐπιπέδου τοῦ ΙΗΤ.

426. Ἐν γένει δὲ τὰ ὑπὸ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν περατούμενα στερεὰ, κοινῇ μὲν καλεῖται πολύεδρα, ἰδίᾳ δὲ τετράεδρον, πεντάεδρον, ἑξάεδρον, κτλ., ἕκαστον κατὰ λόγον τῶν ἐπιπέδων, οἷς περατοῦται· ὧν δὲ, αἱ μὲν γωνίαι πᾶσαι ἀλλήλαις ἴσαι, τὰ δὲ ἐπίπεδα κανονικὰ πολύγωνα, καὶ ὁμοειδῆ, καὶ ἰσάλληλα, ἐκεῖνα πολύεδρα καλεῖται κανονικά.

427. Ἐὰν ἡμικύκλιον τὸ ΜΟΔ περὶ τὴν αὐτοῦ διάμετρον περιενεχθῇ, καὶ μεθ᾽ ἕκαστον αὐτοῦ διάβημα καταλίπῃ ἡμικύκλιον αὐτῷ ὅμοιον (σχ. 105), τὸ ἐξ αὐτοῦ ἀπογεννώμενον στερεὸν καλεῖται σφαῖρα· ἡ δὲ ΜΔ εὐθεῖα, τῆς σφαίρας διάμετρος, ἢ ἄξων, τὰ δὲ σημεῖα Μ, Δ, πόλοι καλοῦνται τῆς σφαίρας.

428. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὸ ΗΚ ἀπόστημα, καθ᾽ ὃ σημεῖόν τι τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τὸ Η ἀπὸ τοῦ Κ κέντρου ἀφέστηκε, ἔστιν ἀκτὶς τοῦ γεννῶντος ἡμικυκλίου ΜΟΔ· ἔστιν ἄρα ἡ σφαῖρα στερεὸν, οὗ τῆς ἐπιφανείας ἅπαντα τὰ σημεῖα ἐπίσης ἀφέστηκεν ἐσωτερικοῦ αὐτῆς σημείου, ὃ καλεῖται κέντρον.

429. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Σφαίρας ἄρα ἅπασαι αἱ ἀκτῖνες ΚΗ, ΚΔ, ἅπασαι ἑπομένως αἱ διάμετροι, διπλαῖ οὖσαι τῶν ἀκτίνων, εἰσὶν ἴσαι.

430. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Τοῦ ΜΟΔ περὶ τὴν ΔΜ πε-

ριαγομένε, ἕκαςον σημεῖον Ο, δ, κτλ. καταγράφει προδήλως κύκλον περὶ ἓν τῆς διαμέτρε σημεῖον Κ, Ζ, κτλ. ὡς περὶ κέντρον· ϗ ὁ μὲν ὑπὸ τε τῆς ἀκτῖνος ΟΚ πέρατος Ο καταγραφόμενος, πάντων τέ ἐςι μείζων ϗ εἰς ἴσα τὴν σφαῖραν διχοτομεῖ· δὶ ὃ ϗ μέγας κύκλος ἀκέει· οἱ δὲ ἄλλοι, παραλλήλως γραφόμενοι τῷ μεγάλῳ, τοσέτῳ γίνονται ἐλάττες, ὅσῳ μᾶλλον τῶν Δ, Μ πόλων ἐγγίζεσιν· θεωρενται δὲ ἅπαντες ὡς ςοιχεῖα τῆς σφαίρας.

431. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ὥςε ἐὰν σφαῖρα τμηθῇ δὶ ἐπιπέδε καθέτε τῷ ἄξονι ΜΔ, ἡ τομὴ ἔςαι κύκλος (412), γεγραμμένος δὶ ἑνός τινος τῶν σημείων τε ΜΟΔ· ἐπεὶ ἄρα πᾶσα διάμετρος τῆς σφαίρας ἐκληφθῆναι δύναται ὡς ἄξων, περὶ ὃν περιήνεκται τὸ ἀπογεννῶν ἡμικύκλιον, ϗ πᾶν ἐπίπεδον τὴν σφαῖραν τέμνον ἀναγκαίως ἐςὶ κάθετον μιᾷ τινι ἀκτῖνι, ϗ ἑπομένως ϗ διαμέτρῳ· ἅπασα τομὴ τῆς σφαίρας, δὶ ἐπιπέδε γινομένη, ἔσεται κύκλος.

432. Ἐὰν τὸ ἔτω τὴν σφαῖραν τέμνον ἐπίπεδον διὰ τε κέντρε διήκῃ, ἑκάτερον τμῆμα καλεῖται ἡμισφαίριον· ἐὰν δὲ μὴ διὰ τε κέντρε, ἁπλῶς τμῆμα σφαιρικόν.

433. Τομεὺς δὲ σφαίρας καλεῖται ἀπόμοιρα σφαιρικὴ, ὑπὸ μέρες τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἀπολαμβανόμενον ϗ τομέων κυκλικῶν, οἷος ὁ ΟΔΚ (σχ. 105.).

434. Ἐὰν δὲ τὸ ΥΙΜ (σχ. 106) ὡς ἡμιπολύγωνον κανονικὸν ἐκληφθῇ, ἐξ ἀπείρων συνεςὼς πλευρῶν (257)· ἑκάςη αὐτε πλευρὰ ΠΙ ἐπακήκεσα ἔςαι ἑνί τινι τραπεζίῳ ΖΕΠΙ, ὅπερ ἐν τῇ περιαγωγῇ τε ΥΙΜ ἀπογεννήσει κῶνον κόλερον τὸν ΑΟΠΙ· Τὰ ἄρα σφαίρας ςοι-

χεῖα θεωρηθῆναι δύνανται, ὡς εἴπερ ἦσαν ἄπειροι κῶνοι κόλεροι, ὧν ὕψη ΖΕ εἰσὶν αὐτὰ τὰ ἀπειροςὰ τȢ ἄξονος μέρη, ἃ ἀντιςοιχεῖ τῇ ΠΙ πλευρᾷ τȢ πολυγώνȢ· ἐκ-ȣν ὁ ἄξων ἐςὶ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὑψῶν τῶν κώνων.

435. Τέλος δὲ θεωρηθῆναι ἔχει ἡ σφαῖρα ϗ ὡς συντεθειμένη ἐξ ἀπειροπληθῶν τετραγωνικῶν πυραμίδων, ἐχȣσῶν, τὴν μὲν κορυφὴν ἐν τῷ κέντρῳ, τὰς δὲ βάσεις ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας· τῶν γὰρ τετραγώνων, ἃ συνιςᾶσι τὰς τῶν πυραμίδων βάσεις, ὄντων ἀπειροςῶν, ἡ ἀπόθετος ἀπὸ τȢ κέντρȢ ὡς ἀπὸ κορυφῆς (424) ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως ἀχθεῖσα, ἔςαι παρὰ μικρὸν ὕψος τῆς πυραμίδος· ὑποτεθέντων ἄρα τῶν δε ςοιχείων, ἥκις' ἂν λυμανθείη ἡ τῶν τῆς σφαίρας ἀκτίνων ἰσότης.

436. Ὅμοια ςερεὰ καλȢνται, ὧν αἱ πλευραὶ ἰσάριθμοί τε εἰσὶ, ϗ συνιςῶσι γωνίας τὰς ἀντιςοίχȣς ἴσας, ϗ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ὁμόλογοι· ὥςε μόνῳ τῷ μεγέθει τῶν πλευρῶν, ϗ ἑπομένως τῇ ςερεότητι, διαφέρειν ἀλλήλων τὰ ὅμοια ςερεά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ ἐπιφανείας τῶν ςερεῶν.

437. ΟΡΙΣΜΟΣ. Στερεȣ̃ παράπλευρος ἐπιφάνεια καλεῖται ἡ περατȢσα τὸ ςερεὸν ἄνευ τῆς ὕπερθεν ϗ ἔνερθεν ἐπιφανείας· ȣ̈τω παράπλευρος ἐπιφάνεια τȢ ΑΕΓΙ πρίσματος ἐςὶ τὰ τέσσαρα παραλληλόγραμμα ΑΟΓΖ, ΔΒΓΔ, ΒΕΔΙ, ϗ ΟΕΖΙ, ἀλογȢμένων τῶν δύω ΑΒΟΕ, ϗ ΓΔΖΙ, τȢ ἀνωτέρȢ φημὶ ϗ κατωτέρȢ.

438. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἡ παντὸς ὀρθȣ̃ πρίσματος, ἐπομένως ὀρθȣ̃ κυλίνδρȣ, παράπλευρος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς περιμέτρȣ τῆς κατ' αὐτὸ βάσεως ΓΔΖΙ, ϗ τȣ̃ ΓΑ ὕψȣς (σχ. 99.).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστι γὰρ αὕτη τὸ συμπλήρωμα πασῶν τῶν περιμέτρων τῶν ὑπὸ τȣ̃ ΓΔΖΙ ἀπογεννωμένων πολυγώνων· τὸν δὲ ἀριθμὸν αὐτῶν, εἴτ' ȣ̃ν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν, ἐμφαίνει τὸ ὕψος ΓΑ. Ο. Ε. Δ.

439. ΠΟΡΙΣΜΑ. Συνάπτοντες δὲ τῷ γινομένῳ τὰς δύω ἐπιφανείας ἀνωτέραν τε καὶ κατωτέραν, ἢ τὸ διπλȣ̃ν τῆς ΓΔΖΙ βάσεως, ἕξομεν τὴν ὁλικὴν τȣ̃ πρίσματος ἐπιφάνειαν.

Ἵν' ȣ̃ν εὑρεθῇ ἡ πρίσματος ὀρθȣ̃, φέρ' εἰπεῖν τȣ̃ ΑΕΓΙ, ἐπιφάνεια, μετρηθήτω πρῶτον ἡ περίμετρος ΓΔΖΙ, ϗ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ ΑΓ ὕψος· εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ ΓΖ πλευρὰ ἐπὶ τὴν ΓΔ ἀχθεῖσαν πρὸς ὀρθὰς, εἰμὴ ἦν, τῇ ΓΖ, ϗ τὸ διπλȣ̃ν τȣ̃ γινομένου τȣ̃δε συνήφθω τῷ προτέρῳ γινομένῳ· ϗ δὴ ȣ̃τω πορισθήσεται ἡ ὁλικὴ τȣ̃ πρίσματος ἐπιφάνεια.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Βάσιν δ' ἀκȣ́οντες, ἐπὶ μὲν τῶν ἐπιφανειῶν εὐθεῖαν ἐννοȣ̃μεν ὡς τὴν ΓΖ, ἐπὶ δὲ στερεῶν ὅλην ἐπιφάνειαν, ὡς τὴν ΓΔΖΙ.

440. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἡ πάσης ὀρθῆς πυραμίδος ΑΓΔΖΙ, κανονικὸν πολύγωνον βάσιν ἐχȣ́σης, ἐπιφάνεια, ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἀποθέτȣ, ϗ τῆς ἡμιπεριμέτρȣ τῆς ΓΔΖΙ βάσεως (σχ. 100)·

ΔΕΙΞΙΣ. Ἴση γάρ ἐστιν αὕτη τῷ ἀθροίσματι πάντων τῶν τριγώνων, ἃ καταγράφει κινȣ́μενον τὸ ἀπογεννῶν πολύγωνον ΓΔΖΙ διὰ τῶν ἑαυτȣ̃ πλευρῶν· ἀλλὰ πυραμίδος ὀρθῆς, κανονικὸν πολύγωνον βάσιν ἐχȣ́σης, πάντα

τὰ τρίγωνα ταῦτα εἰσὶν ἴσα, ὡς δῆλον· ἕκαςον δὲ τρίγωνον ΑΔΙ ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἡμιβάσεως ΔΙ ϗ τῆς ἀποθέτȣ ΑΒ (285)· ἄρα τὸ πάντων τῶν τριγώνων ἄθροισμα ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τȣ ἡμιαθροίσματος τῶν βάσεων ΔΙ, ΔΓ κτλ., ἢ τῆς ἡμιπεριμέτρȣ τῆς κατὰ τὴν πυραμίδα βάσεως, ϗ τῆς ἀποθέτȣ Ο. Ε. Δ.

441. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τȣ́τῳ δὲ συναφθείσης τῆς ΓΔΖΙ βάσεως, εὑρεθήσεται ὅλη τῆς πυραμίδος ἡ ἐπιφάνεια.

442. ΠΟΡΙΣΜΑ Β. Ὥςε ἡ τȣ ὀρθȣ κώνȣ παράπλευρος ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἀποθέτȣ ϗ τȣ τῆς βάσεως ἡμικυκλίȣ ΒΓΔΤ.

443. Ἐὰν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, (σχ. 102.) περιενεχθῇ περὶ τὸν ΑΔ μένοντα ἄξονα, τὸ ἐντεῦθεν ἀπογεννώμενον ςερεὸν ΑΒΓΔΤ ἔςαι κῶνος· ὑφ᾽ ἑκάςȣ δὲ τῶν τȣ τριγώνȣ ςοιχείων ΒΤ. ΕΟ, κτλ. κύκλοι γραφήσονται ΒΓΔΤ, ΙΜΟχ, κτλ., ὧν αὐτὰ ἔσονται διάμετροι· ἐπεὶ δὲ ὅμοιά εἰσι τὰ ΑΙΟ, ΑΒΓ τρίγωνα, ἔςιν ΙΟ : ΒΓ : : ΑΖ : ΑΔ (321), τȣτέςιν „αἱ διάμε„μετροι ΙΟ, ΒΓ τῶν ἐν κώνῳ κύκλων, ὡς τὰ ἀπὸ τῆς „κορυφῆς Α μέχρις αὐτῶν τῶν κύκλων ἀποςήματα Α„Ζ, ΑΔ.“

Ἀλλὰ τὰ ἀποςήματα ΑΖ, κτλ. τῶν κύκλων συνεχῶς αὔξȣσι κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον ÷ 1. 2. 3. 4. 5 κτ. ἐντεῦθεν ἄρα τὰ ἑξῆς ὑποσυνάξομεν, ἃ ἡμῖν εἰς ἀρχὰς τῶν ἐν τοῖς ἑξῆς προκαταβληθήσεται.

444. α΄. Αἱ διάμετροι, ἢ αἱ περιφέρειαι, τῶν ἀλληλοδιαδόχων κύκλων, οἵτινες ςοιχεῖά εἰσι τȣ κώνȣ, συγκροτȣ̃σι πρόοδον ἀριθμητικήν.

β. Οἱ κύκλοι ΙΜΟχ, ΒΓΔΤ ὄντες πρὸς ἀλλή-

λυς ὡς τὰ ἀπὸ τῶν κατ' αὐτὺς διαμέτρων τετράγωνα (398), ἔσονται ϗ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῆς κορυφῆς Α εἰς αὐτὺς τὺς κύκλυς ἀποςημάτων.

445. γ'. Ἡ ἴσον τῆς τε κορυφῆς Α ϗ τῆς βάσεως ΒΓΔΤ ἀπέχυσα περιφέρεια ἴση ἐςὶ τῷ ἡμιαθροίσματι τῆς ἐλαχίςης πρὸς τῇ κορυφῇ περιφερείας Α, ϗ τῆς κατωτάτης περιφερείας ΒΓΔΤ (Συμβ. λογ. 202), εἴτ' ὖν τῷ ἡμίσει τῆς κατωτάτης περιφερείας· ἄπειρος γὰρ ὢν ὁ τῶν τῆς ἀριθμητικῆς προόδυ ὅρων ἀριθμὸς ὡς περιττὸς θεωρεῖσθαι δύναται.

446. δ'. Ἐὰν ὁ ὀρθὸς κῶνος ΑΒΓ δι' ἐπιπέδυ τοῦ ΡΠη παραλλήλυ τῇ βάσει τμηθῇ, αἱ κατάλοιποι περιφέρειαι συςήσυσι ϗ αὗται ἄπειρον ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἧς μόνον ἀφωρίσθησαν οἱ πρῶτοι τῶν ὅρων· ὐκῦν αὖθις ἡ ΙΟ περιφέρεια, ἡ ἴσον ἀπέχυσα τῶν δύω περιφερειῶν ΒΓ, ΡΠ, ἰσῦται τῷ αὐτῶν ἡμιαθροίσματι.

447. Ἐπεὶ ἡ ἡμιπεριφέρεια τῆς κωνικῆς βάσεως ἴση ἐςὶ τῇ ἴσον ἀπεχέσῃ τῆς κορυφῆς ϗ αὐτῆς τῆς βάσεως περιφερείᾳ (445)· ὐκῦν ἡ παράπλευρος τῦ κώνυ ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἀποθέτυ καὶ τῆς ἴσον ἀπεχύσης περιφερείας (442).

448. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Πυραμίδος ὀρθῆς ϗ κανονικῆς τῆς ΗΙΤΓΒΔ (σχ. 104.), τετμημένης δι' ἐπιπέδυ τῇ βάσει παραλλήλυ τῦ ΗΙΤ, ἡ κατάλοιπος παράπλευρος ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῇ ἡμιπεριμέτρῳ τῇ τομῆς ΗΙΤ, ϗ τῇ ἡμιπεριμέτρῳ τῆς βάσεως ΒΓΔ, πολλαπλασιασθείσαις ἐπί τὸ ΙΠ κατάλοιπον τῆς ἀποθέτυ ΑΠ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν ταύτῃ γὰρ τῇ πυραμίδι πάντα τὰ τραπέζια ΗΙΒΓ, ΙΤΓΔ, κτλ, εἰσὶν ἴσα (245)· ἀλλ' ἕκαςον τραπέζιον ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῦ ἡμιαθροί-

σματος τῶν δύω ἀπ' ἐναντίον εὐθειῶν ΗΙ, ΒΓ ϗ τȣ̃ ὕψȣς ΙΠ (295), ὅ ἐςι τῆς ἀποθέτȣ τὸ κατάλοιπον· ἄρα τὸ συμπλήρωμα πάντων τῶν τραπεζίων, εἴτ' ȣ̃ν ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τȣ̃ ἡμιαθροίσματος πασῶν τῶν ὕπερθεν ϗ ἔνερθεν εὐθειῶν ϗ τȣ̃ καταλοίπȣ τῆς ἀποθέτȣ. Ο. Ε. Δ.

449. ΠΟΡΙΣΜΑ Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τȣ̃ ὀρθȣ̃ κώνου ΑΒΓ (Σχ. 102), τετμημένου δι' ἐπιπέδου τȣ̃ ΡΠ, παραλλήλȣ τῇ βάσει, ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν ἡμιπεριφερειῶν ΡΠκ, ΒΓΤ, ϗ τȣ̃ καταλοίπȣ τῆς ἀποθέτȣ ΠΓ· αὗται δὲ αἱ ἡμιπεριφέρειαι ἰσȣ̃νται τῇ αὐτῶν ἴσον ἀπεχέσῃ περιφερείᾳ (Συμϐ. λογ. 202)· ἄρα ἐξισȣ̃ται ἡ εἰρημένη ἐπιφάνεια τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς μεσαιτάτης περιφερείας ϗ τῆς ἀποθέτȣ.

450. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὅταν, ȣ̃ καταμετρεῖται ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια, τὸ ςερεὸν πλάγιον ᾖ, ἢ τὸ ἀπογεννῶν ἐπίπεδον ᾖ πολύγωνον ἀκανόνιςον (421)· ἐὰν μὲν ᾖ πρίσμα, ληφθήσεται ἰδίᾳ ἡ ἑκάςȣ παραλληλογράμμȣ ἐπιφάνεια· ἐὰν δὲ πυραμὶς, ἡ ἑκάςȣ τριγώνȣ· ἐὰν δὲ ᾖ πυραμὶς κόλȣρος, ἡ ἑκάςȣ τῶν τραπεζίων, ἢ τῶν τραπεζοειδῶν κτλ.

451. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ἡ σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς περιμέτρȣ τȣ̃ μεγάλȣ κύκλȣ, ϗ τῆς διαμέτρȣ.

ΔΕΙΞΙΣ. α'. Ἔςω κῶνος κόλουρος ὁ ΑΟΠΙ (Σχ. 106)· ϗ ἤχθω ἐπὶ τὸ μέσον δ τῆς ἀπειροςῆς πλευρᾶς ΑΟ ἡ διάμετρος δΗ, ἥτις ἔςαι κάθετος τῇ δε τῇ πλευρᾷ (152), ϗ ἤχθω ἡ δν παράλληλος τῇ ΟΙ, ϗ ἡ ΑΒ ϗ νΗ κάθετος τῇ δν, ϗ ἑπομένως τῇ ΟΙ· ἐκȣ̃ν τὰ δύω τρίγωνα ΑΒΟ, νδΗ ἔξȣσι γωνίας ἴσας τὰς ὀρθὰς Β, ν· ἀλ-

λὲ ϗ ἡ ὑπὸ ΑΟΒ = δΗν· ϗ γὰρ τὸ ΑΥΙ τόξον, ἒ τὸ ἥμισυ μετρεῖ τὴν πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίαν ΑΟΒ, ἴσον ἐςὶν ἀκριβῶς τῷ τόξῳ δΥν, ἒ τὸ ἥμισυ μετρεῖ τὴν γωνίαν Η διὰ τὰς δύω ἀπειροςὰς πλευρὰς ΑΟ, ΠΙ· ἄρα τὰ δύω τρίγωνα ΑΒΟ νδΗ εἰσὶν ὅμοια.

β′ Ἐπεὶ ΑΒ = ΕΖ (127)· ἔςιν ἄρα ΕΖ (ΑΒ) : ΑΟ :: δν : δΗ· κληθείσης ἒν, κ μὲν τῆς περιφερείας, ἧς διάμετρός ἐςιν ἡ δν, Κ δὲ τῆς τῦ μεγάλυ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλυ περιφερείας, ἧς διάμετρος ἡ δΗ, ἔςαι δν : δΗ :: κ : Κ. ἄρα ΕΖ : ΑΟ :: κ : Κ (393)· ὅθεν ΕΖ × Κ = ΑΟ × κ, εἴτ' ἒν τὸ γινόμενον ὑπὸ τῦ ὕψυς ΕΖ τῦ κολέρυ κώνυ ΑΟΠΙ ϗ τῆς περιφερείας τῦ μεγάλυ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλυ ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἀποθέτυ ΑΟ τῦ κολέρυ κώνυ ϗ τῆς κ περιφερείας, τῆς ἐν τῷ μέσῳ τοῦ δε τοῦ κώνου, εἴτ' οὖν τῇ αὐτοῦ παραπλεύρῳ ἐπιφανείᾳ (249).

γ′. Ἐὰν ἒν ὅλη ἡ ΥΜ διάμετρος τῦ μεγάλυ κύκλυ, ἄθροισμα ἒσα πάντων τῶν ὑψῶν τῶν κολέρων κώνων (423), πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῦ μεγάλυ κύκλυ, πορισθήσονται πᾶσαι αἱ παράπλευροι ἐπιφάνειαι πάντων τῶν κολέρων κώνων, οἳ συντιθέασι τὴν σφαῖραν, ταὐτὸν εἰπεῖν, ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας. Ο. Ε. Δ.

452. ΠΟΡΙΣΜΑ Α′. Ἐπεὶ δὲ ἡ τῦ μεγάλυ ἐπιφάνεια κύκλυ ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἡμιπεριφερείας ϗ τῆς ἀκτῖνος (268), ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τετραπλασία ἐςὶ τῆς τοῦ μεγάλου κύκλου (Συμϐ. λογ. 310.)

453. ΠΟΡΙΣΜΑ Β′. Ὡσάυτως δειχθήσεται, ὅτι ϗ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τῦ σφαιρικῦ τμήματος τῦ γεννωμένυ ὑπὸ τῦ τόξυ ΠΥ, περιαγομένυ περὶ τὴν διάμετρον ΥΜ, ἔςιν ἴση

τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς περιμέτρȣ τȣ̃ μεγίςȣ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων, ϗ τȣ̃ ὕψȣς ΥΕ αὐτȣ̃ τȣ̃ τμήματος.

454. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄. Αἱ ἐπιφάνειαι δύω ὁμοίων ςερεῶν ΑΕΓΙ, ϗ αΗγΒ (Σχ. 99.) εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ δύω ὁμολόγων πλευρῶν ΑΓ, αγ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἑκάςη ἐπιφάνεια τῶν ἐν τῷ ἑτέρῳ ςερεῷ ἔςιν ὁμοία τῇ ἐν θατέρῳ ἀντιςοίχῳ (436)· ἀλλὰ τὰ ἐμβαδὰ δύω ὁμοίων πολυγώνων ΑΟΓΖ, αΙγΔ εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ δύω ὁμολόγων πλευρῶν ΑΓ, αγ τετράγωνα (405)· ἄρα ἑκάςη ἐπιφάνεια τῶν ἐν τῷ ςερεῷ πρὸς τὴν ἐν θατέρῳ ἀντίςοιχον, ὡς τὰ ἀπὸ δύω πλευρῶν ὁμολόγων ΑΓ, αγ τετράγωνα· ἀλλ᾽ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπιφανειῶν ὁ αὐτός ἐςιν ἐν ἑκατέρῳ ςερεῷ· ἄρα αἱ ἐπιφάνειαι δύω ὁμοίων ςερεῶν εἰσὶν ὡς κτ. (Συμβ. λογ. 234.) Ο. Ε. Δ.

455. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπεὶ δὲ αἱ σφαῖραι ὅμοιά εἰσι ςερεὰ, ὧν αἱ διάμετροι θεωρηθῆναι δύνανται ὡς ἀντίςοιχοι πλευραὶ, αἱ αὐτῶν ἐπιφάνειαι ἔσονται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων, ἢ τῶν ἀκτίνων, ἢ τῶν περιφερειῶν, τετράγωνα (393).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ τῆς τῶν ςερεῶν σωμάτων ςερεότητος.

456. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἡ ςερεότης παντὸς πρίσματος ϗ κυλίνδρȣ ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ΓΔΖΙ ϗ τȣ̃ ὕψȣς ΑΓ (Σχ. 99).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςι γὰρ αὕτη τὸ συμπλήρωμα τῶν ςοιχείων, εἴτ᾽ ȣ̃ν τῶν ἴσων τῷ ἀπογεννῶντι ἐπιπέδῳ

ΓΔΖΙ ἐπιφανειῶν, ἃς καταλείπει ἐν τῷ ἀνιέναι παραλλήλως ἑαυτῷ τὸ ΑΓ ὕψος· ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν ϛοιχείων τέτων ἐκδηλῦται διὰ τῶν σημείων, ἃ κεῖνται ἐν τῷ ἀποϛήματι τῶν δύω βάσεων τῆς ὕπερθεν ΑΒΟΕ, ϗ τῆς ἔνερθεν ΓΔΖΙ, εἴτ' ἒν διὰ τῦ ὕψυς ΑΓ· ἄρα τὸ γινόμενον ὑπὸ τῦ ὕψυς ϗ τῆς βάσεως ἴσον ἐϛὶ τῷ ἀθροίσματι πάντων τῶν ϛοιχείων, ταὐτὸν εἰπεῖν τῇ ϛερεότητι τοῦ πρίσματος. Ο. Ε. Δ.

457. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἡ ϛερεότης τῆς πυραμίδος ἴση ἐϛὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ϗ $\frac{1}{3}$ τῦ ὕψυς.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐκ τῦ ο μέσυ σημείυ τῦ αΒ κύϐυ ἀχθεισῶν τῶν εὐθειῶν οΔ, ογ, κτλ. (σχ. 107) πρὸς ἑκάϛην γωνίαν, ἀνακύψυσιν ἓξ ἴσαι πυραμίδες ΧΒγΔο, ΗΙΒΔο, κτλ.· ἄρα ἑκάϛη τῶν πυραμίδων ἑκτημόριον ἔϛαι τῦ κύϐυ· ἀλλὰ α΄. ἡ βάσις τῆς πυραμίδος ἐϛιν ἡ αὐτὴ τῇ τῦ κύϐυ· τὸ δ' αὐτῆς ὕψος δο, ἥμισυ τῦ ὕψυς τῦ κύϐυ· β΄. ἡ ϛερεότης τῦ κύϐυ ἴση ἐϛὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ϗ τῦ ὕψυς (456)· ἄρα ἡ τῆς πυραμίδος ἰσῦται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ΧΒγΔ ϗ $\frac{1}{6}$ τῦ ὕψυς δη, εἴτ' ἒν $\frac{1}{3}$ τῦ ἑαυτῆς ὕψυς δο. Ο. Ε. Δ.

458. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Πυραμὶς, τὴν αὐτὴν βάσιν ϗ τὸ αὐτὸ ὕψος πρίσματι ἔχυσα, τριτημόριόν ἐϛι τῦ πρίσματος· ϗ γὰρ τὸ πρίσμα δύναται ἴσα τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ϗ τῦ ὕψυς· ἡ δὲ πυραμὶς τῷ ὑπὸ τῆς βάσεως ϗ $\frac{1}{3}$ τῦ ὕψυς, ἄρα κτλ.

459. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Κῶνος ὁ ΑΒΓΔΖ (σχ. 108) τριτημόριόν ἐϛι τῦ κυλίνδρυ ΑΒΓΔΕΖΘ τῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ϗ τὸ αὐτὸ ἐκείνῳ ὕψος ἔχοντος.

460. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Κυλίνδρυ, ταὐτὸν δ' εἰπεῖν, ϗ πρίσματος τετραγωνικῦ (σχ. 90. 101), πυραμίδος ϗ δὴ ϗ

κώνȣ (χ. 100. 102) ἡ χωρητικότης τάχιον διὰ τȣ͂ πλάτȣς, ἢ διὰ τȣ͂ μήκȣς αὔξεται· πλάτος μὲν γὰρ τȣ͂ ΑΒΓΔΕ κυλίνδρȣ ἐςὶν ἡ ΑΓ διάμετρος, μῆκος δὲ ἡ πλευρὰ ΑΕ· τοιγαροῦν κυλίνδρων αἱ χωρητικότητες εἰσὶν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα, ὑποτιθεμένȣ ἴσȣ τȣ͂ μήκȣς· εἰσὶ γὰρ ὡς αἱ ἐπιφάνειαι τῶν τὴν βάσιν συνιςώντων κύκλων (Συμβ. Λογ. 307)· αἱ δὲ, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα (398)· αἱ αὐταὶ δὲ χωρητικότητες εἰσὶν ὡς τὰ μήκη, ἴσης ὑποτιθεμένης τῆς βάσεως· ἔςω γὰρ τὸ ΑΕ μῆκος, καὶ τεθείσθω, τῆς βάσεως ἡμιποδιαίαν ἐχȣ́σης διάμετρον, περιέχειν ὁ κύλινδρος δέκα μέτρα· ἐὰν ȣ͂ν τὸ ΑΕ μῆκος διπλασιασθῇ, ἔσονται ὥσπερ δύω ἴσοι κύλινδροι, κἀκ τȣ́τȣ περιέξȣσιν ἐπ᾽ ἀκριβὲς μέτρα 20· τοιγαροῦν αἱ τῶνδε τῶν κυλίνδρων χωρητικότητες ἔσονται ἁπλῶς ὡς τὰ μήκη.

461. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Ἐντεῦθεν ἄρα σαφὲς, ὡς πλεῖον κερδαίνεται αὐξομένης τῆς τȣ͂ ἄγγȣς διαμέτρȣ, ἢ αὐξομένȣ τȣ͂ μήκȣς· κάδος γάρ τις, ȣ͂ ἡ διάμετρος τριπλασιάζεται, περιέξει ἐννεαπλάσιον ἐν τῷ αὐτῷ μένων μήκει· ἀλλ᾽ ὁ αὐτὸς ȣ͂τος ἐν τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ τȣ͂ μήκȣς τριπλασιαζομένȣ, περιέξει μόνον τριπλάσιον.

462. ΣΧΟΛΙΟΝ. Αὐτὸ τὸ θεώρημα ἐμπεριέχει τὸν λόγον παντὸς τȣ͂ ἤδη εἰρημένȣ· ἡ γὰρ ςερεότης τȣ͂ πρίσματος, ἢ τῆς πυραμίδος, ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ τȣ͂ ὕψȣς, ἢ τȣ͂ $\frac{1}{3}$ τȣ͂ ὕψȣς· ἔςι δὲ ἡ βάσις γινόμενον ὑπὸ δύω εὐθειῶν, ὧν ἡ μὲν ὕψος, ἡ δὲ πλάτος καλεῖται· τοιγαροῦν ἡ βάσις ȣ̓κ ἐμφαίνει πλάτος ἁπλῶς, ἀλλ᾽ ἔςιν ἐν λόγῳ συνθέτῳ τȣ͂ μήκȣς, καὶ τȣ͂ πλάτȣς, ὑφ᾽ ὧν παράγεται· ἀλλαμὴν τὸ μῆκος, ἐφ᾽ ὃ ἡ βάσις πολλαπλασιάζεται, ἔςιν εὐθεῖα γραμμὴ, ἡ ἀ-

πλȣ̃ς παράγων τȣ̃ νέȣ προκύπτοντος, ὃ ἐμφαίνει τὴν ςερεότητα, τῶν βάσεων ἴσων ὑποτεθεισῶν, τὰ προκύπτοντα ἄρα ἔςαι ἁπλῶς ὡς τὰ μήκη, ἢ ὕψη (Συμϐ. Λογ. 307).

463. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ἡ ςερεότης τῆς σφαίρας ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς κατ' αὐτὴν ἐπιφανείας καὶ τȣ̃ τριτημορίȣ τῆς ἀκτῖνος.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ γὰρ σφαῖρα ἐκληφθῆναι δύναται ὡς συμπλήρωμα ἀπείρων πυραμίδων, ἐχȣσῶν, τὴν μὲν κορυφὴν πρὸς τῷ κέντρῳ, διὰ δὲ τῶν καθ' ἑαυτὰς ἀπειροςῶν βάσεων, σχηματιζȣσῶν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας (435)· ἑκάςη δὲ πυραμὶς ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς οἰκείας βάσεως ϗ τȣ̃ $\frac{1}{3}$ τȣ̃ ὕψȣς (457), εἴτ' ȣ̃ν τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας· πᾶσαι ἄρα αἱ πυραμίδες, εἴτ' ȣ̃ν ἡ σφαῖρα αὐτὴ ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τȣ̃ ἀθροίσματος πασῶν τῶν βάσεων, εἴτ' ȣ̃ν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ϗ τȣ̃ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀκτῖνος. Ο. Ε. Δ.

464. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Καὶ τομέως ἄρα σφαιρικȣ̃ τȣ̃ ΔΓΟ (σχ. 105) ἡ ςερεότης ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ΔΟ ϗ $\frac{1}{3}$ ΔΑ.

464. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἡ ςερεότης (σχ. 109) τῆς ΑΒΓΔ σφαίρας ἴση ἐςὶ $\frac{2}{3}$ κυλίνδρȣ τȣ̃ ΕΘΖΗ, ᾧ ἐγγέγραπται· κληθήτω γὰρ Ε ἡ ἐπιφάνεια τȣ̃ μεγάλȣ κύκλȣ ΓΔΙΟ τῆς σφαίρας, εἴτ' ȣ̃ν ἡ τȣ̃ κυλίνδρȣ βάσις ΒΘΗρ, ἥτις ἐςὶν ἐκείνῳ ἴση· Α δὲ ἡ νΓ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, ϗ 2Α τὸ τȣ̃ κυλίνδρȣ ὕψος ΑΒ· ȣ̃ν ἡ μὲν τῆς σφαίρας ςερεότης ἔςαι ἴση $4E \times \frac{A}{3}$ (452) $= \frac{4EA}{3}$, ἡ δὲ τȣ̃ κυλίνδρȣ $= E \times 2A$ (456) $= 2EA$· ἀλλὰ $\frac{4EA}{3}$

: 2ΕΑ : : 2 : 3 (Συμϐ. Λογ. 237)· ἄρα ἡ ϛερεότης τῆς σφαίρας κτλ.

465. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Τὰ ὅμοια ϛερεὰ πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων διαϛάσεων.

ΔΕΙΞΙΣ. Α῎παν ϛερεὸν παράγεται ὑπὸ τȣ͂ μήκȣς ϗ πλάτȣς τῆς βάσεως, ϗ ὑπὸ τȣ͂ ὕψȣς ἢ βάθȣς (456, 457)· ἀλλὰ δύω ὁμοίων ϛερεῶν αἱ τρεῖς διαϛάσεις εἰσὶν ἀνάλογοι· ὡς, εἰ τὸ τȣ͂ ἑτέρȣ μῆκος διπλάσιον, φέρ᾿ εἰπεῖν, εἴη τȣ͂ ἐν θατέρῳ, ϗ τὸ πλάτος τȣ͂ πλάτȣς, ϗ τὸ ὕψος τȣ͂ ὕψȣς, ὡσαύτως εἶναι διπλάσια· ȣ̓κȣ͂ν ὁ λόγος ὁ τῶν ὑψῶν, ϗ ὁ τῶν μηκῶν, ϗ ὁ τῶν πλάτεων εἰσὶν ἴσοι, ἀλλ᾿ ὁ λόγος ὁ ἐκ τριῶν ἴσων συγκείμενος ἑνὸς τȣ́των ἐϛὶ τριπλασίων (Συμϐ. Λογ. 290)· αἱ δὲ ϛερεότητες δύω ὁμοιωνȣ͂ν ϛερεῶν ἐν λόγῳ εἰσὶ συνθέτῳ τῷ ἀπὸ τῶν τριῶν αὐτῶν διαϛάσεων· ἄρα τὰ ὅμοια ϛερεὰ κ. τ. λ. Ο. Ε. Δ.

466. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὰ ὅμοια ϛερεὰ εἰσὶν ὡς οἱ κύϐοι δύω τινῶν ὁμολόγων διαϛάσεων, εἴγε εἰσὶν ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῶν ὁμολόγων διαϛάσεων· ἀλλ᾿ ὁ τριπλασίων λόγος ὁ αὐτός ἐϛιν, ὃς ϗ τῶν κύϐων τῶν ἀπὸ δύω ὁμολόγων πλευρῶν (Συμϐ. Λογ. 311). ἄρα κ.τ.λ.

467. Ἐὰν ἄρα δύω ὁμοίων ϛερεῶν (σχ. 99. 107) θατέρȣ τὸ ὕψος ΑΓ ᾖ ἐξ ὑποθέσεως διπλȣ͂ν, ἢ τριπλȣ͂ν, ἢ τετραπλȣ͂ν, τȣ͂ θατέρȣ ὕψȣς αγ, ἡ ϛερεότης τȣ͂ πρώτȣ πρὸς τὴν τȣ͂ δευτέρȣ ἔϛαι ὡς ὁ κύϐος τȣ͂ 2, ἢ τȣ͂ 3, ἢ τȣ͂ 4, πρὸς τὸν κύϐον τȣ͂ 1, εἴτ᾿ ȣ̓͂ν ἔϛαι ὀκταπλȣ͂ν, ἢ εἰκοσιεπταπλȣ͂ν, ἢ ἑξηκοντατετραπλȣ͂ν, τȣ͂ δευτέρȣ.

468. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ὥσπερ οἱ κύκλοι ὅμοιά εἰσι χήματα (383), ȣ̔́τως αἱ σφαῖραι, αἱ διὰ περιαγωγῆς

ἡμικυκλίυ ἀπογεννώμεναι, ὅμοιά εἰσι ςερεὰ (427)· ἐντεῦθεν ἄρα, α΄. τῶν σφαιρῶν αἱ ἀκτῖνες, αἱ διάμετροι ϗ αἱ περιφέρειαι, δύνανται ἀεὶ ἐκλαμβάνεσθαι ὡς ὁμόλογοι πλευραὶ, ϗ ἀεὶ ὡς ὁμοίως ςερεοῖς ἐπανήκοντα ἀνάλογον εἶναι· β΄. αἱ ςερεότητες τῶν σφαιρῶν εἰσὶν ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων, ἢ τῶν διαμέτρων, ἢ τῶν περιφερειῶν, τῶν ἐν αὐταῖς μεγάλων κύκλων.

Ἐὰν ἓν σφαῖρα διάμετρον ἔχῃ ἑτέρας δεκαπλάσιον, ἕξει χωρητικότητα, ἢ μέγεθος, χιλιοπλάσιον, τυτέςιν, ἐὰν ἡ δευτέρα χωρῇ φέρε ἕνα κυβικὸν πόδα ὕδατος, ἡ πρώτη χωρήσει χιλίυς· ἐπεὶ 1000 ἐςὶν ὁ κύβος τῦ 10· ϗ ἐὰν, κατὰ τὰς ἐχάτας τῶν ἀςρονομένων παρατηρήσεις, ἡ διάμετρος τῦ ἡλίυ ὑποτεθῇ ἑκατονταπλῆ τῆς κατὰ τὴν γῆν, ἡ ςερεότης αὐτῦ ἔςαι πρὸς τὴν τῆς γῆς ὡς 1000000 : 1· ἔςι γὰρ ἐκείνη πρὸς ταύτην ὡς 100^3 : 1^3, εἴτ' ἓν ὡς 1000000 : 1.

469. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὃ λίαν ξυμβάλλει ἐν τῇ Φυσικῇ, ὡς ὁ τῶν ςερεοτήτων λόγος τάχιον αὔξει, ἢ ὁ τῶν ἐπιφανειῶν· δύω γὰρ ὁμοίων ςερεῶν, αἱ μὲν ἐπιφάνειαι εἰσὶν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τετράγωνα, αἱ δὲ ςερεότητες, ὡς οἱ κύβοι· ἡ ἐπιφάνεια φέρε σφαίρας, διπλῆν ἐχύσης διάμετρον, τετραπλῆ ἐςὶ τῆς ὑποδιπλῆν ἐχούσης, ἡ δὲ ςερεότης ταύτης ἐκείνης ἐςὶν ὀκταπλῆ· ἐὰν δὲ τριπλῆν ἔχῃ διάμετρον ἡ σφαῖρα, ἡ μὲν ἐπιφάνεια ἔςαι ἐννεαπλῆ, ἡ δέγε ςερεότης εἰκοσιεπταπλῆ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ Πολυέδρων.

470. Γωνία ςερεὰ καλεῖται, ἥτις ἐκ τῆς συνδρομῆς τῶν κορυφῶν πλειόνων ἐπιπέδων γωνιῶν, ἀλλήλαις προσκεκλιμένων, συνίςαται· τοιαίδε εἰσὶν αἱ τῶν πυραμίδων κορυφαὶ, αἱ τῶν πρισμάτων γωνίαι κτλ.

Αἱ ςερεαὶ γωνίαι, αἱ ὑπὸ ἰσαρίθμων ϗ ὡσαύτως κειμένων ἐπιπέδων γωνιῶν, ὧν αἱ ὁμόλογοι ἀλλήλαις ἴσαι, περιεχόμεναι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Μέτρον γωνίας ςερεᾶς ἐςι σφαῖρα, ὥσπερ ἐπιπέδȣ κύκλος· διὸ ἐπινοητέον ἀεὶ τὴν κορυφὴν τῆς ςερεᾶς γωνίας κεῖσθαι ἐν τῷ κέντρῳ σφαίρας, ἧς ἡ ἀκτὶς πρὸς τὸ δοκȣ̃ν παραλαμβάνεται· τȣ́τȣ δὴ τεθέντος, ἑκάςη τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν τὴν ςερεὰν συνιςωσῶν, ἐν ἐπιπέδῳ ἔσεται κύκλȣ μεγίςȣ τῆς σφαίρας, ϗ μέτρον μὲν ἕξει τὸ αὐτȣ̃ τόξον τὸ ὑπὸ τῶν σκελῶν αὐτῆς ἀπολαμβανόμενον, βάσιν δὲ τὴν χορδὴν τȣ̃ καταμετρȣ̃ντος τόξȣ· μέτρον ἄρα ςερεᾶς γωνίας ἐςι τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν τόξων, ἅπερ αἱ βάσεις τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ταύτην συνιςωσῶν ὑποτείνȣσιν· ἐπεὶ δὲ ἑκάςη τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν τὴν ςερεὰν συγκροτȣσῶν κοινὰς ἔχει τὰς πλευρὰς πρὸς ἑκατέραν τῶν προσεχῶς κειμένων ἐπιπέδων γωνιῶν, δῆλον ὅτι ϗ τὰ τόξα τῶν μεγίςων κύκλων, τῶν τὰς ἐπιπέδȣς ταύτας γωνίας καταμετρȣ́ντων ἀλλήλοις συζεύγνυνται, ὥσπερ ἀμέλει ϗ αἱ αὐτῶν χορδαὶ, ϗ πολύγωνόν τι συνιςῶσιν, ὑπὸ τῆς ἐξ αὐτῶν συγκροτȣμένης περιμέτρȣ περιεχόμενον, ὅπερ βάσις ἐςὶ τῆς ςερεᾶς γωνίας.

471. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Τριῶν τὐλάχιςον γωνιῶν ἐπιπέδων χρεία εἰς σύςασιν ςερεᾶς· τὸ γὰρ ἁπλὑςατον τῶν πολυγώνων, τῶν βάσις εἶναι δυναμένων τῆς ςερεᾶς γωνίας, ἔςι τὸ τρίγωνον.

472. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Τὴν μεγίςην τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν τὴν ςερεὰν συνιςωσῶν, ἐλάσσονα δέον εἶναι τῦ τῶν λοιπῶν ἀθροίσματος.

ΔΕΙΞΙΣ. Εἰ γὰρ εἴη ἴση, ϗ τὸ ταύτην καταμετρῦν τόξον τῆς σφαίρας ἴσον ἂν ἦν τῷ ἀθροίσματι τῶν τόξων τῶν τὰς λοιπὰς καταμετρύντων· τύτυ δὲ τεθέντος, τὰ λοιπὰ τόξα ἄλλως ὐκ ἂν ἐφικνοῖτο τῶν περάτων τῦ τὴν μεγίςην καταμετρῦντος γωνίαν, ὥςε ἀλλήλοις συνάπτεσθαι, ἢ συμπεσόντα ἐκείνῳ· ἅπαντα ἄρα τὰ τόξα ταῦτα, ϗ δὴ ϗ αἱ τύτων χορδαὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἂν εἶεν ἐπιπέδῳ, ὅπερ τῇ τῆς ςερεᾶς γωνίας καταμετρήσει διαμάχεται· πολλῷ μᾶλλον ἄτοπον τὸ τὴν μεγίςην τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν μείζονα τῦ τῶν λοιπῶν ἀθροίσματος ὑποτεθῆναι· ὕτω γὰρ ὐδὲ ἔχει ὅλως τὰ τόξα κατὰ τὰ αὐτῶν πέρατα ἀλλήλοις συνέρχεσθαι.

473. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Τὸ ἄθροισμα ἁπασῶν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν τὴν ςερεὰν συνιςωσῶν, ἔλασσον εἶναι δέον ἢ 360°.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐὰν γὰρ ὑποτεθῇ ἶσον εἶναι 360°, τὰ τόξα τῆς σφαίρας, ἃ τὰς ἐπιπέδυς γωνίας καταμετρεῖ συζευχθέντα ἀλλήλοις, μεγίςυ κύκλυ περιφέρειαν ἀκριβῶς συμπληρώσει, ϗ αἱ ἁπασῶν ἄρα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν κορυφαὶ, συνελθῦσαι ἀλλήλαις, ἔσονται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ϗ ἥκιςα ςερεὰν γωνίαν ποιήσυσιν· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

474. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ἐὰν δύω ςερεαὶ γωνίαι Α, α, ἐκ τριῶν ἐπιπέδων ἑκατέρα συνιςάμεναι, τὰς δύω ἐπι-

πέδους Β, Δ ταῖς δυσὶν ἐπιπέδοις β, δ ἴσας ἔχωσιν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ ἐπίσης ἀλλήλαις προσκεκλιμένας, καὶ ἡ τρίτη τῇ τρίτῃ ἴση ἔσαι, καὶ αἱ σερεαὶ αὗται ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

ΔΕΙΞΙΣ. Οὐσῶν γὰρ τῶν πλευρῶν ἁπασῶν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ἀλλήλαις ἴσων (ἔσι γὰρ ἡ σερεὰ γωνία ἐν κέντρῳ σφαίρας, ἧς ἐφικνοῦνται τῆς ἐπιφανείας αἱ πλευραὶ (470)), δῆλον ὅτι δι' αὐτὸ τοῦτο καὶ διὰ τὸ ἐπίσης ὑποτίθεσθαι ἀλλήλαις προσκεκλιμένας τὰς δύω ἐπιπέδους γωνίας Β, Δ (ἐξαιρουμένης τῆς τρίτης) γωνίαν τινὰ ὁμοῦ ποιοῦσιν, ἀκριβῶς ἐν ἑαυτῇ τὴν ὑπὸ τῶν ὁμολόγων β, δ συνισαμένην χωροῦσαν· τὰ πάντα γὰρ ἴση ὑποτίθεται· αἱ κοῖλαι ἄρα αὗται γωνίαι οὐκ ἂν εἶχον συγκλείεσθαι, εἴπερ ἄνισοι εἶεν αἱ ἕτεραι δύω ἐπίπεδοι γωνίαι· ἔσεται ἄρα ἀνάγκη τὰς δύω ταύτας σερεὰς Α, α ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

475. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τῷ αὐτῷ τρόπῳ δειχθήσεται, ὅτι κἂν δύω σερεαὶ γωνία, ὑπὸ τεσσάρων συνισάμεναι ἐπιπέδων, ἔχωσι τὰς τρεῖς ἐπιπέδους ταῖς τρισὶν ἴσας ἑκάσην ἑκάσῃ, καὶ ὡσαύτως κειμένας, καὶ ἡ τετάρτη τῇ τετάρτῃ ἔσεται ἴση, καὶ ἡ σερεὰ ὅλη ὅλῃ τῇ σερεᾷ· τοῦτ' αὐτὸ κρατεῖ καὶ ἐπὶ τῶν σερεῶν γωνιῶν τῶν ὑπὸ 5, 6, 7, κτ. ἐπιπέδων συνισαμένων.

476. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'. Εἰς πολυέδρου σύςασιν τεσσάρων τοὐλάχισον ἐπιπέδων χρεία· τρία γὰρ ἐπίπεδα ἀλλήλοις ὁπωσοῦν συζευχθέντα τὴν σερεὰν ποιοῦσι γωνίαν (471)· δεῖ ἄρα ἑνός ἔτι ἵνα τὸ χωρίον πανταχόθεν περικλεισθῇ, καὶ διαςάσεις τρεῖς τὸ πολύεδρον σχῇ· ἄρα κτλ.

477. ΘΕΩΡΗΜΑ ϛ'. Πᾶν πολύεδρον οὐ δύναται ἐλάττους, ἢ τέσσαρας ἔχειν γωνίας.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν τὴν σερεὰν γωνίαν

συνιςώντων ἐπιπέδων κενὸν ἀπολειπόμενον χωρίον ἐςι σχῆμα, τρεῖς τὐλάχιςον ἔχον γωνίας· ἐὰν ἄρα περικλεισθῇ, τρεῖς ςερεαὶ γωνίαι ἐντεῦθεν ἀναφυήσονται· τὸ πολύεδρον ἄρα τέτταρας ςερεὰς γωνίας ἔχειν ἐπάναγκες.

478. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ΄. Πέντε μόνα εἰσὶ τὰ κανονικὰ πολύεδρα, τρία μὲν, ὧν τὰ ἐπίπεδα ἐςὶν ἰσόπλευρα τρίγωνα· ἓν δὲ, ἧ τὰ ἐπίπεδα τετράγωνα, ϗ ἓν, ἧ πεντάγωνά εἰσι κανονικά.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ γὰρ εἰς σύςασιν ςερεᾶς γωνίας τριῶν ἐπιπέδων χρεία (471)· ϗ ςερεὰ γωνία ὑπὸ ἐπιπέδων, αἵπερ εἶεν ὁμ8 360°, ἐκ ἂν ἔχοι συςῆναι (473), δῆλον ὅτι πενταχῶς μόνον αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῶν κανονικῶν πολυγώνων, τὴν ςερεὰν συνιςῶσι γωνίαν· α΄. ἐπεὶ ἡ τῦ ἰσοπλεύρυ τριγώνυ γωνία ἐςὶν 60°, τρεῖς ἄρα τύτων ἀλλήλαις συνελθῦσαι γωνίαν ςερεὰν = 180° συνιςῶσι, ϗ ἑπομένως ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων ςερεὸν κανονικὸν συνίςαται, ὅπερ καλεῖται τετράεδρον· β΄. τέτταρες γωνίαι ἰσοπλεύρυ τριγώνυ γωνίαν ςερεὰν = 240° ποιῦσιν· ὀκτὼ ἄρα τοιάδε τρίγωνα, ἀλλήλοις συζευχθέντα, κανονικὸν σῶμα ὀκτάεδρον συνιςῶσι· γ΄. πέντε γωνίαι ἰσοπλεύρυ τριγώνυ ἀλλήλαις συνελθῦσαι γωνίαν ςερεὰν = 300° συνιςῶσιν· εἴκοσι ἄρα τοιύτων τριγώνων ἀλλήλοις συναφθέντων, ἀποφέρεται ςερεὸν εἰκοσάεδρον καλύμενον· ὑπὸ γεμὴν ἓξ γωνιῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων γωνία ςερεὰ ἐκ ἂν ἔχοι συςῆναι· ἓξ γάρ τοι ἐπίπεδοι τοιαίδε γωνίαι 360° ποιῦσι· ϗ εἰσὶν ἄρα ἅπαντα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (473)· δ΄. ἡ τῦ τετραγώνυ γωνία ἐςὶ μοιρῶν 90· τρεῖς ἄρα συνελθῦσαι γωνίαι ςερεὰν ποιῦσι μοιρῶν 270· ϗ ἑπομένως ἐκ τετραγώνων ἓξ ἀποφέρεται ςερεὸν, ὃ καλεῖται ἑξάεδρον, ϗ ἰδίῳ ὀνόματι κύβος· τέσσαρες μέντοι

τοιαίδε γωνίαι ςερεὰν ȣ̓ συνιςῶσι· τετράκις γὰρ 90° ἐςὶν ἴσον 360°· έ. ἡ τȣ̃ κανονικȣ̃ πενταγώνȣ γωνία μοιρῶν ἐςιν 180· τρεῖς ἄρα τȣ́των συναφθεῖσαι ςερεὰν γωνίαν ποιȣ̃σι μοιρῶν 324· ἔνθεντοι ἐκ πενταγώνων δώδεκα ἀποφέρεται σῶμα κανονικὸν δωδεκάεδρον· τέτταρες δὲ τȣ̃ πενταγώνȣ γωνίαι ποιȣ̃σι μοίρας 432, ϗ ἑπομένως ςερεὰν γωνίαν ȣ̓ συγκροτȣ̃σι· τέλος δὲ τῆς τȣ̃ κανονικȣ̃ ἑξαγώνȣ γωνίας ȣ̓́σης μοιρῶν 120, τρεῖς ἅμα τοιαίδε ληφθεῖσαι ποιȣ̃σι 360°· γωνία ἄρα ςερεὰ ἐκ τȣ́των ȣ̓ συςȣθήσεται· ϗ δὴ ȣ̓δ' ἐκ πλειόνων κανονικῶν ἑξαγώνων πολύεδρον· ταὐτόν ἐςιν εἰπεῖν ϗ περὶ τῶν ἑπταγώνων, ὀκταγώνων κτλ.· εἴδη ἄρα κανονικῶν σωμάτων, παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε, ȣ̓ συςαθήσεται. Ο. Ε. Δ.

479. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τῷ πρωτοπείρῳ, τὰ περὶ τῶν κανονικῶν πολυέδρων ὧδε ῥηθέντα μετιόντι, ἐπάναγκες ἔχειν ἀνὰ χεῖρας κανονικὰ πολύεδρα ἐκ χάρτȣ ςεῤῥȣ̃, ϗ εἰς διάφορα ἐπίπεδα ἐκτετμημένȣ· ȣ̓́τω γὰρ ῥᾷςα τὴν τῶν πολυέδρων κατασκευὴν μηχανήσεται.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ Β΄. ΤΟΜΟΥ.

ΠΙΝΑΞ ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΗΣ.

Τῶν ἐν τῷ Β΄. Τόμῳ περιεχομένων.

Σελ.

ΣΥΜΒΟΛ. ΛΟΓ. ΤΜΗΜΑΤΟΣ Β΄.

Κεφάλαιον Θ΄. Περὶ λογαρίθμων 1

— — Ι΄. Περὶ μεγεθῶν συμμέτρων ϗ ἀσυμμέτρων 30

— — ΙΑ΄. Περὶ διαφόρȣ διαθέσεως ϗ συντάξεως 34

ΣΥΜΒΟΛΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΜΗΜΑ Γ΄.

Κεφάλαιον Α΄. Περὶ ἐξισώσεων ἐν γένει . . 37

— — Β΄. Ἔκθεσις τῶν ἀρχοειδῶν μετασχηματισμῶν 40

— — Γ΄. Περὶ πρωτοβαθμίων προβλημάτ. 45

— — Δ΄. Προβλήματα τȣ Α΄. βαθ. ἐκ πλειόν. ἐξισ. 65

— — Ε΄. Περὶ ἐξισώσεων τȣ Β΄. βαθμȣ . 81

— — ς΄. Περὶ συνθέτων ἐξισώσεων . . 91

— — Ζ΄. Περὶ γενικ. τύπων τῶν ἐξισ. . 101

— — Η΄. Περὶ ἀορίςων προβλημάτων . 133

— — Θ΄. Περὶ ἀπείρȣ ποσότητος . . . 139

— — Ι΄. Περὶ σειρῶν 143

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Α΄.

Κεφάλαιον Α΄. Ἀρχαὶ τῆς Γεωμ. ϗ περὶ γραμμῶν 169

— — Β΄. Περὶ τȣ κύκλȣ 175

— — Γ΄. Περὶ εὐθειῶν καθέτων ϗ πλαγίων. 185

— — Δ΄. Περὶ μέτρȣ τῶν γωνιῶν . . 189

— — Ε΄. Παντοίων γωνιῶν ἐκτίμησις . 192

— — ς΄. Περὶ τῆς καθέτȣ 195

— — Ζ΄. Περὶ παραλλήλων εὐθειῶν . . 201

— — Η΄. Περὶ εὐθειῶν ἀναφερ. πρὸς τὸν κύκλον 208

— — Θ΄. Περὶ δυνάμ. γωνιῶν τῶν ἐν τῷ κύκλῳ 216

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Βʹ.

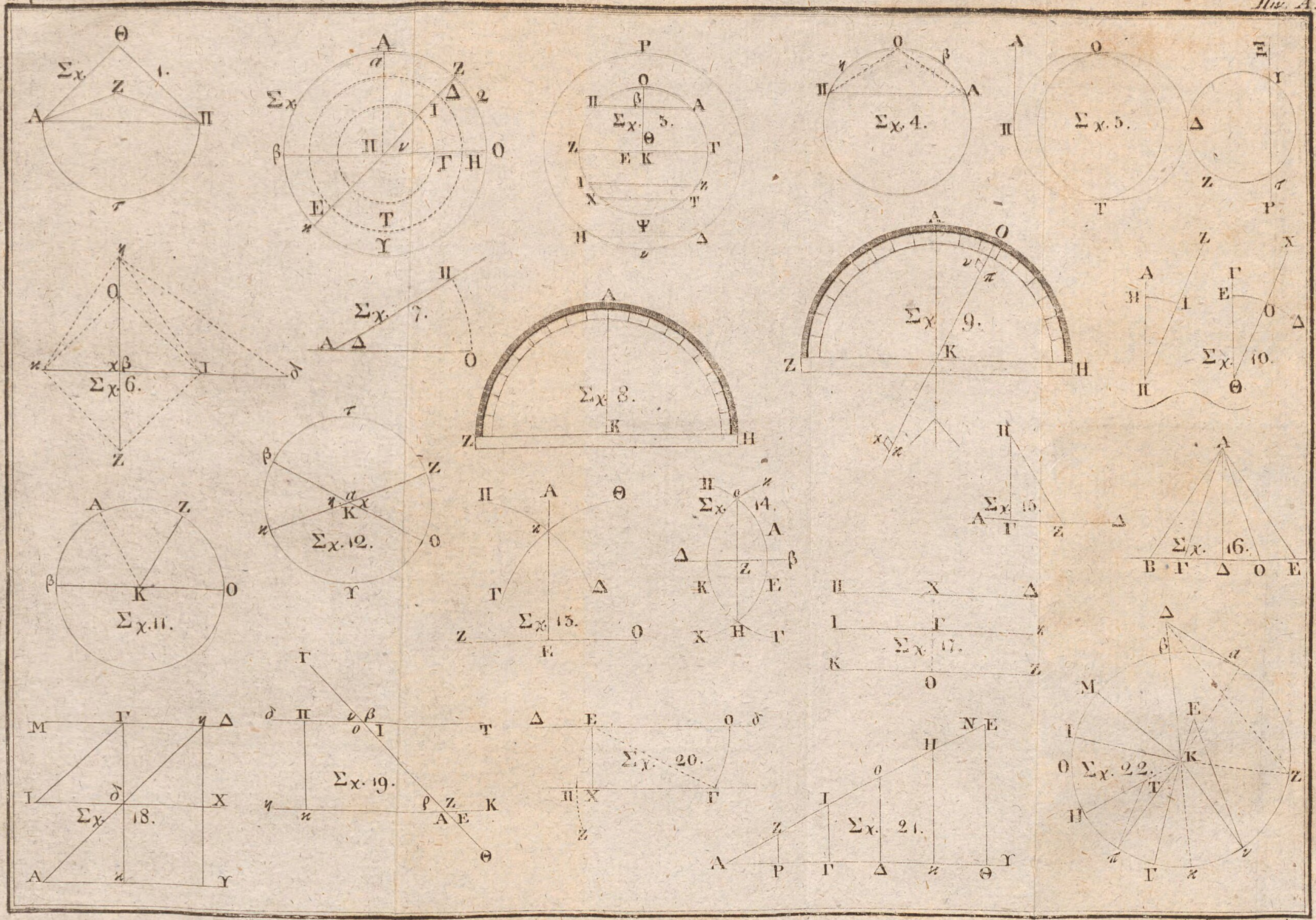
Κεφάλαιον Αʹ. Περὶ σχημάτων 226
— — Βʹ. Περὶ τριγώνου 228
— — Γʹ. Περὶ ὁμοίων τριγώνων . . . 234
— — Δʹ. Περὶ ἴσων τριγώνων . . . 235
— — Εʹ. Περὶ τετραπλεύρων . . . 239
— — ϛʹ. Περὶ πολυγώνων ἐν γένει . 244
— — Ζʹ. Περὶ τῆς δυνάμεως τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνου 251
— — Ηʹ. Περὶ καταμετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν 253
— — Θʹ. Περὶ ἐπιφανείας πολυγώνων . 261
— — Ιʹ. Περὶ ἰσοπεριμέτρων σχημάτων . 264

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Γʹ.

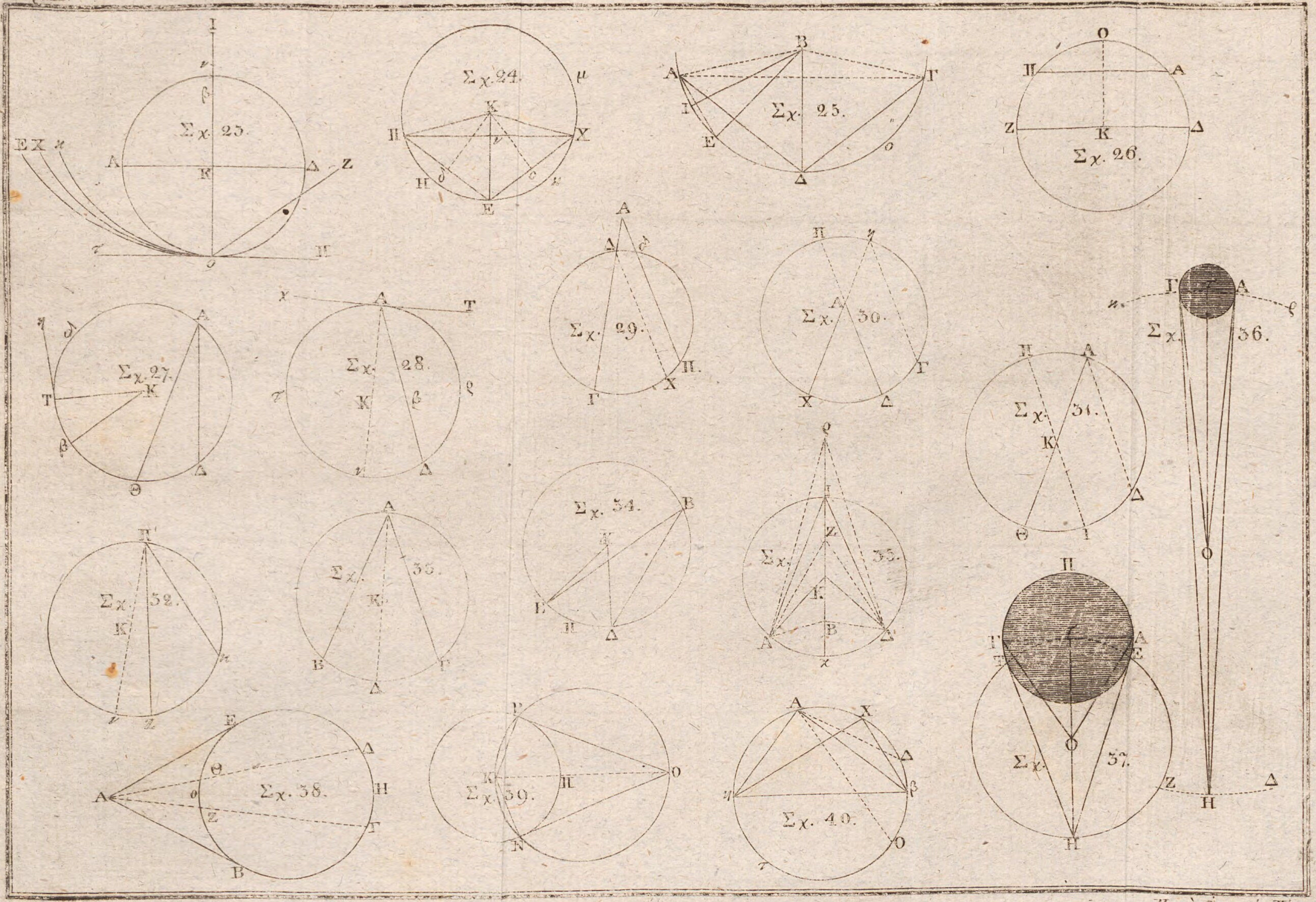
Κεφάλαιον Αʹ. Περὶ ἀναλογίας τῶν γραμμῶν. 266
— — Βʹ. Περὶ ἀναλογίας τῶν ὁμοίων τριγώνων 274
— — Γʹ. Περὶ ὀρθογωνίου τριγώνου . . 282
— — Δʹ. Περὶ ἀναγωγῆς τῶν πολυγών. 289
— — Εʹ. Περὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου 292
— — ϛʹ. Περὶ γεωμετρικῆς κλίμακος καὶ ἀναλογικοῦ διαβήτου 299
— — Ζʹ. Περὶ ὁμοίων σχημάτων . . . 302
— — Ηʹ. Περὶ ἐπιφανειῶν ὡς ἐπιπέδων θεωρουμένων 310

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Δʹ.

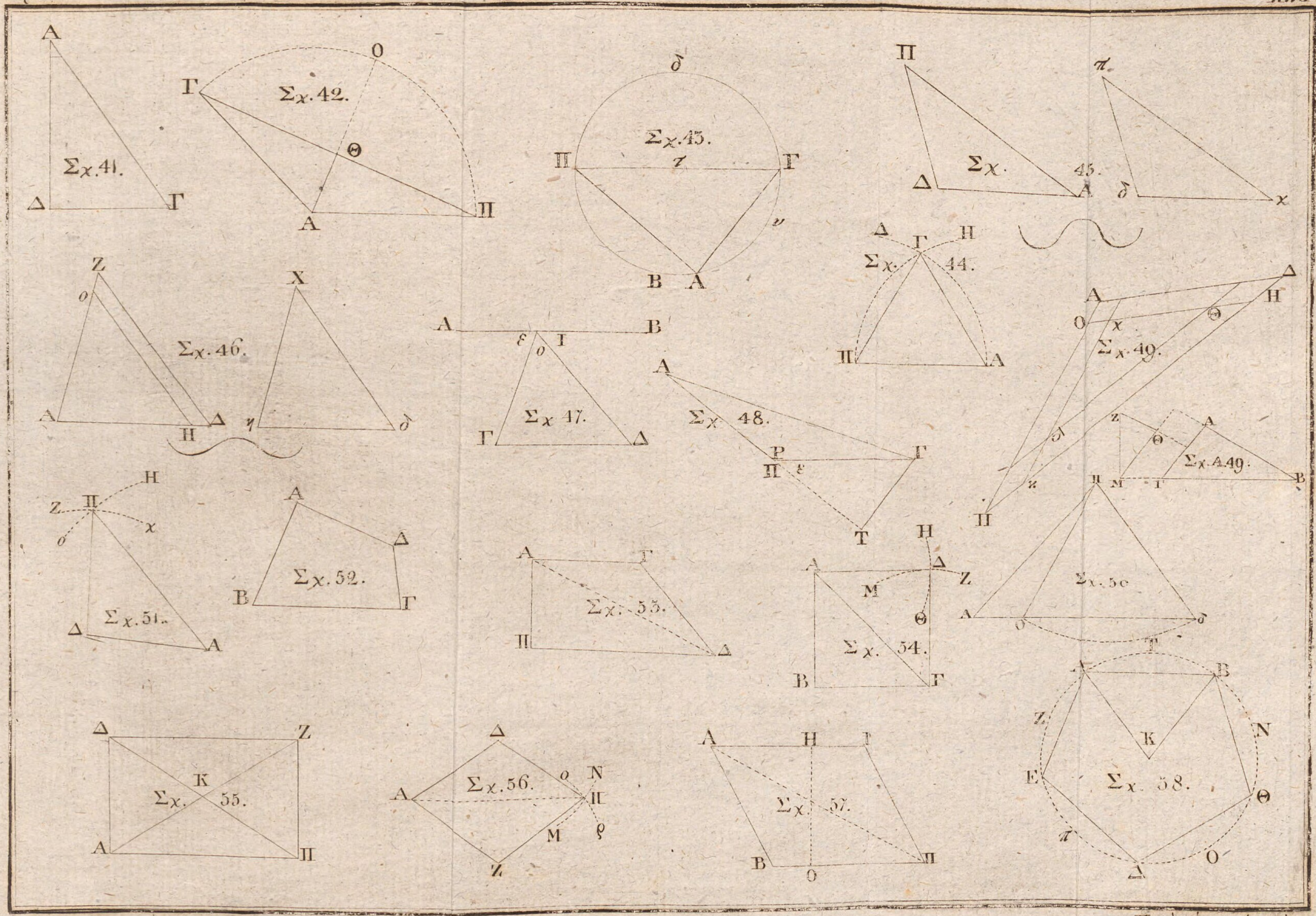
Κεφάλαιον Αʹ. Περὶ γενέσεως τῶν στερεῶν . 314
— — Βʹ. Περὶ ἐπιφανείας τῶν στερεῶν . 318
— — Γʹ. Περὶ τῆς τῶν στερεῶν σωμάτων στερεότητος 324
— — Δʹ. Περὶ πολυέδρων 330



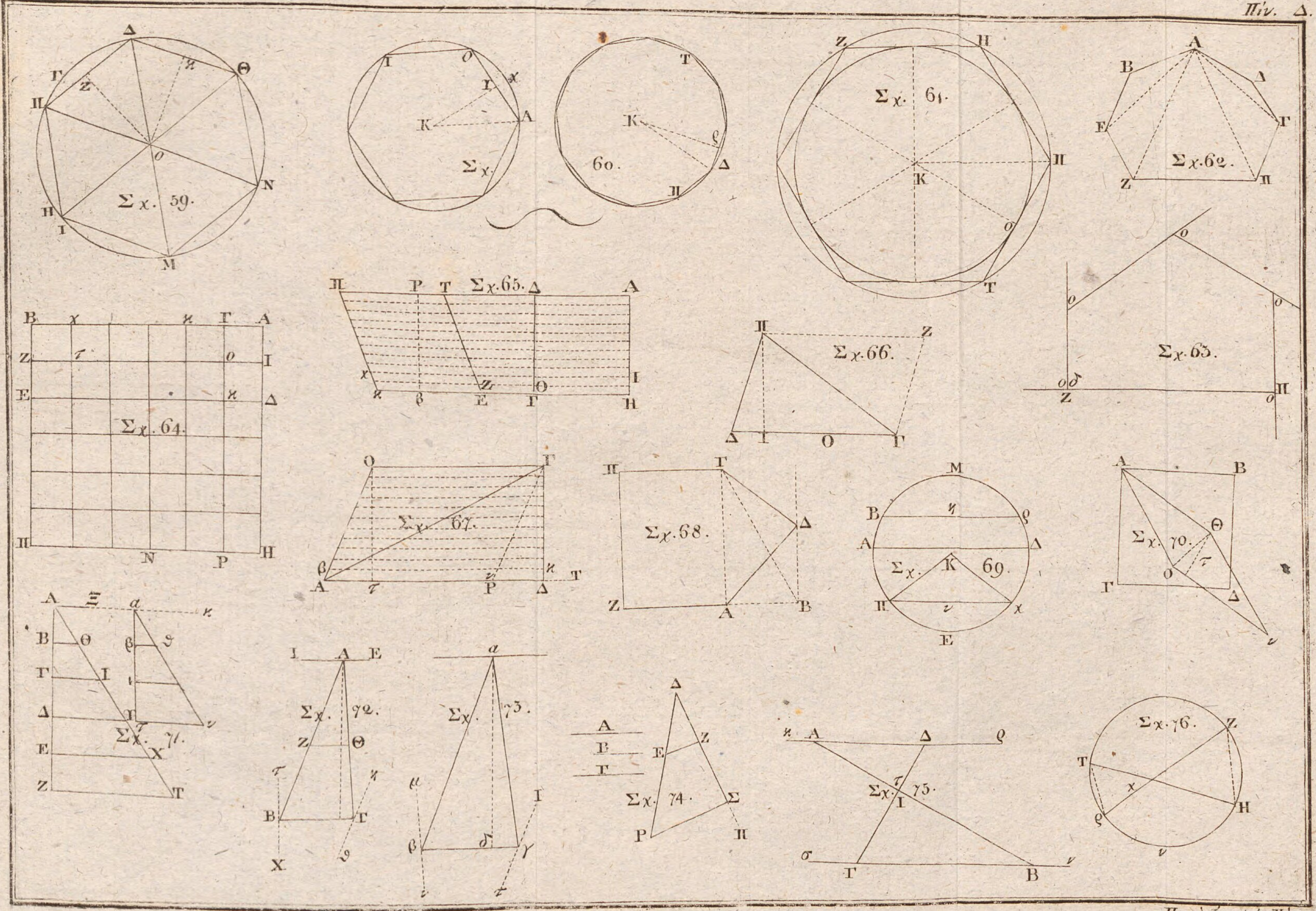
Παρὰ Ιγνατίῳ Κύεν.



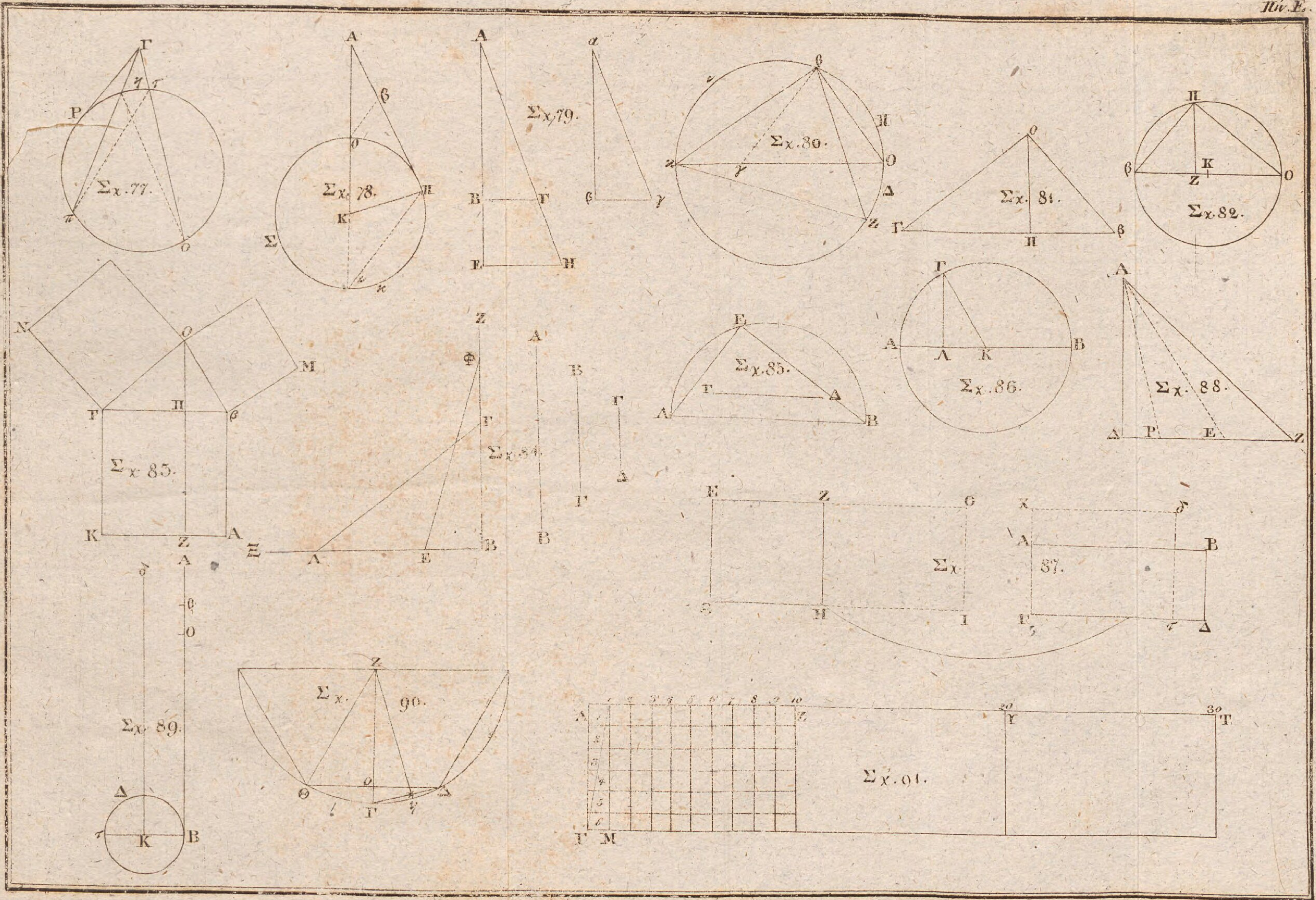
Παρὰ Ἰγνατίῳ Κύεν



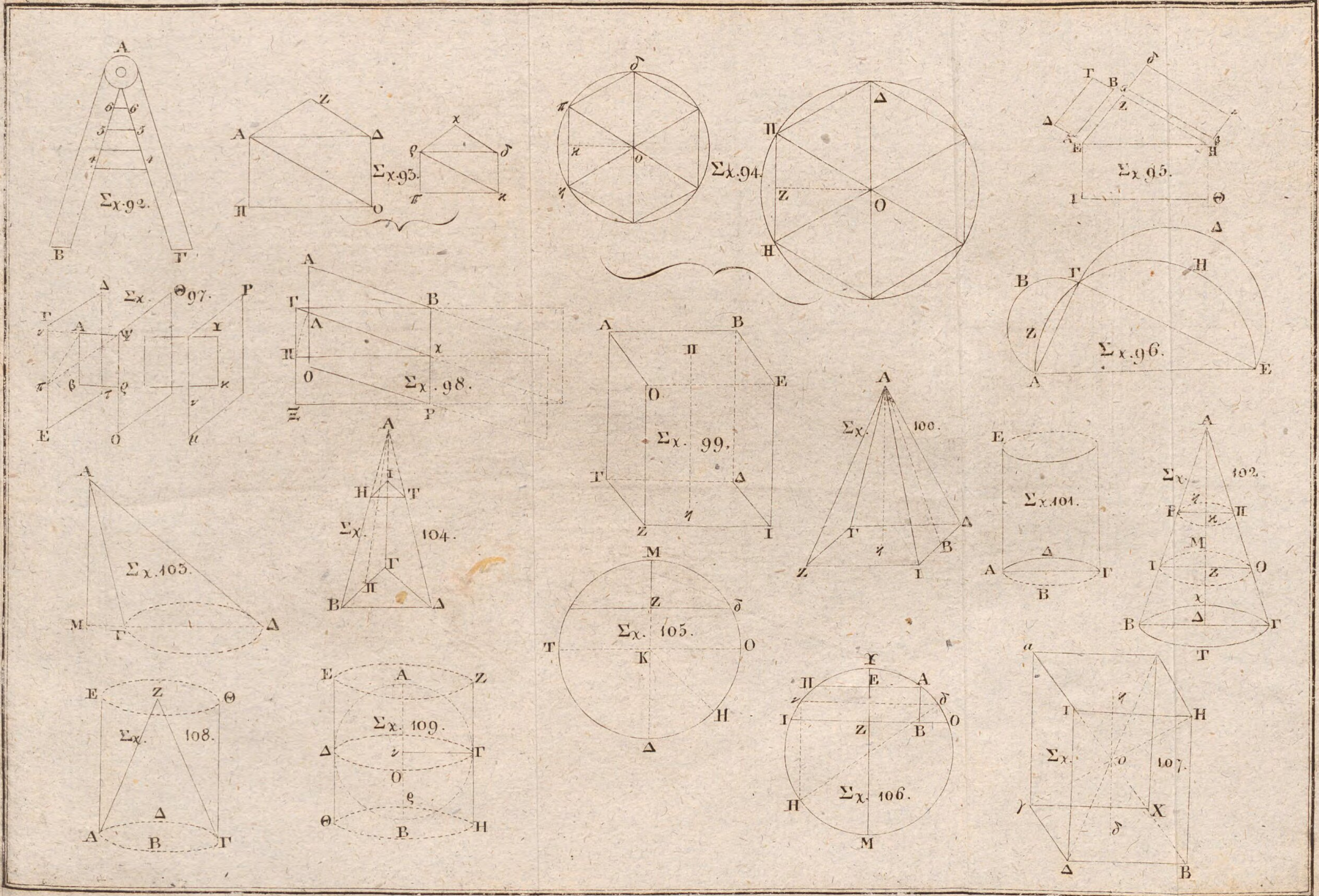
Παρὰ Ἰγνατίῳ Κλεν.



Παρὰ Ἰγνατίῳ Κόεν.



Παρὰ Ἰγνατίῳ Κυχ.



Παρὰ Ἰγνατίῳ Κύεν.